Mathematik II für Studierende der Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie und Physik

Vorlesungsskript

Ralf Holtkamp
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/holtkamp

Hamburg, 2024

[0]Version vom 12. Juli 2024, basierend auf Versionen der Vorjahre. Ursprüngliche Version: Vicente Cortés, 2006/07

Inhaltsverzeichnis I

Inhaltsverzeichnis II

Inhaltsverzeichnis III

Inhaltsverzeichnis IV

Kapitel 13

Determinante

Determinante einer 2×2-Matrix

Bemerkung:

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$. Das durch $Ax = b$ gegebene inhomogene lineare Gleichungssystem sei eindeutig lösbar.

Gesucht: Lösungsformel für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Im Spezialfall $n = 2$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Mit elementaren Zeilenumformungen findet man im Fall, dass eine eindeutige Lösung existiert ($\mathrm{rg}(A) = n = 2$) die folgende Regel:

Cramersche Regel für $n = 2$:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$
$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Dass dies wirklich eine Lösung ist, verifiziert man leicht durch Einsetzen.

Definition

Der Ausdruck $\mathrm{Det}(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{K}$ *heißt Determinante der* (2×2)*-Matrix* A.

Determinante

Definition (Determinante)

Eine Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt Determinante, wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

(D1) det *ist linear in jeder Spalte, d.h.*

$$\begin{aligned} &\det(a_1 \cdots a_{i-1} \ \lambda a_i + \mu b_i \ a_{i+1} \cdots a_n) \\ = \ &\lambda \det(a_1 \cdots a_i \cdots a_n) + \mu \det(a_1 \cdots a_{i-1} \, b_i \, a_{i+1} \cdots a_n) \end{aligned}$$

für alle Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n, b_i \in \mathbb{K}^n$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(D2) det *ist alternierend, d.h.* $\det A = 0$, *falls zwei Spalten von* A *übereinstimmen.*

(D3) det *ist folgendermaßen normiert:* $\det(\mathbf{1}_n) = 1$, *wobei* $\mathbf{1}_n := (e_1 \cdots e_n)$ *die Einheitsmatrix ist.*

Wir werden zeigen, dass es genau eine Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften (D1)-(D3) gibt.

Zunächst zeigen wir, dass (D1)-(D3) eine Reihe weiterer Rechenregeln nach sich ziehen.

Satz

Sei $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Aus (D1)-(D2) folgt für jede Permutation $\sigma \in S_n$:

$$(*) \qquad \det(a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det A.$$

Beweis. Aus (D1)-(D2) erhalten wir für $i < j$

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\cdots a_i + a_j \cdots a_i + a_j \cdots) \\ &= \underbrace{\det(\cdots a_i \cdots a_i \cdots)}_{=0} + \det(\cdots a_i \cdots a_j \cdots) \\ &\quad + \det(\cdots a_j \cdots a_i \cdots) + \underbrace{\det(\cdots a_j \cdots a_j \cdots)}_{=0} \\ &= \det(\cdots a_i \cdots a_j \cdots) + \det(\cdots a_j \cdots a_i \cdots). \end{aligned}$$

Hierbei ist die i-te und j-te Spalte angegeben. Die drei Auslassungspunkte stehen für $a_1 \cdots a_{i-1}$, sowie $a_{i+1} \cdots a_{j-1}$ und $a_{j+1} \cdots a_n$.

Das beweist (*) für jede Transposition $\sigma = \tau_{ij}$.

Der allgemeine Fall folgt nun daraus, dass sich jede Permutation als Produkt von Transpositionen schreiben lässt. □

Satz

Sei $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus (D1)-(D2) folgt, dass Addition des λ-fachen der j-ten Spalte von A zur i-ten Spalte von A $(i \neq j)$ den Wert der Determinante nicht ändert:

$$\det(a_1 \cdots a_{i-1}\; a_i + \lambda a_j\; a_{i+1} \cdots a_n) = \det(A).$$

Beweis. Aus der Linearität in der i-ten Spalte folgt:

$$\begin{aligned} & \det(a_1 \cdots a_{i-1}\; a_i + \lambda a_j\; a_{i+1} \cdots a_n) \\ \stackrel{(D1)}{=} \; & \det A + \lambda \det(\cdots a_j \cdots a_j \cdots) \stackrel{(D2)}{=} \det A. \end{aligned}$$

□

Folgerung

Sei $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Aus (D1)-(D2) folgt: Falls $\mathrm{rg}(A) \neq n$, so ist $\det(A) = 0$.

Beweis. $\mathrm{rg}(A) \neq n$ bedeutet, dass die Dimension des Bildes von A kleiner als n ist. D.h. aber, dass sich wenigstens eine der Spalten a_i als Linearkombination der anderen schreiben lässt, dass für ein i gilt gilt

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j.$$

Daraus ergibt sich durch Zuaddieren die Spalten $j \neq i$

$$\det A = \det(a_1 \cdots a_{i-1}\; \underbrace{a_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j}_{=0}\; a_{i+1} \cdots a_n) = 0.$$

□

Berechnung der Determinante mittels Spaltenumformungen

Satz

Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ lässt sich durch wiederholtes Anwenden folgender zwei Spaltenumformungen in eine Diagonalmatrix $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1 \cdots \lambda_n e_n)$ überführen:

(S1) *Vertauschen von zwei Spalten bei gleichzeitiger Multiplikation einer der beiden mit -1 und*

(S2) *Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.*

Folgerung

Für A invertierbar und A' wie im Satz gilt $\det A = \det A' = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$.

Beweis der Folgerung

Die Spaltenumformungen (S1)-(S2) ändern nicht den Wert der Determinante. Somit erhalten wir aus dem Satz:

$$\det A = \det A' \overset{(D1)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(\mathbf{1}_n) \overset{(D3)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_n. \qquad \square$$

Beweis des Satzes: Da A invertierbar ist, ist $\mathrm{rg}(A) = n$. Daher können wir durch Anwendung des Gaußalgorithmus auf die Spalten (statt auf die Zeilen), mittels (S1)-(S2) die Matrix A in untere Dreiecksgestalt bringen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang n, da die Umformungen (S1)-(S2) den Rang nicht ändern.

Also ist das Produkt $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$.

Durch Umformungen vom Typ (S2) können wir deswegen alle Matrixeinträge unterhalb der Diagonalen eliminieren und erhalten die gewünschte Diagonalgestalt $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. $\square$

Der Gaußalgorithmus liefert auch:

Satz/ÜA

Für Blockdreiecksmatrizen gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D.$$

Hierbei ist A eine $(n \times n)$-Matrix, D eine $(m \times m)$-Matrix, B eine $(n \times m)$-Matrix und C eine $(m \times n)$-Matrix.

Wir haben bereits gesehen:

Charakterisierung von Determinanten

Es gibt höchstens eine Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(D1) det ist linear in jeder Spalte,

(D2) det ist alternierend bzgl. der Spalten, d.h. $\det A = 0$, falls zwei Spalten von A übereinstimmen,

(D3) det ist normiert: $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Unter der Voraussetzung, dass eine solche Abbildung existiert, gilt: $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.

Dass eine solche Abbildung existiert, zeigen wir jetzt:

Satz (Explizite Formel für die Determinante)

Es gibt genau eine Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *mit den Eigenschaften*

(D1) $\det$ *ist linear in jeder Spalte,*

(D2) $\det$ *ist alternierend bzgl. der Spalten, d.h.* $\det A = 0$, *falls zwei Spalten von* A *übereinstimmen,*

(D3) $\det$ *ist normiert:* $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Die Determinante einer $(n \times n)$*-Matrix* $A = (a_{ij})_{i,j}$ *ist durch folgende Formel gegeben:*

$$Det\, A := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Beweis. Da wir bereits wissen, dass es *höchstens* eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1)-(D3) gibt, genügt es (D1)-(D3) für die Abbildung *Det* nachzuweisen, um $DetA = \det A$ zu zeigen.

(D1): Seien A, B und C Matrizen, die als r-te Spalte gerade a_r, b_r und $\lambda a_r + \mu b_r$ haben und sonst übereinstimmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} Det\, C &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (\lambda a_{\sigma(r)r} + \mu b_{\sigma(r)r}) \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda Det\, A + \mu Det\, B. \end{aligned}$$

Weiter Beweis der expliziten Formel für die Determinante:

(D2): Es genügt zu zeigen, dass für jede Transposition τ

$$Det\,\underbrace{\left(a_{\tau(1)}\cdots a_{\tau(n)}\right)}_{A_\tau:=} = -DetA$$

gilt. Für eine Matrix wie in (D2) mit $a_i = a_j$ und $\tau = \tau_{ij}$ gilt dann $A = A_\tau$, so dass $Det\,A = Det\,A_\tau = -Det\,A$, und somit $Det\,A = 0$. Dies beweist (D2).

Mit $\sigma' := \sigma\tau = \sigma \circ \tau$ haben wir $\sigma = \sigma'\tau$, $\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$ und somit

$$\begin{aligned} Det(A_\tau) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)} \\ &= -\sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')a_{\sigma'(\tau(1))\tau(1)}\cdots a_{\sigma'(\tau(n))\tau(n)} \\ &= -\sum_{\sigma'\in S_n} \varepsilon(\sigma')a_{\sigma'(1)1}\cdots a_{\sigma'(n)n} = -Det\,A \end{aligned}$$

Weiter im Beweis der expliziten Formel für die Determinante:

(D3): Sei nun $A = \mathbf{1}_n$, d.h.

$$a_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\delta_{ij} \quad \text{heißt Kroneckersymbol}).$$

Ist $\sigma \in S_n$ eine Permutation mit $\sigma \neq \mathrm{Id}$, so existiert ein $j \in \{1, \ldots n\}$ mit $\sigma(j) \neq j$. Es folgt $\delta_{\sigma(j)j} = 0$, und der entsprechende Summand in $Det(\mathbf{1}_n)$ verschwindet.

Wir erhalten also

$$Det(\mathbf{1}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1)1}\cdots\delta_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\mathrm{Id}) = 1.$$

$\square$

Berechnung von Determinanten

Die Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ mittels der Formel

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

ist wegen des schnellen Wachstums von $\mathrm{card}(S_n) = n!$ für große n sehr aufwändig.

Beachten Sie, dass $n!$ schneller wächst als jede Exponentialfunktion a^n, $a > 1$.

Wir werden bald effizientere Formeln zur Berechnung der Determinante kennenlernen.

Regel von Sarrus:

Wir erhalten für $n = 3$ direkt aus der Formel:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

dabei entsprechen die ersten drei Terme den zyklischen Permutationen [123], [231] und [312], die letzten drei den Transpositionen τ_{13}, τ_{12} und τ_{23}.

Praktisches Vorgehen: Wir schreiben den 1. und 2. Spaltenvektor nochmal hinter die Matrix und betrachten die Diagonale und ihre beiden Parallelen. Für diese addieren wir die Produkte der jeweiligen drei Einträge (positives Vorzeichen). Dann subtrahieren wir die Produkte der jeweiligen Einträge für die von links unten nach rechts oben laufenden Diagonalen (negatives Vorzeichen).

Satz

Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ *gilt*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Substitution $\tau = \sigma^{-1}$ liefert wegen $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$ die Behauptung. □

Folgerung

(i) *Ebenso wie durch die Eigenschaften*

- (D1) det *ist linear in jeder Spalte,*
- (D2) det *ist alternierend bzgl. der Spalten, d.h.* $\det A = 0$, *falls zwei Spalten von* A *übereinstimmen,*
- (D3) det *ist normiert:* $\det(\mathbf{1}_n) = 1$

lässt sich $\det\colon \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *durch die folgenden Eigenschaften charakterisieren:*

- (D1') det *ist linear in jeder Zeile,*
- (D2') det *ist alternierend bzgl. der Zeilen, d.h.* $\det A = 0$, *falls zwei Zeilen von* A *übereinstimmen,*
- (D3') $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Folgerung

(ii) *Addition des λ-fachen der j-ten Zeile der Matrix A zur i-ten Zeile ($i \neq j$) ändert nicht den Wert der Determinante.*

(iii) *Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile ($i \neq j$) ändert die Determinante nur um ein Vorzeichen.*

(iv) *Insbesondere lässt sich die Determinante durch Anwendung des Gaußalgorithmus auf die Zeilen der Matrix berechnen (bei Buchführung über die Zeilenvertauschungen!).*

Determinantenmultiplikationssatz

Satz (Determinantenmultiplikationssatz)

Es gilt für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Beweis.
1. Fall Falls $\mathrm{rg}(A) < n$, so ist $\mathrm{rg}(AB) < n$ und somit $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B) = 0 \cdot \det(B)$.

2. Fall Falls $\mathrm{rg}(B) < n$, so ist $\ker(B) \neq 0$ und somit $\ker(AB) \neq 0$. Also ebenfalls $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B) = \det(A) \cdot 0$.

3. Fall Seien also A, B invertierbar. Wir halten B mit $\det B \neq 0$ fest und zeigen, dass für die Funktion

$$\widetilde{\det} A := \frac{\det(A \cdot B)}{\det B}$$

die Axiome einer Determinantenfunktion erfüllt sind, woraus wegen der Eindeutigkeit einer solchen Funktion $\widetilde{\det} A = \det A$ und somit die Behauptung folgt.

Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes

(D2') Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\mathrm{rg}A < n$. Wie gesehen folgt $\mathrm{rg}AB < n$, also $\det(AB) = 0$, also $\widetilde{\det}A = \det(A \cdot B)/\det(B) = 0$.

(D3') Auch die Funktion $\widetilde{\det}$ ist normiert:

$$\widetilde{\det}\mathbf{1}_n = \frac{\det(\mathbf{1}_n \cdot B)}{\det B} = 1\ .$$

(D1') (i) Entsteht $\widetilde{A}$ aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $\widetilde{A} = \Delta_{\lambda,i} \cdot A$ mit

$$\Delta_{\lambda,i} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{–te Spalte.} \end{array}$$

Determinante | Determinantenmultiplikationssatz

Es folgt $\widetilde{AB} = \Delta_{\lambda,i}(A \cdot B)$, d.h. auch $\widetilde{A}B$ entsteht aus AB durch Multiplikation der i–ten Zeile mit λ. Nach dem Axiom (D1) für die Determinantenfunktion det folgt

$$\det(\widetilde{A}B) = \lambda \det AB$$

und somit

$$\widetilde{\det}\widetilde{A} = \frac{\det(\widetilde{A}B)}{\det B} = \lambda\frac{\det AB}{\det B} = \lambda\widetilde{\det}A.$$

(D1) (ii) Um die Additivität von $\widetilde{\det}$ zu zeigen, drücken wir die Matrix $B = (b_1, \dots, b_n)$ durch (Spalten-)Vektoren $b_j \in \mathbb{K}^n$ aus, und die Matrix A schreiben wir mit Vektoren $a_j \in \mathbb{K}^n$ als $A = \begin{pmatrix} (a_1)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (a_n)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. Es gelte für die i-te Zeile $(a_i)^{\mathrm{T}} = a_i'^{\mathrm{T}} + a_i''^{\mathrm{T}}$. Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (a_1)^{\mathrm{T}} b_1 & \dots & (a_1)^{\mathrm{T}} b_n \\ \vdots & & \vdots \\ (a_i'^{\mathrm{T}} b_1 + a_i''^{\mathrm{T}} b_1) & \dots & (a_i'^{\mathrm{T}} b_n + a_i''^{\mathrm{T}} b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_n)^{\mathrm{T}} b_1 & \dots & (a_n)^{\mathrm{T}} b_n \end{pmatrix}$$

Aus der Additivität von det folgt $\det AB = \det A'B + \det A''B$ und daraus die von $\widetilde{\det}$:

$$\widetilde{\det} A = \frac{\det AB}{\det B} = \widetilde{\det} A' + \widetilde{\det} A'' .$$

Folgerung

(i)

$$\det \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) *Insbesondere gilt für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$:*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

(iii)

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) | \det A = 1\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

ist eine Untergruppe, die sogenannte spezielle lineare Gruppe.

Beweis. (i-ii) sind klar. (iii) folgt, da $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(1)$ ein Kern ist. □

Achtung: Für $n \geq 2$ gilt nicht $det(A + B) = det(A) + det(B)$!

Gegenbeispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definition (Determinante eines Endomorphismus)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $A = M_B(F) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ seine darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis B von V. Wir definieren die Determinante von F als:

$$\det F := \det A.$$

Behauptung: *Dies ist wohldefiniert, d.h. die Definition hängt nicht von der Wahl der Basis B ab.*

Beweis. Sei B' eine weitere Basis von V, $A' := M_{B'}(F)$. Dann entspricht A einer Selbstabbildung $\phi_B^{-1} \circ F \circ \phi_B$ von $\mathbb{K}^n$ und A' einer Abbildung $\phi_{B'}^{-1} \circ F \circ \phi_{B'}$.

Letztere schreibt sich auch als

$$\underbrace{\phi_{B'}^{-1} \circ \phi_B}_{=:S} \circ \underbrace{\phi_B^{-1} \circ F \circ \phi_B}_{=A} \circ \underbrace{\phi_B^{-1} \circ \phi_{B'}}_{=S^{-1}}$$

d.h. $A' = SAS^{-1}$ mit der invertierbaren $n \times n$-Matrix S.

Also ist $\det A' = \det(SAS^{-1}) = \det S \det A (\det S)^{-1} = \det A$. $\square$

Äquivalenzrelation

Definition

- *Eine **Relation** auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Wir schreiben auch xRy, genau dann, wenn $(x, y) \in R$ gilt.*
- *Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie folgende Eigenschaften hat:*
  - (i) *$x \sim x$ für alle $x \in X$, (reflexiv)*
  - (ii) *$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (symmetrisch)*
  - (iii) *$x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ (transitiv)*

  *Jedes Element $x \in X$ definiert eine **Äquivalenzklasse***

  $$[x] := \{y \in X | y \sim x\}.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $X/\sim$ bezeichnet.

Beispiel

X sei die Menge der Schüler einer Schule, $\sim$ die Äquivalenzrelation "in die gleiche Klasse gehen". Dann ist $X/\sim$ die Menge der Klassen.

Quotientenraum

Beispiel

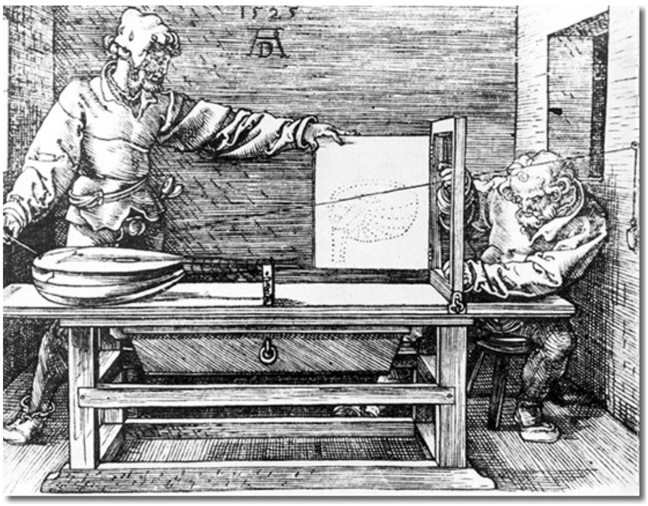
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V wie folgt:

$$x \sim y \iff x - y \in U.$$

Also $R = \{(x,y) \,|\, x, y \in V \ \text{ und } \ x - y \in U\} \subseteq V \times V$.
$V/U := \{[x] \mid x \in V\}$ ist (in kanonischer Weise) ein Vektorraum, wobei die Abbildung $x \mapsto [x]$ eine lineare Abbildung ist.
V/U heißt Quotientenvektorraum von V nach U.

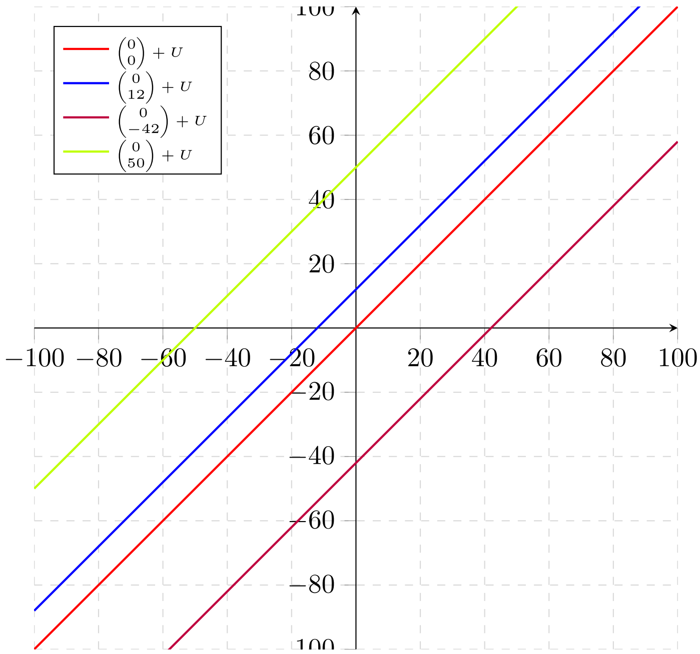
Dürer

Auf einem Bild von Albrecht Dürer (1471-1528) sieht man zwei Männer, die sich sehr bemühen, die Äquivalenzklassen bezüglich eines eindimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^3$ zu verstehen.



Ein mathematischeres Bild

Hier sehen Sie einige Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}^2$ nach dem in hellem Rot gezeichneten ein-dimensionalen Unterraum:



Orientierung

Definition

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zwei (geordnete) Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ heißen gleich orientiert, wenn der Basiswechsel $F = \phi_{B'} \circ \phi_B^{-1} \colon V \to V$ positive Determinante hat.

Bemerkungen

- Beachte, dass $F(b_i) = \phi_{B'}\phi_B^{-1}(b_i) = \phi_{B'}(e_i) = b'_i$.
- Die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis B ist gegeben durch die Abbildung $\phi_B^{-1} \circ \left(\phi_{B'} \circ \phi_B^{-1}\right) \circ \phi_B = \phi_B^{-1} \circ \phi_{B'} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Insbesondere:
$$\det F = \det(\phi_B^{-1} \circ \phi_{B'}).$$

Orientierung

Satz

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $B \sim B'$, falls B und B' gleich orientierte Basen von V sind.

(a) *Die Relation "$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V.*

(b) *Jede (geordnete) Basis B definiert eine Äquivalenzklasse (ihre "Händigkeit")*

$$[B] := \{B' \quad \text{Basis von} \quad V | B' \sim B\}$$

und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen.

Beweis.

a) ist eine einfache Übungsaufgabe.

b) Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis. Jede Basis ist entweder gleich orientiert zu $(b_1, \ldots, b_n)$ oder zu $(-b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Daher gibt es genau zwei Äquivalenzklassen.

□

Orientierung

Definition

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse gleich orientierter Basen von V.

Bemerkungen

- Jede Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ definiert eine Orientierung $[B]$. Wie wir gesehen haben, gibt es genau zwei Orientierungen $[B]$ und $[B]^{op} = [(-b_1, b_2, \ldots, b_n)]$. Letztere heißt die zu $[B]$ entgegengesetzte (oder umgekehrte) Orientierung.
- Automorphismen $F \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\det F > 0$ heißen orientierungserhaltend, denn $FB = (Fb_1, \ldots, Fb_n) \in [B]$ für jede Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Ein Automorphismus $F \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\det F < 0$ heißt orientierungsumkehrend, denn $FB = (Fb_1, \ldots, Fb_n) \in [B]^{op}$ für jede Basis B.

Orientierung

Beispiele I

- Die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^n$ ist die durch die kanonische Basis definierte Orientierung $[(e_1, \ldots, e_n)]$. Die Basen (e_2, e_3, e_1) und $(-e_2, e_1, e_3)$ definieren auch die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^3$.
- Die durch die Basis (e_2, e_1, e_3) definierte Orientierung ist zur durch die kanonische Basis definierten Orientierung $[(e_1, e_2, e_3)]$ entgegengesetzt. Es gilt $[(e_2, e_1, e_3)] = [(-e_1, e_2, e_3)]$.
- Die Drehung (um die z-Achse, entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel φ)

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ist wegen $\det D = 1 > 0$ orientierungserhaltend.

Orientierung

Beispiele II

Die Spiegelung (an der (x, y)-Ebene)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist wegen $\det S = -1 < 0$ orientierungsumkehrend.

Matrixinversion mittels Gaußalgorithmus

Wir wollen die Inverse A^{-1} zu $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bestimmen. Dazu erinnern wir uns an:

- i-te Spalte der Matrix A^{-1} ist $A^{-1}e_i$, wobei e_i der i-te Vektor der kanonischen Basis ist.
- Nun ist $\mathbf{x} := A^{-1}e_i$, also die i-te Spalte von A^{-1}, die eindeutige Lösung von des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = e_i$.
- D.h. wir können $\mathbf{x}$ bestimmen, indem wir den Gaußschen Algorithmus auf $(A|e_i)$ anwenden bis wir $(\mathbf{1}_n|\mathbf{x})$ erhalten.

Somit haben wir die i-te Spalte $\mathbf{x} = A^{-1}e_i$ von A^{-1} ermittelt. Das Verfahren auf alle Basisvektoren e_i gleichzeitig angewandt

$$(A \mid \mathbf{1}_n) \quad \overset{\text{Gaußscher Alg.}}{\longrightarrow} \quad (\mathbf{1}_n \mid A')$$

liefert die inverse Matrix $A^{-1} = A'$.

Ein Zahlenbeispiel:

Wir wollen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ invertieren (das geht, da $\det A = -3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II,\ III\cdot(-1/3)}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{II-2\cdot III}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right),$$

d.h. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Als explizite Probe rechne man $AA^{-1} = \mathbf{1}_3$ nach.

Berechnung der Inversen mittels Determinanten

Dazu benötigt man den Begriff der Streichungsmatrix.

Definition (Streichungsmatrix)

Sei $A = (a_{kl})_{k,l=1\dots n} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ und $1 \le i, j \le n$ zwei Indizes. Die Matrix $A_{ij} \in \mathrm{Mat}(n-1, \mathbb{K})$, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, heißt (i,j)-te Streichungsmatrix von A.

Lemma

(i) *die (i,j)-te Streichungsmatrix von A^{T} stimmt mit der Matrix $(A_{ji})^{\mathrm{T}}$ überein.*

(ii) $(-1)^{i+j} \det A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{j-1} e_i \mathbf{a}_{j+1} \cdots \mathbf{a}_n)$.

Beweis. (i) ist klar.

Beweis von (ii). Die $(n \times n)$-Matrix $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{j-1} e_i \mathbf{a}_{j+1} \cdots \mathbf{a}_n)$ lässt sich durch Addition von Vielfachen der j-ten Spalte zu den anderen Spalten in folgende Form bringen:

$$B_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix B_{ij} lässt sich durch $i-1$ Zeilen- und $j-1$ Spaltenvertauschungen in die Blockdiagonalgestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix}$ bringen.

Also $\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{j-1} e_i \mathbf{a}_{j+1} \cdots \mathbf{a}_n) =$

$\det B_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. □

Satz

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ und $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{i,j}$ definiert durch

$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji} \overset{Lemma}{=} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} e_j \, \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n).$$

Dann gilt $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)\mathbf{1}_n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$:

$$\begin{aligned} \sum_j \widetilde{a}_{ij} a_{jk} &\overset{Lemma}{=} \sum_j a_{jk} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \quad e_j \quad \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \overbrace{\sum_j a_{jk} e_j}^{=a_k} \quad \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) \ = \ \delta_{ik} \det A. \end{aligned}$$

Weiter im Beweis: Ist $\det(A) \neq 0$, so erhalten wir aus $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$ auch $A\widetilde{A} = \det(A)\mathbf{1}_n$, und zwar durch Multiplikation von $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$ von links mit A und von rechts mit A^{-1}.
Ist aber $0 = \det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$, so erhält man

$$0 = \widetilde{(A^{\mathrm{T}})}A^{\mathrm{T}} \overset{Lemma(i)}{=} \left(\widetilde{A}\right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = (A\widetilde{A})^{\mathrm{T}}$$

und damit auch $A\widetilde{A} = 0$. □

Folgerung (Entwicklungssatz von Laplace)

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ gilt:

(Z) *(Entwicklung nach der i-ten Zeile)*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(S) *(Entwicklung nach der j-ten Spalte)*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Beweis. Auf der rechten Seite von (Z) bzw (S) steht, siehe Lemma (ii), genau der i-te bzw. j-te Diagonaleintrag der Matrix $A\widetilde{A} = (\det A)\mathbf{1}_n$ bzw. der Matrix $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$. □

Folgerung (Cramersche Regel)

Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

(i) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \widetilde{A}.$

(ii) *Die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1\dots n}$ der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ berechnet sich nach der folgenden Cramerschen Regel*

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1}\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n).$$

Beweis.

(i) folgt sofort aus $\det A \neq 0$ und $\widetilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}_n$.

(ii) Mit $\widetilde{a}_{ij} = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} e_j \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n)$ und $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ist

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det A} \sum_j \widetilde{a}_{ij} b_j = \frac{1}{\det A} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \sum_j b_j e_j\ \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \frac{1}{\det A} \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{b}\, \mathbf{a}_{i+1} \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

□

Cramersche Regel für $n = 2$:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Und (vgl. Spezialfälle: $\mathbf{b} = e_1$ bzw. $\mathbf{b} = e_2$):

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Ein Zahlenbeispiel für den Entwicklungssatz von Laplace:

Wir wollen die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \pi & 1 & -1 \end{pmatrix}$ durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \pi & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{21} + \pi \cdot \det A_{31}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \pi \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3 + \pi \cdot 0 = -3$$

Kapitel 14

Diagonalisierung von Endomorphismen

Eigenwerte, Eigenvektor und Eigenraum

Definition

Sei F ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, d.h. die Selbstabbildung $F\colon V \to V$ sei $\mathbb{K}$-linear.

- *$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von F, wenn es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, so dass*

$$F(v) = \lambda v.$$

- *Jeder solche Vektor heißt Eigenvektor von F zum Eigenwert λ.*
- *Der Unterraum von V definiert durch*

$$V_\lambda := \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$

heißt Eigenraum von F zum Eigenwert λ.

Beispiel 1:

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(V).$$

$e_1 + e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1,

$e_1 - e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1,

Die Eigenräume sind $V_1 = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ und $V_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$,

Da $V = V_1 \oplus V_{-1}$, hat F keine weiteren Eigenwerte.

Beispiel 2:

Die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, gegeben durch die Matrix

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ist eine Drehung um den Winkel φ und hat daher hat keine reellen Eigenwerte, falls φ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Zum Beispiel ist $D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Eigenwertgleichung liefert

$$D_{\pi/2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

d.h. $-y = \lambda x$ und $x = \lambda y$. Dies impliziert aber $x = -\lambda^2 x$ und $y = -\lambda^2 y$. Wegen $\lambda^2 \geq 0$, ergibt dies $x = y = 0$.

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom dient zur Bestimmung der Eigenwerte.

Verabredung. Wir nehmen im Folgenden an, dass $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ ein unendlicher Körper ist. Wir unterscheiden nicht zwischen Polynomen $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ und polynomialen Funktionen $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Definition (Charakteristisches Polynom)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $F \in \mathrm{End}(V)$.

Das charakteristische Polynom $P_F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto P_F(t)$, von F ist definiert durch

$$\begin{aligned} P_F(t) &:= \det(F - t\mathrm{Id}) = \det(A - t\mathbf{1}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(a_{1\sigma(1)} - t\delta_{1\sigma(1)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_{n\sigma(n)} - t\delta_{n\sigma(n)}\right), \end{aligned}$$

wobei $A = (a_{ij})_{i,j}$ die darstellende Matrix von F bezüglich (irgend)einer Basis von V ist.

Wie sieht das charakteristische Polynom aus?

Satz

Das charakteristische Polynom von $F \in \mathrm{End}(V)$ hat Grad $n = \dim V$.

Schreibt man

$$P_F(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{K}$, die von F abhängen, dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \det F = \det A. \\ \alpha_{n-1} &= (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \\ \alpha_n &= (-1)^n, \end{aligned}$$

wobei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix von F ist.

Die Summe der Diagonalelemente von A heißt auch die Spur des Endomorphismus F: $\mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Beweis. Das Polynom $(a_{1\sigma(1)} - t\delta_{1\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (a_{n\sigma(n)} - t\delta_{n\sigma(n)})$ hat für jede Permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$ einen Grad $\leq n-2$, da dann mindestens zwei Ausdrücke $\delta_{i\sigma(i)}$ gleich 0 sind.

Daher gilt

$$P_F(t) = (a_{11} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t) + Q(t)$$

mit einem Polynom $Q(t)$ vom Grad $\leq n-2$.

Ausmultiplizieren liefert nun:

$$P_F(t) = (-t)^n + (-t)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + P_F(0)$$

mit $P_F(0) = \det(F - 0 \cdot \mathrm{Id}) = \det F$.

□

Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

Die Eigenwerte von F sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von F.

Beweis.

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von F, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt mit $F(v) = \lambda v$, d.h. wenn $(F - \lambda \mathrm{Id})(v) = 0$ gilt, d.h. wenn $\ker(F - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$.

Dies ist gleichbedeutend mit $\det(F - \lambda \mathrm{Id}) = P_F(\lambda) = 0$. □

Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n.

$F \in \mathrm{End}(V)$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V gibt, so dass die darstellende Matrix von F Diagonalgestalt hat:

$$M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Bemerkung

Die Basisvektoren b_i sind dann Eigenvektoren von F und die Diagonaleinträge λ_i sind die zugehörigen Eigenwerte λ_i.

F ist also genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.
Diese Basis, wenn sie existiert, ist nicht eindeutig.

Erinnerung und Erweiterung:

Definition (Innere Summe von mehr als zwei Unterräumen)

Sei V ein Vektorraum und $V_1, V_2, \dots, V_k \subseteq V$ Unterräume. Die innere Summe der Unterräume V_i ist dann der Unterraum

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k := \{v_1 + v_2 + \dots + v_k | v_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Haben die Unterräume die Eigenschaft

$$V_i \cap \mathrm{span}\{\bigcup_{j \neq i} V_j\} = \{0\} \ \forall\ i$$

so heißt die Summe direkt und wir schreiben $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$.

Es gilt:

- $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots \oplus V_{k-1}) \oplus V_k$.
- Jeder Vektor $v \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ hat eine eindeutige Darstellung $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ mit $v_i \in V_i$
- Jedes k-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ von Vektoren $v_i \in V_i \setminus 0$ ist linear unabhängig.

Bemerkung

Allgemeiner:
Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine beliebige (nicht notwendiger Weise endliche) Familie von Unterräumen $V_i \subseteq V$.
Wir definieren $\sum_{i \in I} V_i := \mathrm{span}\{\cup_{i \in I} V_i\}$ und schreiben $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, falls (i) $V = \sum_{i \in I} V_i$ und (ii) jede Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V_i \setminus 0$ linear unabhängig ist.

Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit

Satz

Das charakteristische Polynom eines diagonalisierbaren Endomorphismus F zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis. Aus $M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ folgt

$$\begin{aligned} P_F(t) &= \det(\mathrm{diag}(\lambda_1 - t, \ldots, \lambda_n - t)) \\ &= (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t) \\ &= (-1)^n (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, wie wir gleich sehen werden.

Beispiel 1

Sei
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

$P_F(t) = (1-t)^2$ zerfällt in Linearfaktoren, $t = 1$ ist der einzige Eigenwert. Eigenvektoren zum Eigenwert 1 erfüllen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 gleich $V_1 = \mathbb{K}e_1$.

Es gibt also keine Basis aus Eigenvektoren und F ist nicht diagonalisierbar.

Beispiel 2

Sei
$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

Dann gilt $P_F(t) = t^2 + 1$.

Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat $P_F(t)$ keine Nullstellen und zerfällt also nicht in Linearfaktoren.

Insbesondere ist F nicht diagonalisierbar. Wir haben schon gesehen, dass F die 90°-Drehung ist und deshalb keine Eigenvektoren hat.

Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt $P_F(t) = t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$.

Darüber hinaus ist F diagonalisierbar (mit komplexen Eigenwerten $\pm i$):

$$\begin{aligned} F(e_1 - ie_2) &= e_2 + ie_1 = i(e_1 - ie_2) \\ F(e_1 + ie_2) &= e_2 - ie_1 = -i(e_1 + ie_2). \end{aligned}$$

Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms

Ist λ eine Nullstelle eines Polynoms $P(t)$, so kann man P schreiben als

$$P(t) = (t - \lambda)^m Q(t)$$

mit einem Polynom Q mit $Q(\lambda) \neq 0$. Die nicht-negative Zahl m heißt Vielfachheit der Nullstelle λ.

Definition (Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms)

Sei F ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Eigenwert λ.

Die algebraische Vielfachheit m_λ des Eigenwerts λ ist definiert durch

$$P_F(t) = (t - \lambda)^{m_\lambda} Q(t), \text{ wobei } Q \in \mathbb{K}[t] \text{ mit } Q(\lambda) \neq 0.$$

Multiplizität und Dimension des Eigenraumes

Satz

Es sei V_λ der Eigenraum zu λ und $n_\lambda := \dim V_\lambda$ die sogenannte geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ. Dann ist die geometrische Vielfachheit durch die algebraische Vielfachheit beschränkt

$$n_\lambda \leq m_\lambda.$$

Beweis. Sei $B_\lambda = (b_1, \ldots, b_{n_\lambda})$ eine Basis des Eigenraums V_λ.

Nach dem Basisergänzungssatz können wir B_λ zu einer Basis B von V ergänzen.

Dann gilt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{1}_{n_\lambda} & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei D eine quadratische Matrix ist.

Daraus ergibt sich $P_F(t) = (-1)^{n_\lambda}(t - \lambda)^{n_\lambda} P_D(t)$ und somit $n_\lambda \leq m_\lambda$. □

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz

Sei V ein Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und v_i, $i = 1, \ldots, k$, seien Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen *Eigenwerten λ_i.*

Dann ist die Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k.

IA: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, da ein Eigenvektor per definitionem ungleich dem Nullvektor ist.

IV: Sei $k \geq 2$, und es gelte dass die Familie $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ von $k-1$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}$ zu verschiedenen Eigenwerten λ_i linear unabhängig ist.

IS: Seien $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_i. Wir müssen zeigen, dass die Familie (v_i) linear unabhängig ist.

Weiter im Beweis:

Angenommen, es gelte $0 = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$, so folgt einerseits

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k c_i v_i$$

und andererseits durch Anwendung von F

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i v_i .$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} c_i v_i$$

und somit (wegen der Induktionsvoraussetzung) $c_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$.

Es folgt $0 = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i = c_k v_k$ und somit auch $c_k = 0$. $\square$

Diagonalisierbarkeit und Aufspaltung in Eigenräume

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

(i) *Der Endomorphismus F ist diagonalisierbar*

(ii) *Das charakteristische Polynom P_F zerfällt in Linearfaktoren und für alle Eigenwerte λ stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein, $m_\lambda = n_\lambda$*

(iii) *V ist direkte Summe von Eigenräumen, $V = \bigoplus_{\lambda\ EW} V_\lambda$.*

Beweis. Sei F ein beliebiger Endomorphismus. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von F. Sei $U = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i} \subseteq V$ die innere Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten. Sie ist direkt.

Wähle eine Basis B_U von U. Nach dem Austauschlemma können wir B_U zu einer Basis B von V ergänzen.

Diagonalisierung von Endomorphismen | Diagonalisierbarkeit

Weiter im Beweis:
Die darstellende Matrix von F bezüglich B hat dann die Gestalt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei A die darstellende Diagonalmatrix der Einschränkung $F|_U$ (bezüglich der Basis B_U) ist und D eine $(m \times m)$-Matrix ist, $m := \dim V - \dim U$.
Daraus folgt für das charakteristische Polynom von F

$$P_F(t) = P_A(t)Q(t),$$

wobei $Q(t) = P_D(t)$, falls $m > 0$ und $Q(t) = 1$, falls $m = 0$.
Nun gilt: F diagonalisierbar $\iff$ $U = V \iff$ $m = 0$ $\iff$
$P_F(t) = P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - t)^{n_{\lambda_k}}$. $\square$

Kapitel 15

Euklidische und Hermitesche Vektorräume

Euklidische und Hermitesche Vektorräume

Wir betrachten nun Vektorräume, die mit einer zusätzlichen Struktur, einem Skalarprodukt, ausgestattet sind. Mit dessen Hilfe können wir geometrische Größen wie Abstand, Länge und Winkel definieren.

Erinnerung: Linearformen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- Der Vektorraum

$$V^* := L(V, \mathbb{K}) = \{L \colon V \to \mathbb{K} \mid L \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear}\}$$

  heißt Dualraum zu V oder auch Raum der Linearformen.
- Hat V endliche Dimension n, so auch V^*. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $v_1^*, \ldots, v_n^*$, definiert durch

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases},$$

  eine Basis von V^*. Diese Basis heißt die zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis.

Bi- und Multilinearformen

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- *Eine Abbildung $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Bilinearform, wenn sie linear in beiden Argumenten ist, d.h. wenn für alle $x, y, z \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \beta(ax + by, z) &= a\beta(x, z) + b\beta(y, z) \text{ und} \\ \beta(z, ax + by) &= a\beta(z, x) + b\beta(z, y) \end{aligned}$$

- *Eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu\colon V^k = V \times \cdots \times V &\to \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \mu(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

  heißt Multilinearform (genauer k-Linearform), wenn μ in jedem der k Argumente linear ist.

Beispiele

- Linearformen sind 1-Linearformen

  Beispielsweise ist $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ eine Linearform auf dem Vektorraum der integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$.
- Sei $V = C^0([a, b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Dann definiert $(f, g) \mapsto \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$ eine Bilinearform auf V.
- Die Determinante $\det\colon \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ ist n-linear.

Symmetrische und schiefymmetrische Bilinearformen

Definition

Eine Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

- *symmetrisch, wenn*

$$\beta(v,w) = \beta(w,v) \quad \text{für alle} \quad v,w \in V.$$

- *schiefsymmetrisch, wenn*

$$\beta(v,w) = -\beta(w,v) \quad \text{für alle} \quad v,w \in V.$$

- *nicht entartet, wenn die lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & \beta(v,\cdot) \end{array}$$

injektiv ist, d.h. wenn $v = 0$ der einzige Vektor ist, für den $\beta(v,w) = 0$ für alle $w \in V$ gilt.

Definition

Sei $\dim V = n$, *$\alpha\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Als darstellende Matrix $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ von α bezüglich B bezeichnen wir die Transponierte der darstellenden Matrix der linearen Abbildung $V \to V^*, v \mapsto \alpha(v,\cdot)$, bezüglich der gegebenen Basis von V und der dazu dualen Basis von V^*.*

Bemerkungen/ÜA

- Dies ist die $(n \times n)$-Matrix mit den Einträgen

$$\alpha_{ij} = \alpha(v_i, v_j).$$

Denn: Wir schreiben $\alpha(v_i,\cdot) = \sum_k c_{ki} v_k^*$, mit (zu bestimmenden) $c_{ki} \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$, und wenden diese Linearform auf v_j an und finden

$$\alpha(v_i, v_j) = \textstyle\sum_k c_{ki} v_k^*(v_j) = c_{ji} = \alpha_{ij}.$$

- Die Bilinearform α ist genau dann nicht entartet, wenn ihre darstellende Matrix invertierbar ist.

Bemerkungen/ÜA

- Die Bilinearform α ist symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) genau dann, wenn ihre darstellende Matrix A symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) ist, d.h. wenn $A = A^{\mathrm{T}}$ (bzw. $A = -A^{\mathrm{T}}$). Der Raum der symmetrischen (bzw. schiefsymmetrischen) Bilinearformen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$).
- Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Basis und definieren $\beta(\cdot,\cdot)$ durch
$$\beta\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
Die darstellende Matrix von β bezüglich der kanonischen Basis ist dann die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$.

Euklidische Vektorräume

Definition (Euklidisches Skalarprodukt/Euklidischer Vektorraum)

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt
$$\langle v, v\rangle > 0.$$
Ein (Euklidisches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$.

Ein Euklidischer Vektorraum ist ein reeller Vektorraum, zusammen mit einem (Euklidischen) Skalarprodukt.

Bemerkung

Skalarprodukte sind nicht entartet, denn aus $\langle v, v\rangle = 0$ folgt $v = 0$.

Beispiel

Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

wobei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ und $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Die darstellende Matrix des kanonischen Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basis ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$, denn

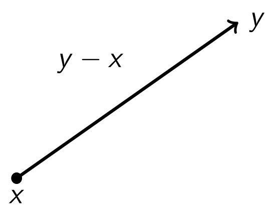
$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geometrische Größen 1: Länge und Abstand

Definition

Sei V ein Euklidischer Vektorraum.

- *Die Länge (auch Norm) eines Vektors $v \in V$ ist die nicht-negative Zahl*
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$
- *Der Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in V$ ist die Länge des Vektors $y - x$:*
$$d(x, y) := \|y - x\|.$$



Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist fundamental. Sie erlaubt es u.a., Winkel zu definieren.

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Wir können annehmen, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$ gilt, denn sonst ist nichts zu zeigen.

Weiter im Beweis:
Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Bilinearität

$$0 \leq \langle \lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda^2\|v\|^2 + \mu^2\|w\|^2 + 2\lambda\mu\langle v, w\rangle.$$

Einsetzen von $\lambda = \sqrt{\frac{\|w\|}{\|v\|}}$ und $\mu = \pm\sqrt{\frac{\|v\|}{\|w\|}}$ liefert

$$0 \leq 2\|v\|\|w\| \pm 2\langle v, w\rangle,$$

d.h. $\pm\langle v, w\rangle \leq \|v\|\|w\|$, und damit die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn für eine dieser beiden Wahlen von λ und μ gilt $\lambda v + \mu w = 0$, d.h. wenn v und w linear abhängig sind. $\square$

Geometrische Größen 2: Winkel und Orthogonalität

Definition

Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $v, w \in V \setminus \{0\}$.

- *Der* Winkel $\angle(v, w)$ *zwischen v und w ist definiert als*

$$\angle(v, w) := \arccos \underbrace{\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}}_{\in[-1,1]} \in [0, \pi].$$

- *Man sagt, dass $v, w \in V$* senkrecht *aufeinander stehen oder* orthogonal *sind, wenn*

$$\langle v, w\rangle = 0$$

und schreibt dafür $v \perp w$.

- *Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ heißt der Unterraum*

$$U^{\perp} := \{v \in V | v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement *von U in V.*

Orthogonales Komplement

Satz

Sei β eine nicht entartete *Bilinearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum V und $U \subseteq V$ ein Unterraum.*

(i) *Dann hat der Unterraum $U' := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$ die Dimension $\dim U' = n - \dim U$.*

(ii) *Die Unterräume U und U' sind genau dann komplementär, d.h. $V = U \oplus U'$, wenn $U \cap U' = 0$.*

Zu jedem Unterraum in einem Euklidischen Vektorraum gibt es ein ausgezeichnetes Komplement:

Folgerung

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums. Dann ist $U^{\perp}$ ein Komplement zu U in V, d.h. $V = U \oplus U^{\perp}$.

Beweis. der Folgerung: es gilt $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, denn $v \in U \cap U^{\perp}$ impliziert $\langle v, v\rangle = 0$. Da das Skalarprodukt positiv definit ist, folgt $v = 0$. $\square$

Beweis des Satzes:
Sei $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von U, ausgedehnt zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ von V. Der Unterraum U' ist genau der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\beta(u_i, \sum x_j u_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta(u_i, u_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j = 0, \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Da β nicht entartet ist, ist die Abbildung $U \ni u \mapsto \beta(u, .) \in V^*$ injektiv. Somit hat die Matrix $(\beta_{ij})_{i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,n}$ vollen Rang $r = \dim U$. Damit ist die Dimension des Lösungsraumes U' gleich $\dim V - r = \dim V - \dim U$.
(ii) folgt aus (i) und der Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} \dim(U + U') &= \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U') \\ &\overset{(i)}{=} \dim V - \dim(U \cap U'). \end{aligned}$$

$\square$

Orthonormale Basen

In Euklidischen Vektorräumen gibt es eine ausgezeichnete Klasse von Basen.

Definition

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

(i) *Eine Vektor $v \in V$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|v\| = 1$.*

(ii) *Eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ von V aus n Einheitsvektoren $w_i \in V$, die orthogonal zueinander sind, heißt Orthonormalbasis (kurz: ONB). Es gilt $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{i,j}$.*

Beispiel

Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist orthonormal bzgl. des kanonischen Skalarproduktes.

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ sind gegeben durch $\langle v, w_i \rangle \in \mathbb{R}$, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i .$$

Beweis. Da $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis ist, lässt sich v (eindeutig) als Linearkombination schreiben,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Wir nehmen das Skalarprodukt mit w_j:

$$\langle v, w_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$$

$\square$

Satz

Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von orthogonalen Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$, d.h.

$$v_i \perp v_j \quad \text{für alle} \quad i \neq j .$$

Dann ist die Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Insbesondere ist in einem n-dimensionalen Euklidischen Vektorraum jede Familie aus n orthogonalen Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis.

Beweis.
Sei $0 = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$, wobei $J \subseteq I$ eine endliche Teilmenge ist und $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Daraus folgt für alle $i \in J$

$$0 = \langle v_i, \sum_{j \in J} \lambda_j v_j \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$$

und somit $\lambda_i = 0$. $\square$

Orthonormalisierungsverfahren

Satz (Gram-Schmidt)

Jeder endlich-dimensionale Euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis. (Diese ist natürlich nicht eindeutig.)

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $n = \dim V \in \mathbb{N}$.

- Falls $\dim V = 1$, so existiert $v \neq 0$ und $w_1 := \frac{v}{\|v\|}$ ist eine ONB.
- Wir nehmen an, dass jeder Euklidische Vektorraum der Dimension $< n$ eine ONB hat und zeigen, dass dann auch jeder n-dimensionale Euklidische Vektorraum eine ONB hat.
- Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Nach Induktion besitzt der $(n-1)$-dimensionale Unterraum $v^\perp := (\mathbb{R}v)^\perp$ eine ONB $(w_2, \ldots, w_n)$. Durch $w_1 := \frac{v}{\|v\|}$ wird diese zu einer ONB von V ergänzt.

$\square$

Gram-Schmidt Verfahren

Eine beliebige Basis der Form $(v_1, \ldots, v_n)$ kann man algorithmisch zu einer ONB umformen:
Wir setzen $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Iterativ nehmen wir an, dass wir schon Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ konstruiert haben mit $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Ist $(w_1, \ldots, w_k)$ schon eine Basis, dann sind wir fertig. Andernfalls definieren wir die senkrechte Projektion von v_{k+1} auf den von den Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ aufgespannten Raum:

$$\tilde{v}_{k+1} = \langle v_{k+1}, w_1 \rangle w_1 + \ldots + \langle v_{k+1}, w_k \rangle w_k$$

und bilden: $\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \tilde{v}_{k+1}$. Es gilt

$$\langle \tilde{w}_{k+1}, w_i \rangle = \langle v_{k+1}, w_i \rangle - \langle v_{k+1}, w_i \rangle \langle w_i, w_i \rangle = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k.$$

Der Vektor $w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}$ erfüllt dann $\langle w_{k+1}, w_j \rangle = \delta_{k+1,j}$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ ist eine ONB.

Beispiel

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ in $\mathbb{R}^3$. Bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erhalten wir:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{9}} v_1 = \frac{1}{3} v_1,$$

$$\tilde{w}_2 = e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 = e_1 - \frac{1}{9} v_1 = \frac{1}{9} (8e_1 - 2e_2 - 2e_3),$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{w}_2, \tilde{w}_2 \rangle}} \tilde{w}_2 = \frac{1}{6\sqrt{2}} (8e_1 - 2e_2 - 2e_3).$$

Normierte Vektorräume

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| \colon V \to [0, \infty), \quad v \mapsto \|v\|,$$

mit folgenden Eigenschaften:

N1) *Für $v \in V$ gilt genau dann $\|v\| = 0$, wenn $v = 0$.*

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *für alle $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

N3) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ *für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).*

Ein normierter Vektorraum ist ein reeller oder komplexer Vektorraum zusammen mit einer Norm.

Satz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V,$$

eine Norm $\|\cdot\|$ auf V definiert. Damit ist jeder Euklidische Vektorraum insbesondere ein normierter Vektorraum.

Beweis.
N1) folgt daraus, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist.

N2) folgt aus der Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$:
$\|\lambda v\|^2 = \langle\lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle = \lambda^2\|v\|^2$.

N3) folgt aus der Bilinearität und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle \\ &\le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Hermitesche Vektorräume

Um auf komplexen Vektoräumen geometrische Größen einführen zu können, benötigt man den Begriff eines Hermiteschen Skalarprodukts.

Definition

Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Hermitesche Form auf V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument ist, und die für alle $v, w \in V$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle \ .$$

Bemerkung

Daraus folgt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ konjugiert-linear im zweiten Argument ist, d.h.

$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\langle u, w\rangle \quad \text{für alle} \quad u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

denn $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle\lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$.

Außerdem ist $\langle v, v\rangle$ reell für alle $v \in V$, da $\overline{\langle v, v\rangle} = \langle v, v\rangle$.

Bemerkung

Die Menge der Hermiteschen Formen eines komplexen Vektorraumes ist ein reeller (kein komplexer!) Vektorraum, denn: Ist β eine Hermitesche Form und $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(\lambda\beta)(u, v) = \lambda\beta(u, v) = \lambda\overline{\beta(v, u)} = \overline{\overline{\lambda}\beta(v, u)},$$

d.h. $(\lambda\beta)(u, v) = \overline{(\lambda\beta)(v, u)}$, falls $\lambda = \overline{\lambda}$ reell.

Definition

Eine Hermitesche Form $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \textit{für alle } v \in V \setminus 0.$$

Ein (Hermitesches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite Hermitesche Form $V \times V \to \mathbb{C}$. Ein Hermitescher Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum zusammen mit einem Hermiteschen Skalarprodukt. (Hermitesche Vektorräume heißen auch unitäre Vektorräume.)

Beispiel

- Das kanonische (Hermitesche) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i,$$

  wobei $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$.
- Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann definiert jedes Euklidische Skalarprodukt $\langle .,.\rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle .,.\rangle^H$ auf $\mathbb{C}^n$ mittels komplex linearer und konjugiert linearer Erweiterung. D.h. wir definieren $\langle .,.\rangle^H$ durch

$$\langle x + iy, u + iv\rangle^H := \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle + i\,(\langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle)$$

  für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$.
  $\langle .,.\rangle^H$ ist in der Tat ein Hermitesches Skalarpodukt (ÜA)

Bemerkung

Sei V ein Hermitescher Vektorraum.

- Auf V definiert man wieder die Länge eines Vektors durch
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V.$$
- Ist $\langle ., . \rangle$ ein Hermitesches Skalarpodukt, so definiert sein Realteil $g(u, v) := Re\langle u, v\rangle$ ein Euklidisches Skalarprodukt auf V, aufgefasst als reeller Vektorraum (ÜA).

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei $h = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V.

(i) *Dann gilt für alle $v, w \in V$:*
$$(*) \quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) *Gleichheit in $(*)$ gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*

Beweis.

(i) Wir können annehmen, dass $\langle v, w\rangle \neq 0$ gilt, und setzen
$$\lambda := \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{|\langle v, w\rangle|} \in \mathbb{C}.$$
Wegen $|\langle v, w\rangle|^2 = \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}$ gilt dann
$$\langle \lambda v, w\rangle \; = \; \lambda\langle v, w\rangle \; = \; \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{|\langle v, w\rangle|} \; = \; |\langle v, w\rangle|.$$
Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das *Euklidische* Skalarprodukt $g := \mathrm{Re}(h)$ liefert weiter
$$(2) \quad \langle \lambda v, w\rangle = g(\lambda v, w) \leq \sqrt{g(\lambda v, \lambda v)}\sqrt{g(w, w)} = \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) Gleichheit in (2) und somit in $(*)$ gilt genau dann, wenn λv und w linear abhängig über $\mathbb{R}$ und somit v und w linear abhängig über $\mathbb{C}$ sind.

$\square$

Die Euklidische Norm

Die Euklidische Norm

Wie im Fall von Euklidischen Vektorräumen gilt für Hermitesche Vektorräume V: Das Hermitesche Skalarpodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert eine Norm $\| \cdot \|$ auf V:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V.$$

Für N2) rechnet man nach: $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v \rangle = \lambda\overline{\lambda}\|v\|^2$.

Die durch das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und die kanonische Hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$ definierte Norm heißt Euklidische Norm,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}}$$

Unitäre Basen

Wieder gibt es eine ausgezeichnete Klasse von Basen:

Definition (Unitäre Basen)

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum. Eine unitäre Basis von V ist eine Basis $(w_1, \dots, w_n)$ mit

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}.$$

(Ist der Bezug auf das Hermitesche Skalarpodukt klar, so kann man auch wieder von einer ONB sprechen.)

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer unitären Basis $(w_1, \dots, w_n)$ sind wieder gegeben durch $\langle v, w_i \rangle$, d.h. $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i$.

Satz

Jeder endlichdimensionale Hermitesche Vektorraum besitzt eine unitäre Basis.

Beweis. Übungsaufgabe (wie für den Satz von Gram-Schmidt) $\square$

Die orthogonale Gruppe

Definition

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum.
Eine surjektive lineare Abbildung $F\colon V \to V$ heißt orthogonal, wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \textit{für alle} \quad v, w \in V.$$

Bemerkung

- Aus der Gleichung folgt, dass F injektiv ist: aus $F(v) = 0$ folgt $0 = \langle F(v), F(v)\rangle = \langle v, v\rangle$, also $v = 0$. Falls $\dim V < \infty$, so folgt aus Injektivität die Surjektivität. Diese muss also bei endlich dimensionalen Vektorräumen nicht gefordert werden.
- Die orthogonalen Abbildungen bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(V) \subseteq \mathrm{Aut}(V)$, die sogenannte orthogonale Gruppe zu V.
- Orthogonale Abbildungen erhalten Winkel, Längen und Abstände. Sie setzen sich daher aus Drehungen und Spiegelungen zusammen.

Die orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Dann definiert man die orthogonale Gruppe

$$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \langle .,.\rangle)$$

als Untergruppe invertibler Matrizen. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und e_i die kanonische Basis. Dann ist $A \in \mathrm{O}(n) \iff$

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle \stackrel{!}{=} \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \langle e_k, e_l\rangle = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_k a_{ki} a_{kj}$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Dies ist aber äquivalent zu $\mathbf{1}_n = A^{\mathrm{T}} A$. Es gilt also für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$

$$A \in \mathrm{O}(n) \iff A^{\mathrm{T}} A = \mathbf{1}_n.$$

Die unitäre Gruppe

Definition (Unitäre Gruppe)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hermitescher Vektorraum.
Ein surjektiver Endomorphismus $F\colon V \to V$ heißt unitär, wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

(Falls $\dim V < \infty$, braucht die Surjektivität nicht gefordert zu werden.)
Die unitären Endomorphismen bilden eine Untergruppe $\mathrm{U}(V) \subseteq \mathrm{Aut}(V)$, die sogenannte unitäre Gruppe von V (ÜA).

Beispiel

Für $\mathrm{U}(n) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^n z_i \overline{w}_i$:
$A \in \mathrm{U}(n) \iff \overline{A}^{\mathrm{T}} A = \mathbf{1}_n$. Man schreibt auch $A^\dagger := \overline{A}^{\mathrm{T}}$.

Übungsaufgabe

$\mathrm{U}(n)$ kann als Untergruppe von $\mathrm{O}(2n)$ aufgefasst werden.

Metrische Räume

Erinnerung:
Metrische Räume sind Mengen, auf denen eine reellwertige Abstandsfunktion definiert ist.

Definition

Sei X eine Menge.
Eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf X ist eine Abbildung

$$d\colon X \times X \to [0, \infty)$$

mit folgenden Eigenschaften:

M1) *Für $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$.*
M2) *$d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.*
M3) *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).*

Eine Norm auf einem Vektorraum definiert einen Abstand

Bemerkungen

- Die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

- Allgemeiner wird durch

$$d(x,y) := \|x-y\|, \qquad \text{für } x,y \in V$$

auf jedem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ eine Metrik $d\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert. Dabei folgt die Dreiecksungleichung für die Metrik aus der für die Norm:

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Erinnerung: Mit Hilfe der Metrik kann man Konvergenz von Folgen definieren.

Definition

(i) *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, heißt konvergent mit Grenzwert $x \in X$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wenn die Folge $d(x_n, x) \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*

(ii) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt im Punkt $x \in X$ stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \in Y$ für jede gegen $x \in X$ konvergente Folge $x_n \in X$.*

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Beispiel

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit zugehöriger Metrik d.

Dann ist die Norm $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, denn aus der Dreiecksungleichung für die Norm folgt $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

Die Parallelogrammgleichung

Die Frage, wann eine Norm auf einem reellen Vektorraum von einem Skalarprodukt kommt, kann mittels der Parallelogrammgleichung entschieden werden.

Satz (Parallelogrammgleichung)

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum V wird genau dann durch ein Skalarprodukt auf V induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die Parallelogrammgleichung gilt:

$$(*) \quad \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Ist die Norm durch ein Skalarprodukt definiert, d.h. ist $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ für alle $u \in V$, so ergibt sich (*) durch Berechnung der linken Seite mittels der Bilinearität des Skalarproduktes.

Weiter im Beweis:

($\Leftarrow$) Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right).$$

Dann gilt offenbar $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ und $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.
Es genügt daher, die Linearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im ersten Argument nachzuweisen. Wir beginnen mit einer Hilfsrechnung:
Für alle $u, u', w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \langle u+u', w\rangle + \langle u-u', w\rangle \\
\overset{(Def)}{=}\ & \frac{1}{4}\left(\|u+u'+w\|^2 - \|u+u'-w\|^2\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(\|u-u'+w\|^2 - \|u-u'-w\|^2\right) \\
\overset{(*)}{=}\ & \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 + \|u'\|^2) - \frac{1}{2}(\|u-w\|^2 + \|u'\|^2) \\
=\ & \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2) \overset{(Def)}{=} 2\langle u, w\rangle.
\end{aligned}$$

Weiter im Beweis:

Wir haben gezeigt, dass für alle $u, u', w \in V$ gilt

$$(1) \quad \langle u + u', w \rangle + \langle u - u', w \rangle = 2\langle u, w \rangle.$$

Für $u = u'$ erhält man $\langle 2u, w \rangle = 2\langle u, w \rangle$.

Nun zeigen wir die Additivität: Seien $v, v' \in V$ beliebig. Definiert man $u := \frac{1}{2}(v + v')$ und $u' := \frac{1}{2}(v - v')$, so ist $v = u + u'$ und $v' = u - u'$. Aus (1) erhält man dann

$$\langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \overset{(1)}{=} 2\langle u, w \rangle = \langle 2u, w \rangle = \langle v + v', w \rangle,$$

d.h. die Additivität im ersten Argument.

Daraus ergibt sich per Induktion $\langle nv, w \rangle = n\langle v, w \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Desweiteren folgt aus der Definition und der Norm-Eigenschaft (N2), dass

$$\langle -v, w \rangle = \frac{1}{4}\left(\| - v + w\|^2 - \|v + w\|^2\right) = -\langle v, w \rangle,$$

und damit $\langle nv, w \rangle = n\langle v, w \rangle$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Weiter im Beweis: Daraus ergibt sich wiederum, dass

$$\frac{1}{n}\langle u, w \rangle = \frac{1}{n}\langle n\frac{1}{n}u, w \rangle = \langle \frac{1}{n}u, w \rangle$$

für alle $u \in V, n \in \mathbb{Z}^*$. Somit

$$(2) \qquad \langle \lambda u, w \rangle = \lambda\langle u, w \rangle$$

für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Da es zu jeder reellen Zahl λ eine Folge λ_n rationaler Zahlen gibt, die gegen λ konvergiert, liefert die Stetigkeit der Norm die Gleichung (2) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Beispiele

(i) Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt natürlich die Parallelogrammgleichung.

(ii) Durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^n,$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Diese erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung, denn z.B. ist

$$8 = \|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 \quad \neq \quad 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 = 4.$$

(iii) Die Maximumsnorm

$$\|x\|_{max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung.

Äquivalente Normen

Definition

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c und C gibt, so dass

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Bemerkung

- Dies definiert eine Äquivalenzrelation zwischen Normen (ÜA). Insbesondere sind zwei Normen, die beide zu einer dritten äquivalent sind, auch zueinander äquivalent (Transitivität).
- Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente* Normen auf V definierten Metriken. Dann konvergiert eine Folge $x_n \in V$ gegen x bzgl. d_1 genau dann, wenn sie auch bzgl. d_2 gegen x konvergiert; d.h. die metrischen Räume (V, d_1) und (V, d_2) haben dieselben konvergenten Folgen.

Alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind äquivalent

Satz

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem endlichdimensionalen reellen oder komplexen Vektorraum V sind äquivalent.

Beweis. Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.
Für $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ betrachten wir wieder die Maximumsnorm

$$\|x\|_{max} := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Wir zeigen, dass jede Norm auf V äquivalent zu $\|\cdot\|_{max}$ ist.
Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf V gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|b_i\| \leq C\|x\|_{max},$$

mit $C := \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|$. Dies beweist die eine Ungleichung.

Weiter im Beweis:
Wir nehmen an, es gäbe kein $c > 0$ mit $c\|\cdot\|_{max} \leq \|\cdot\|$.
D.h. es gibt für jedes $c > 0$ ein $y \in V$ mit $c\|y\|_{max} > \|y\|$. Damit findet man für jedes c einen Vektor $x := \frac{y}{\|y\|}_{max}$ mit $\|x\|_{max} = 1$ und $c > \|x\|$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es also einen Vektor $x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} b_i \in V$ mit $|x_i^{(k)}| \leq 1$ und $\frac{1}{k} > \|x^{(k)}\|$. Nach Bolzano-Weierstraß hat jede der beschränkten Zahlenfolgen $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, eine konvergente Teilfolge.
Wir können daher annehmen, dass $(x^{(k)})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{max}$ gegen $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ konvergiert.
Es gilt dann

$$\|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq C\|x - x^{(k)}\|_{max} + \frac{1}{k} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Also $x = 0$ und somit $0 = \|x\|_{max} = \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\|_{max}$, im Widerspruch zu $\|x^{(k)}\|_{max} = 1$. $\square$

Normalformen von Endomorphismen

Für bestimmte Klassen von Endomorphismen $F\colon V \to V$ existiert eine Normalform. Damit ist gemeint, dass man stets eine Basis von V finden kann, in der die darstellende Matrix Normalform – z.B. Diagonalgestalt – hat (und dass "echt" verschiedene Endomorphismen in Normalform auch verschieden aussehen).
Sei z. B. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der darstellenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2). Dann ist $b_1 = e_1 - e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{2}$, und $b_2 = e_1 + e_2$ zum Eigenwert $\frac{3}{2}$. D.h. in der Basis (b_1, b_2) hat F die einfachere Diagonalgestalt

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Wir werden insbesondere Normalformen für orthogonale und unitäre Endomorphismen finden.

Satz (Normalform unitärer Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum und $F \in \mathrm{U}(V)$ ein unitärer Endomorphismus.

(i) *Die Eigenwerte von F sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Es gibt eine unitäre Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F. D.h. F ist in einer unitären Basis diagonalisierbar.*

Beweis.

(i) Sei v ein Eigenvektor von F und $\lambda \in \mathbb{C}$ der zugehörige Eigenwert. Aus

$$0 \neq \langle v, v\rangle = \langle Fv, Fv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

ergibt sich $|\lambda| = 1$.

(ii) Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten λ und μ. Wegen (i) ist $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Daher impliziert $\mu \neq \lambda$, dass $\lambda\overline{\mu} \neq 1$. Aus $\langle v, w\rangle = \langle Fv, Fw\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle$ folgt daher $\langle v, w\rangle = 0$.

(iii) Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$. Der Fall $n = 1$ ist klar.

Sei $\dim V \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle. Insbesondere hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle und F mithin einen Eigenwert $\lambda_1 \neq 0$.

Wir wählen einen zugehörigen Eigenvektor $b_1 \in V$ der Länge 1 und betrachten den Unterraum $W := b_1^\perp$.

Es gilt $\dim W = n - 1$ und $FW \subseteq W$, denn aus $w \in W$ folgt

$$0 = \langle b_1, w \rangle = \langle Fb_1, Fw \rangle = \lambda_1 \langle b_1, Fw \rangle$$

und somit $Fw \in W$, da $\lambda_1 \neq 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine unitäre Basis $(b_2, \ldots, b_n)$ von W bestehend aus Eigenvektoren von F und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist die gesuchte unitäre Basis von V. $\square$

Normalform orthogonaler Endomorphismen

Folgerung (Normalform orthogonaler Endomorphismen)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $F \in \mathrm{O}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus.

(i) *Eigenwerte von F sind reelle Zahlen vom Betrag 1, dh. $= \pm 1$.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Es gibt eine Orthonormalbasis, bezüglich derer F durch eine Blockdiagonalmatrix folgender Art dargestellt wird*

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q}),$$

wobei $\lambda_j \in \{\pm 1\}$, $D_{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$ Drehungen um den Winkel $\varphi_j \in \mathbb{R}$ sind, und $p + 2q = \dim V$ gilt.

Beweis.

(i-ii) Gleicher Beweis wie für unitäre Endomorphismen.

(iii) Analog erhalten wir auch eine aus Eigenvektoren bestehende ONB $(b_1, \ldots, b_p)$ für die Summe $U := V_1 \oplus V_{-1}$ der Eigenräume $V_{\pm 1}$.

Es sei $U \neq V$. Wieder bildet F das orthogonale Komplement $W := U^\perp$ in sich ab. Außerdem enthält W keine Eigenvektoren von F.

Insbesondere hat W gerade Dimension $m = 2q$, denn sonst hätte das charakteristische Polynom der Einschränkung $F|_W$ als reelles Polynom ungeraden Grades eine reelle Nullstelle.

Es genügt zu zeigen, dass W eine ONB besitzt, bezüglich der die darstellende Matrix von $F|_W$ die Gestalt $\mathrm{diag}(D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q})$ hat .

Euklidische und Hermitesche Vektorräume | Normalformen unitärer Endomorphismen

Weiter im Beweis:

Durch Wahl einer ONB von W können wir annehmen, dass $W = \mathbb{R}^m$ der Euklidische Raum ist und $F|_W$ gegeben ist durch $A \in \mathrm{O}(m)$.

Wir können A als komplexe Matrix, d.h. als Endomorphismus des $\mathbb{C}^m$, auffassen. Dann ist A unitär bezüglich des Hermiteschen Skalarproduktes auf $\mathbb{C}^m$, welches durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ induziert wird, denn $A^\mathrm{T} A = \mathbf{1}_m$ und $\overline{A} = A$ implizieren $\overline{A}^\mathrm{T} A = \mathbf{1}_m$.

Sei nun μ ein komplexer Eigenwert von A mit Eigenvektor $v = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Da A reell ist, gilt

$$Av = \mu v \implies A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\mu v} = \overline{\mu} \cdot \overline{v}.$$

Also ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v} := \mathbf{x} - i\mathbf{y}$. Die echt komplexen Eigenwerte $\mu_j = e^{i\varphi_j}$ $(\varphi_j \in \mathbb{R})$ treten also in komplexe konjugierten Paaren gleicher Vielfachheit auf, denn die komplexe Konjugation der Komponenten bildet den Eigenraum zum Eigenwert μ isomorph auf den Eigenraum zum Eigenwert $\overline{\mu}$ ab.

Weiter im Beweis: Nach dem Satz gibt es eine unitäre Basis

$$(\beta_1, \dots, \beta_q, \overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_q})$$

von $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2q}$ bestehend aus Eigenvektoren von $A \in \mathrm{U}(m)$ mit zugehörigen Eigenwerten

$$(\mu_1, \dots, \mu_q, \overline{\mu}_1, \dots, \overline{\mu}_q).$$

Hierbei ist $\mu_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ mit $\varphi_j \in \mathbb{R}$. Wir setzen für $j = 1, \dots, q$:

$$\beta_j' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_j + \overline{\beta_j}) \quad \beta_j'' = \frac{i}{\sqrt{2}}(\beta_j - \overline{\beta_j}).$$

$(\beta_1', \beta_1'', \dots, \beta_q', \beta_q'')$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^m$. (Das Euklidische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^m$ ist die Einschränkung des Hermiteschen Skalarprodukts von $\mathbb{C}^m$.)

Die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis ist von der gewünschten Form:
$A\beta_j' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_j}\beta_j + e^{-i\varphi_j}\overline{\beta}_j) = \cos(\varphi_j)\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_j + \overline{\beta}_j) + \sin(\varphi_j)\frac{i}{\sqrt{2}}(\beta_j - \overline{\beta}_j)$ $\square$

Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition (Selbstadjungierte Endomorphismen)

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes $(V, \langle ., . \rangle)$.

- *Ein Endomorphismus $F^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ heißt zu F adjungiert, falls*
  $$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^{ad}(w) \rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$
- *Existiert F^{ad}, so nennt man F normal, wenn $F^{ad} \circ F = F \circ F^{ad}$. Speziell nennt man F selbstadjungiert, wenn $F = F^{ad}$.*

(Wir untersuchen jetzt die Diagonalisierbarkeit im Fall $F = F^{ad}$, könnten allerdings auch allgemeiner normale Endomorphismen betrachten.)

Satz

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraums V.

- *Dann existiert höchstens ein zu F adjungierter Endomorphismus F^{ad}.*
- *Ist V endlich-dimensional, so existiert F^{ad}.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\langle .,. \rangle$ nicht entartet ist:
Seien F_1 und F_2 zu F adjungiert. Dann gilt für alle $u, v \in V$, dass

$$\langle u, F_1(v) - F_2(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle - \langle F(u), v \rangle = 0.$$

Damit muss aber gelten, dass $F_1(v) = F_2(v)$ für alle $v \in V$.
Sei nun $\dim(V) = n$, $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthornomal- (bzw. unitäre) Basis und sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ die darstellende Matrix von F bezüglich dieser Basis, d.h.

$$F(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i, \quad \text{oder äquivalent dazu } \langle F(b_j), b_i \rangle = a_{ij}$$

Dann ist F^{ad} gegeben durch die darstellende Matrix $A^\dagger := \overline{A}^{\mathrm{T}}$, denn

$$\langle b_j, F^{ad}(b_i) \rangle = \langle b_j, \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik} b_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \langle b_j, b_k \rangle = a_{ij},$$

und damit $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F^{ad}(v) \rangle$. $\square$

Symmetrische und Hermitesche Matrizen

Folgerung (aus dem Satz)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und A die darstellende Matrix eines Endomorphismus F bezüglich einer ONB. Dann ist die darstellende Matrix von F^{ad} gegeben durch $A^\dagger$ und es gilt

$$F \text{ selbstadjungiert} \iff A = A^\dagger.$$

Beispiel

Insbesondere gilt für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Euklidischen Skalarprodukt bzw. für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt, dass $A^{ad} = A^{\mathrm{T}}$ bzw. $A^{ad} = A^\dagger = \overline{A}^{\mathrm{T}}$.
Matrizen mit $A = A^{\mathrm{T}}$ (und ebenso die zugehörenden Endomorphismen) heißen symmetrisch. Analog verwendet man (über $\mathbb{C}$) den Begriff Hermitesch, wenn $A = A^\dagger$.

Kern und Bild von adjungierten Endomorphismen

Erinnerung:

$$\begin{aligned} \ker(F) &= \{v \in V \mid F(v) = 0\} \\ \operatorname{im}(F^{ad}) &= \{F^{ad}(w) \mid w \in V\} \end{aligned}$$

Satz

Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes V. Dann gilt

$$\begin{aligned} \ker(F) &= (\operatorname{im}(F^{ad}))^{\perp} \\ \ker(F^{ad}) &= (\operatorname{im}(F))^{\perp} \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der definierenden Gleichung

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^{ad}(w)\rangle, \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

□

Normalform selbstadjungierter Endomorphismen

Satz (Normalform selbstadjungierter Endomorphismen)

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und $F \in End(V)$ selbstadjungiert.

(i) *Die Eigenwerte von F sind reell.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von F stehen senkrecht aufeinander.*

(iii) *Falls $\dim V < \infty$, so besitzt V eine orthonormale bzw. unitäre Basis bestehend aus Eigenvektoren von F.*

Beweis.

(i) Aus $Fv = \lambda v$ und $\|v\| = 1$, folgt $\lambda = \langle Fv, v\rangle = \langle v, Fv\rangle = \overline{\lambda}$.

(ii) v, w seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Fv, w\rangle = \langle v, Fw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

mit $\lambda \neq \mu$, dass $\langle v, w\rangle = 0$.

Weiter im Beweis:

(iii) Es genügt zu zeigen, dass F einen Eigenvektor v besitzt. F erhält dann das orthogonale Komplement $W := v^{\perp}$: für $w \in W$ gilt

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle v, Fw \rangle = \langle Fv, w \rangle = 0.$$

Somit ist wiederum ein Induktionsbeweis nach der Dimension von V möglich.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle λ. Im Fall V komplex und hermitesch liefert das die Existenz eines Eigenwertes und eines Eigenvektors.

Im Fall V reell und Euklidisch fixieren wir eine ONB und identifizieren V mit $\mathbb{R}^n$. Wir können dann F auffassen als selbstadjungierten Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$, aber auch von $\mathbb{C}^n$. Beide haben dasselbe charakteristische Polynom, welches nach (i) reelle Nullstellen hat und daher in reelle Linearfaktoren zerfällt.

Also hat F auch im Fall eines reellen Vektorraumes V einen Eigenvektor $v \in V$.

$\square$

Dualisierung

Satz

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer (oder Hermitescher) Vektorraum. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen (bzw. der Hermiteschen Formen) auf V ist isomorph zum $\mathbb{R}$-Vektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen von V.

Beweis. Der Isomorphismus ist gegeben durch die Beziehung

$$\beta(u, v) := \langle F(u), v \rangle, \quad \forall\ u, v \in V.$$

zwischen einem selbstadjungierten Endomorphismus F und einer symmetrischen/Hermiteschen Form β (ÜA). $\square$

Folgerung

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und h eine Hermitesche Form auf V.

(i) *Dann existiert eine Basis von V, bezüglich derer die darstellende Matrix von h folgende Gestalt hat:*

$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0})$$

mit $r_+ + r_- + r_0 = n$ und $0_{r_0} \in Mat_{r_0}(\mathbb{C})$ die $r_0 \times r_0$-Nullmatrix.

(ii) *Die Zahlen r_+ und r_- hängen nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. (i) Wähle ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.
Dann entspricht der Hermiteschen Form h ein selbstadjungierter Endomorphismus F. Dieser kann in Normalform gebracht werden mit reellen Eigenwerten λ_i und einer unitären Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ aus Eigenvektoren von F.
Es gebe r_+ positive und r_- negative Eigenwerte. Dann ist $\dim(\ker(F)) = n - r_+ - r_-$.

Für $\lambda_i \neq 0$ setze $\tilde{u}_i := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} u_i$. Dann ist für $\lambda_i \neq 0$

$$h(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = \langle F\tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \langle u_i, u_j \rangle = \pm 1 \delta_{i,j}$$

und die Basis hat die gewünschte Eigenschaft.
Beweis von (ii): Aus

$$V_0 = \ker F = \{v | h(v, w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in V\}$$

folgt die Unabhängigkeit von $r_0 = \dim V_0$ von allen Wahlen.
Um zu zeigen, dass etwa r_+ unabhängig von allen Wahlen ist, zeigen wir

$$r_+ = \max\{\dim W \mid W \subseteq V, h \text{ auf } W \text{ positiv-definit}\}.$$

Dazu sei V_+ bzw. V_- die Summe der Eigenräume zu den positiven bzw. negativen Eigenwerten.
h ist auf V_+ positiv definit und auf dem Komplement $V_- \oplus V_0$ negativ semi-definit, d.h. $h(v, v) \leq 0$ für alle $v \in V_- \oplus V_0$.
Sei $W \subseteq V$ ein UR, auf dem h positiv definit ist.
Dann gilt $W \cap (V_- \oplus V_0) = 0$ und somit $\dim W \leq r_+$. $\square$

Hauptachsentransformation

Folgerung (Hauptachsentransformation)

Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V.

(i) *Dann existiert eine orthogonale Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von V, bezüglich derer die darstellende Matrix von β folgende Gestalt hat:*

$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0}).$$

(Die Ursprungsgeraden $\mathbb{R}b_i$ heißen Hauptachsen von β.)

(ii) *Die Zahlen r_+, r_- und r_0 hängen nicht von der Wahl der Basis ab.*

Beweis. Analog zum Beweis des vorhergehenden Satzes. □

Aussage (i) ist bekannt als Satz von der Hauptachsentransformation, (ii) als Trägheitssatz von Sylvester.

Beispiele

1) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischen Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$.
Dann ist $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, v \rangle = 1\}$ gleich dem Kreis mit Radius 1.
2) Nun betrachten wir die symmetrische Bilinearform

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 5xx' + 5yy' + 3xy' + 3yx'.$$

Bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird die Bilinearform durch die Matrix

$$F := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

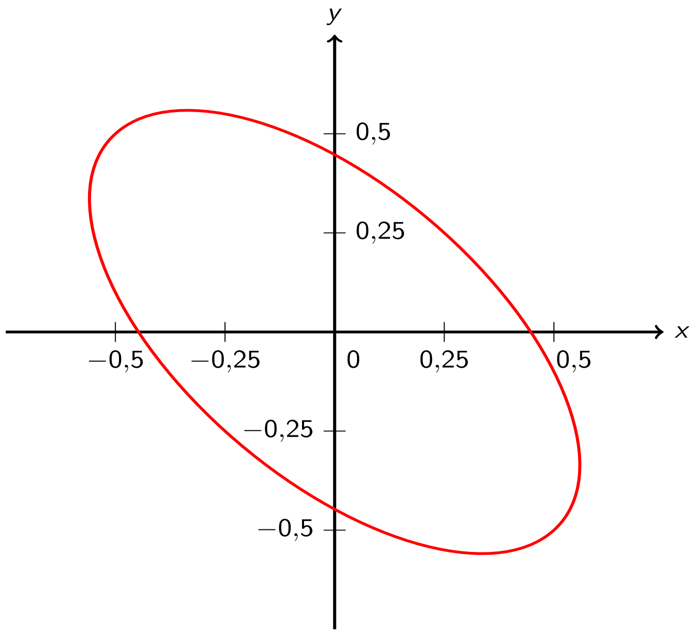
beschrieben. Deren charakteristisches Polynom $P_F(T) = t^2 - 10t + 16$ hat die beiden verschiedenen Eigenwerte $8, 2$ mit normierten orthogonalen Eigenvektoren $u_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ und $u_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$. Für die orthogonale Basis $b_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2)$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} u_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ gilt $\beta(b_i, b_j) = \delta_{ij}$.

Ellipse

Insbesondere sind die Hauptachsen von β die Diagonalen $y = x$ und $y = -x$. Das sind genau die Hauptachsen der Ellipse

$$E = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \beta(v, v) = 1 \right\} \text{ mit}$$

$$\beta(v, v) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy = \left(\frac{x+y}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{1}\right)^2.$$



Kapitel 16

Abgeschlossenheit, Vollständigkeit, Gleichmäßige Konvergenz

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Die Teilmenge $B_r(x) := \{y \in X | d(y, x) < r\}$ heißt (offene) Kugel (oder Ball) vom Radius r und Mittelpunkt x.*
- *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x) \subseteq U$.*
- *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.*

Bemerkung/ÜA

- Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen.
- Beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind wieder abgeschlossen.
- Endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.
- Endliche Vereinigungen abg. Mengen sind abgeschlossen.
- X und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

Inneres, Abschluss und Rand

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$.

(i) *Das Innere von A ist definiert als die offene Teilmenge*

$$\mathring{A} := \bigcup_{B \subseteq A \text{ offen}} B$$

(ii) *Der Abschluss von A ist definiert als die abgeschlossene Teilmenge*

$$\overline{A} := \bigcap_{B \supseteq A \text{ abgeschl.}} B$$

(iii) *$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$ heißt Rand von A.*

Das Innere $\mathring{A}$ ist also die größte offene Teilmenge, der Abschluss $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge.

Beispiel/ ÜA:

Der Abschluss der offenen Kugel $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ im Euklidischen Raum ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(y,x) \leq r\}.$$

Der Rand der Kugel ist die Sphäre vom Radius r:
$\partial B_r(x) = S_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | d(y,x) = r\}$.

Stetige Abbildungen

Satz

Für eine Abbildung $F: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen sind äquivalent:

(i) *F ist stetig*

(ii) *Urbilder $F^{-1}(U)$ aller offenen Mengen $U \subseteq Y$ sind offen.*

(iii) *Urbilder $F^{-1}(A)$ aller abgeschlossenen Mengen A sind abgeschlossen.*

Beweis. Wir beweisen nur die Äquivalenz von (i) und (ii):
$(ii) \Rightarrow (i)$:
Sei $x_n \to x$ eine konvergente Folge in X. Sei $\epsilon > 0$. Betrachte die offene Kugel $B_\varepsilon(F(x)) \subseteq Y$. Ihr Urbild ist nach Voraussetzung offen, d.h. wir finden ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subseteq F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$ in X.
Da $x_n \to x \in X$, finden wir ein $N = N(\epsilon)$ mit $x_n \in B_\delta(x)$ für alle $n > N$.
Damit ist aber

$$F(x_n) \in F(F^{-1}(B_\varepsilon(F(x))) \subseteq B_\varepsilon(F(x)) \text{ für alle } n > N.$$

Das heißt aber $F(x_n) \to F(x)$. Also ist F stetig.

Weiter im Beweis:$(i) \Rightarrow (ii)$:

Angenommen, es existiert eine offene Menge $V \subseteq Y$, so dass die Menge $F^{-1}(V) \subseteq X$ nicht offen ist.
Es gibt dann $x \in F^{-1}(V)$, so dass $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq F^{-1}(V)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei also x_n eine Folge mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus F^{-1}(V)$.
Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ und wegen der Stetigkeit gilt auch $F(x_n) \to F(x)$.
Da $V \subseteq Y$ offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(F(x)) \subseteq V$ und

$$F(x_n) \in B_\delta(F(x)) \subseteq V \quad \text{für alle } n > N.$$

Das steht aber im Widerspruch zu $x_n \notin F^{-1}(V)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz (Abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume)

Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes X sind äquivalent:

(i) *A ist abgeschlossen*

(ii) *Wenn ein $x \in X$ Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen von A ist, so gilt $x \in A$.*

Beweis.

($\Rightarrow$) Sei $x_k \in A$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X$.
Wenn $x \notin A$, so läge x in der offenen Teilmenge $U = X \setminus A$.
Das widerspricht aber der Konvergenz der Folge $x_k \in A$ gegen x.

($\Leftarrow$) Sei $x \in X \setminus A$. Wir zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subseteq X \setminus A$.
Denn andernfalls gäbe es eine Folge $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$.
Da diese Folge gegen x konvergiert, folgt nach Annahme $x \in A$, im Widerspruch zu $x \in X \setminus A$.

□

Folgerung

Sei X metrischer Raum. Sei A eine Teilmenge (versehen mit der Metrik, die durch die Einschränkung der Metrik von X gegeben ist). Dann:

(i) *Ist A vollständig, so ist A abgeschlossen in X.*

(ii) *Ist X vollständig und A abgeschlossen, so ist A auch vollständig.*

Beweis.

(i) Sei $x_k \in A$ konvergent mit Grenzwert $x \in X$.

Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge und somit $x \in A$, da A als vollständiger metrischer Raum vorausgesetzt wurde.

(ii) Sei $x_k \in A$ eine Cauchy-Folge. Da X als vollständig vorausgesetzt wurde, konvergiert (x_k) gegen $x \in X$. Da A abgeschlossen sein soll, ist aber nach dem vorgehenden Satz $x \in A$.

$\square$

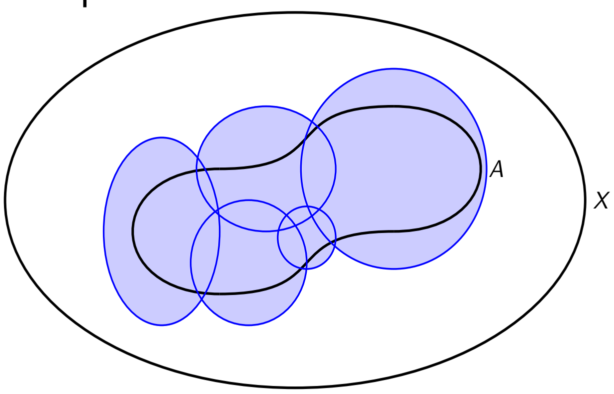
Kompakte Mengen

Definition (Kompaktheit)

Sei X ein metrischer Raum.

- *Eine (offene) Überdeckung einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ (offener) Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit $A \subseteq \cup_{i\in I} U_i$.*
- *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k})$, $i_1, \dots, i_k \in I$, gibt.*

Kompaktheit ist also eine Endlichkeitseigenschaft des metrischen Raumes



Satz

Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge. Dann hat jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.

Beweis.
Sei $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in A.

Wenn die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat, dann gibt es zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung U_a, die nur endlich viele Glieder der Folge x_k enthält.

$(U_a)_{a\in A}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge A und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_r}$.

Nach Konstruktion enthält $\cup_{i=1}^r U_{a_i} \supseteq A$ nur endlich viele Glieder der Folge, im Widerspruch zur Annahme $x_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Folgerung

Jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes X ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.

Beweis. Cauchyfolgen konvergieren genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzen. Nach dem vorhergehenden Satz ist dies aber der Fall. Also ist A vollständig. Da der Grenzwert in A liegt, ist A abgeschlossen.

Die Beschränktheit von A bedeutet, dass es $x \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $A \subseteq B_R(x)$.
Wähle ein $x \in X$. Dann ist $(B_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X und somit von A.
Da A als kompakt vorausgesetzt wurde, existiert eine endliche Teilüberdeckung $B_{k_1}(x), \dots, B_{k_r}(x)$
und mit $R = \max\{k_1, \dots, k_r\}$ erhalten wir $A \subseteq B_R(x)$. □

Satz

X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ A kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.

Dann ist $(X \setminus A, (U_i)_{i \in I})$ eine offene Überdeckung des Kompaktums X.

Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(X \setminus A, U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ von X.

Insbesondere ist $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ eine endliche Teilüberdeckung von A. $\square$

Folgerung

Sei X ein metrischer Raum, in dem die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x)$ kompakt sind.

Die kompakten Teilmengen von X sind dann genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen.

Satz (Satz von Heine-Borel)

Im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Euklidischen Metrik, (und in jedem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum) gilt: Eine Teilmenge A ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis. Aufgrund der vorangegangenen Folgerung genügt es zu zeigen, dass die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt sind.

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, können wir z.B. die Maximumsnorm zu Grunde legen.

Außerdem können wir $x = 0$ (Translationsinvarianz des Abstands) und $r = 1$ (Homogenität) annehmen, d.h. es reicht aus, zu zeigen, dass $\overline{B}_r(x) = \overline{B}_1(0) = [-1, 1]^n =: W$ kompakt ist.

Sei also $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des Würfels $W =: W_0$.

Wir nehmen an, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Weiter im Beweis:
Wir konstruieren durch sukzessive Halbierung der Kantenlängen eine Folge von Würfeln W_k mit Kantenlänge 2^{1-k} und mit der Eigenschaft, dass W_k nicht durch endlich viele der U_i überdeckt wird. Dabei ist $W_0 = [-1, 1]^n$.

Halbierung der Kanten führt zu einer Zerlegung des Würfels W_k in 2^n Teilwürfel, von denen mindestens einer nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann (sonst könnte man W_k durch endlich viele U_i überdecken); diesen wählen wir als W_{k+1}.

Sei (x_k) eine beliebige Folge mit $x_k \in W_k$. Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge.

Wegen der Abgeschlossenheit von W_i gilt $x = \lim_{k\to\infty} x_k \in W_i$, denn $x_k \in W_i$ für alle $k \geq i$.

Daraus folgt $x \in \cap_i W_i \subseteq W$.

Da W von den offenen Mengen U_i überdeckt wird, existiert ein i_0 mit $x \in U_{i_o}$ und somit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_o}$, wenn $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt ist.

Daraus ergibt sich $W_k \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_o}$, wenn $2^{1-k} < \varepsilon$. Ein Widerspruch! (Hierbei haben wir benutzt, dass $\|x - y\|_{max} \leq 2^{1-k}$ für alle $y \in W_k$.) □

Satz
Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subseteq X$ sei kompakt. Dann ist das Bild $F(A) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $F(A)$. Dann bilden die Urbilder $V_i := F^{-1}(U_i)$ eine offene Überdeckung des Kompaktums A. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ und deren Bilder $(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ überdecken dann das Bild $F(A)$. □

Folgerung
Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und X kompakt.

Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum in X an.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen. □

Satz

Jede stetige Abbildung $F\colon X \to Y$ von einem kompakten metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y ist gleichmäßig stetig,

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt

$$d(F(x), F(x')) < \varepsilon \quad \textit{falls} \quad d(x, x') < \delta$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von F existiert für jedes $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$, so dass

$$d(F(x), F(x')) < \frac{\varepsilon}{2},$$

für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta(x)$.

Abgeschlossenheit, Vollständigkeit, Gleichmäßige Konvergenz | Offene Mengen, abgeschlossene Mengen, kompakte Mengen

Weiter im Beweis:

Da die offenen Kugeln $U_x := B_{\delta(x)/2}(x)$ das Kompaktum X überdecken, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^k U_{x_i}$.

Seien nun $x, x' \in X$ mit

$$d(x, x') < \delta := \min_{i=1,\ldots,k} \delta(x_i)/2.$$

Dann gibt es x_i mit $x \in U_{x_i}$, d.h. $d(x, x_i) < \delta(x_i)/2$, und somit $d(x', x_i) \leq d(x', x) + d(x, x_i) < \delta(x_i)/2 + \delta(x_i)/2 = \delta(x_i)$.

Daraus ergibt sich

$$d(F(x), F(x_i)) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad d(F(x'), F(x_i)) < \varepsilon/2$$

und somit nach der Dreieicksungleichung

$$d(F(x), F(x')) \leq d(F(x), F(x_i)) + d(F(x_i), F(x')) < \varepsilon \;.$$

$\square$

Vollständigkeit, Banachräume, Hilberträume

Definition (Vollständigkeit metrischer Räume)

Erinnerung: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Eine Folge $x_n \in X$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

- *Der metrische Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert.*

Definition

- *Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum, der (bezüglich der zur Norm gehörenden Metrik) vollständig ist.*
- *Ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum ist ein Euklidischer bzw. Hermitescher Vektorraum, der (bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik) vollständig ist.*

Bemerkungen/Beispiele

1. Wieder gilt: Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente* Normen auf V definierten Metriken. Dann ist $x_n \in V$ eine Cauchyfolge bzgl. d_1 genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. d_2 ist.
2. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ folgt, dass $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{max})$ ein Banachraum ist: Ist $x_n \in \mathbb{K}^n$ eine Cauchyfolge, so auch alle ihre Komponenten.
3. Mittels Wahl einer Basis, folgt daraus: Jeder endlichdimensionale normierte reelle oder komplexe Vektorraum ist ein Banachraum.
4. Damit sind auch endlichdimensionale Euklidische und Hermitesche Vektorräume Hilberträume.
   Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen und $\mathbb{C}^n$ mit dem Hermiteschen Skalarprodukt ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum.
5. Unendlich-dimensionale Hilberträume spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik.

Beipiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum: Quadratisch summierbare Folgen

Satz

Der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt (ÜA!)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis. $(\ell^2, \langle .,.\rangle)$ ist ein Hermitescher Vektorraum (siehe ÜA).
Wir beweisen die Vollständigkeit von ℓ^2: Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots)$ eine Cauchy-Folge in ℓ^2.

Dann ist jede der Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert daher gegen einen komplexen Grenzwert $x_n := \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$.
Behauptung: Dann gilt: $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.
Da $(x^{(k)})$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$$

für alle $p, q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$.
Grenzübergang $p \to \infty$ in der *endlichen* Summe liefert:

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n - x_n^{(q)}|^2 \leq \varepsilon^2$$

für alle $q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. $\|x - x^{(q)}\| \leq \varepsilon$. $\square$

Banachscher Fixpunktsatz

Den Banachschen Fixpunktsatz werden wir in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzen. Wir werden ihn dann auf bestimmte Banachräume von Funktionen anwenden, um die Existenz der Lösung einer Differentialgleichung zu zeigen.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F\colon X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es existiert $0 \leq \theta < 1$, so dass

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Dann existiert ein Fixpunkt von F, d.h. ein $x \in X$ mit $F(x) = x$. Dieser Fixpunkt ist eindeutig bestimmt.

Des Weiteren konvergiert für alle Anfangswerte $x_0 \in X$ die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ rekursiv definierte Folge (x_k) gegen diesen Fixpunkt.

Beweis. 1) Existiert ein Fixpunkt, so ist er eindeutig bestimmt.
Denn seien $x, y \in X$ Fixpunkte, $F(x) = x$ und $F(y) = y$, dann gilt

$$0 \leq d(x, y) \;=\; d(F(x), F(y)) \;\leq\; \theta d(x, y).$$

Wegen $\theta < 1$ folgt $d(x, y) = 0$, also $x = y$.
2) Die Folge (x_k) ist für jeden Startpunkt x_0 eine Cauchyfolge, denn es gilt, mit $C := d(x_1, x_0)$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) = \;& d(F(x_{n+k-1}), F(x_{n-1})) \;\leq\; \theta d(x_{n+k-1}, x_{n-1}) \;\leq\; \dots \\ \leq \theta^n d(x_k, x_0) \;& \leq \theta^n \textstyle\sum_{l=0}^{k-1} d(x_{l+1}, x_l) \leq \theta^n \sum_{l=0}^{k-1} \theta^l \cdot C \leq \frac{C\theta^n}{1-\theta} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Da (X, d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $x \in X$.
Dieser ist aber auch der Fixpunkt von F, denn wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} d(F(x), x) &\leq d(F(x), x_k) + d(x_k, x) \\ &\leq \theta d(x, x_{k-1}) + d(x_k, x) \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Somit ist $d(F(x), x) = 0$, d.h. $F(x) = x$. $\square$

Banachscher Fixpunktsatz: Anwendungsbeispiel

Beispiel aus dem 1. Semester: Berechnung von $\sqrt{2}$

Sei $X := [1, \infty)$ der mit der Euklidischen Metrik versehene vollständige metrische Raum.
Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon X \ni x \quad \mapsto \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \in X.$$

Diese Abbildung ist kontrahierend, denn

$$F(x) - F(y) \;=\; \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)(x-y)$$

impliziert wegen $xy \geq 1$ dass $\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$.
Somit hat F einen Fixpunkt, nämlich $\sqrt{2}$.

Beschränkte Operatoren

Wir betrachten jetzt noch lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen. Keinesfalls alle dieser Abbildungen (Operatoren) sind stetig.

Definition

Seien $(V_1, \|.\|_1)$ und $(V_2, \|.\|_2)$ zwei normierte Vektorräume.
Eine lineare Abbildung $F\colon V_1 \to V_2$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\|F(u)\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \text{für alle} \quad u \in V_1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sup_{0 \neq u \in V_1} \frac{\|Fu\|_2}{\|u\|_1} < \infty.$$

Die Zahl

$$\|F\| := \sup_{0 \neq u \in V_1} \frac{\|Fu\|_2}{\|u\|_1} = \sup_{x \in V_1 \text{ mit } \|x\|_1 = 1} \|Fx\|_2$$

heißt Operatornorm der linearen Abbildung F.

Bemerkungen/ÜA

- Durch die Operatornorm wird der Vektorraum

$$L_b(V_1, V_2) := \{F \in L(V_1, V_2) | \quad \|F\| < \infty\}$$

der beschränkten Operatoren zu einem normierten Vektorraum.
- Insbesondere ist $V' := L_b(V, \mathbb{K})$ ein normierter Vektorraum für jeden normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Hierbei ist $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ durch den üblichen Betrag normiert.
- Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen reellen oder komplexen Vektorräumen sind beschränkt.
- Ist V_1 unendlich-dimensional, so gilt dies nicht: Sei $V_1 = V_2 = C^\infty([0,1])$ versehen mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, und sei $F = (.)'$ der Ableitungsoperator. Dann gilt für $f_n(x) := x^n$ dass $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|F(f_n)\|_\infty = \|nx^{n-1}\|_\infty = n$.

Abgeschlossenheit, Vollständigkeit, Gleichmäßige Konvergenz | Beschränkte Operatoren

Satz

Eine lineare Abbildung $F\colon V_1 \to V_2$ zwischen normierten Vektorräumen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Ist F stetig, so ist F auch in $0 \in V_1$ stetig. Insbesondere zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|Fv\|_2 < 1, \text{ falls } \|v\|_1 < \delta.$$

Sei nun $u \in V_1 \setminus \{0\}$. Für $v := \frac{\delta}{2\|u\|_1} u$ gilt dann, dass $\|v\|_1 < \delta$, und somit

$$\|F(u)\|_2 = \frac{2\|u\|_1}{\delta} \|F(v)\|_2 < \frac{2\|u\|_1}{\delta}.$$

Damit ist die stetige lineare Abbildung F beschränkt.

Ist andererseits F beschränkt, d.h. $\|F(u)\|_2 \leq C\|u\|_1$ für alle $u \in V_1$, so gilt

$$\|F(u) - F(u_n)\|_2 = \|F(u - u_n)\|_2 \leq C\|u - u_n\|_1.$$

Somit konvergiert $F(u_n) \to F(u)$ in V_2, falls $u_n \to u$ in V_1. $\square$

Orthogonalprojektion auf vollständige Unterräume

Satz

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und $U \subseteq V$ ein vollständiger Unterraum.

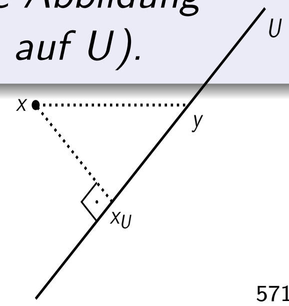
(i) *Dann existiert zu jedem $x \in V$ genau ein $x_U \in U$ mit kleinstem Abstand zu x, d.h.*

$$\|x - x_U\| \leq \|x - y\| \quad \textit{für alle} \quad y \in U.$$

(ii) *Das Element $x_U \in U$ ist durch $x - x_U \in U^\perp$ eindeutig charakterisiert.*

(iii) *Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.*

(iv) *Die Zuordnung $x \mapsto x_U$ definiert eine stetige lineare Abbildung $P\colon V \to U$ (die sogenannte orthogonale Projektion auf U).*



Beweis. (i) Sei $y_n \in U$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d := \inf_{y \in U} \|x - y\|$.
(y_n) ist eine Cauchy-Folge, denn wegen der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2 \\
&\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \overset{(m,n\to\infty)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Aufgrund der Vollständigkeit des Unterraums U konvergiert (y_n) in U, $x_U := \lim_{n\to\infty} y_n \in U$, und $\|x - x_U\| = d$, wegen der Stetigkeit der Norm.
Aus $x_U, x_U' \in U$ mit $\|x_U - x\| = \|x_U' - x\| = d$ folgt wie oben

$$\begin{aligned}
\|x_U - x_U'\|^2 &= 2\|x_U - x\|^2 + 2\|x_U' - x\|^2 - \|x_U + x_U' - 2x\|^2 \\
&= 4d^2 - \|x_U + x_U' - 2x\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Das beweist die Eindeutigkeit von x_U mit $\|x_U - x\| = d$.

Weiter im Beweis:

(ii) Für alle $y \in U$, $t \in \mathbb{R}$ gilt mit $z := x - x_U$:

$$d^2 = \|z\|^2 \le \|z + ty\|^2 = d^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle z, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$

Das ist nur möglich, wenn $\mathrm{Re}\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in U$.
Durch Substitution $t \rightsquigarrow it$ zeigt man $\mathrm{Im}\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in U$. Es folgt $z = x - x_U \perp U$.
Umgekehrt folgt für $u \in U$ mit $z := x - u \perp U$ für alle $y \in U$:

$$\|z + y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \ge \|z\|^2 \ ,$$

d.h. $u = x_U$.

(iii) In (i-ii) haben wir gezeigt, dass jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = x_U + (x - x_U)$ besitzt mit $x_U \in U$ und $x - x_U \in U^\perp$. Das beweist $V = U \oplus U^\perp$.

(iv) Die Linearität der Abbildung $P\colon x \mapsto x_U$ folgt aus der Charakterisierung (ii). Aus der Orthogonalität der Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ folgt $\|x_U\| \le \|x\|$ und somit die Stetigkeit von P. $\square$

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen zwischen diesen. Man sagt f_n konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_\varepsilon, \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Sei $Y = \mathbb{C}$, und sei für geeignetes f

$$\|f\|_X := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$$

die Supremumsnorm von f bezüglich X, dann konvergiert eine Folge f_n von Abbildungen $X \to \mathbb{C}$ genau dann gleichmäßig gegen $f\colon X \to \mathbb{C}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0.$$

Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Abbildungen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion f stetig.

Beweis. Wir zeigen, dass f in einem beliebig fixierten $x_0 \in X$ stetig ist.
Sei also $\varepsilon > 0$.
Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n_\varepsilon > 0$ mit

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon, \quad \text{für alle } \ x \in X.$$

Da außerdem auch f_{n_ε} in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } \ x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt dann wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & d_Y(f(x), f(x_0)) \\ \leq \quad & d_Y(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x_0), f(x_0)) \\ < \quad & \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist die Grenzfunktion f stetig in x_0. $\square$

Bemerkung: Punktweise versus gleichmäßige Konvergenz

- Eine Folge (f_n) von Abbildungen konvergiert punktweise gegen eine Abbildung f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes $x \in X$.
- Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
- Aber: Sei f_n eine Folge *stetiger* Abbildungen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergieren. Dann muss die Grenzfunktion f nicht unbedingt stetig sein.
  Beispiel: Sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen die Funktion
  $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1), \\ 1, & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$
  die in $x = 1$ nicht stetig ist.

Bemerkung: Vertauschung von Limes und Integral

- Eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt
  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$
  Denn: f ist stetig und
  $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\|f - f_n\|_{[a,b]} \to 0.$
- Ist $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert, dann gilt die obige Gleichheit im allgemeinen nicht.
  Beispiel / Übung: Man betrachte, für $n \geq 2$, $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \max\{n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0\}$.

Der Raum stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen

Seien X und Y zwei metrische Räume und bezeichne

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \textit{ stetig } \}$$

die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.
Ist X kompakt, dann definiert

$$d_\infty(f,g) := \max_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

eine Metrik auf dem Abbildungsraum $C(X,Y)$, die Maximumsmetrik.

Satz

Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $(C(X,Y), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge in $C(X,Y)$ eine stetige Grenzfunktion hat.
Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $C(X,Y)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n,m \geq N_\varepsilon.$$

D.h. aber, dass für jedes $x \in X$ die Folge $f_n(x)$ eine Cauchyfolge im vollständigen metrischen Raum Y ist und daher für jedes $x \in X$ einen Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ hat.
Da die Metrik d_Y stetig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f(x)) &= d_Y(f_n(x), \lim_{m\to\infty} f_m(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für jedes $x \in X$ und jedes $n \geq N_\varepsilon$. D.h. f_n konvergiert gleichmäßig gegen f. Aufgrund des vorherigen Satzes ist die Grenzfunktion f stetig. $\square$

Separabilität, Orthonormale Familien

Wir ergänzen einige Konzepte für die Theorie von Banach- oder Hilberträumen. Zunächst behandeln wir sie allgemein, bevor wir (später) mit den Fourier-Reihen ein wichtiges Beispiel für diese Konzepte sehen (allerdings ohne den entsprechenden Hilbertraum im Rahmen der aktuellen Vorlesung schon einzuführen).

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- *Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt dicht in X, falls ihr Abschluss gleich X ist, d.h. $\overline{Y} = X$.*
  Äquivalent dazu ist: für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $y \in Y$ mit $d(x, y) < \varepsilon$.
- *(X, d) heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.*

Beispiel

Für jedes n ist $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$;
jeder endlich-dimensionale reelle oder komplexe Vektorraum ist daher separabel.

Bemerkung

Der Hilbertraum ℓ^2 ist separabel, denn:
Die Folgen $x \in \ell^2$ mit $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ bilden eine abzählbare dichte Teilmenge S, d.h. jedes Element $x \in \ell^2$ ist Grenzwert einer Folge $x_k \in S$.

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform oder Hermitesche Form auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt orthonormale Familie, wenn $\langle u,u\rangle = 1$ und $\langle u,v\rangle = 0$ für alle $u,v \in U$ mit $u \neq v$.

Satz

Sei V ein separabler Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum.

Dann ist jede orthonormale Familie $(v_i)_{i\in I}$ abzählbar.

Beweis.
Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine orthonormale Familie. Für alle $i,j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\|v_i - v_j\| = \sqrt{2}$.

Sei $A \subseteq V$ eine abzählbare dichte Teilmenge.

Zu jedem $i \in I$ existiert ein Element $a(i) \in A$ mit $\|v_i - a(i)\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wir zeigen, dass die Zuordnung $I \to A, i \mapsto a(i)$, injektiv ist:

$$\begin{aligned}\|a(i) - a(j)\| &= \|v_i - v_j + a(i) - v_i + v_j - a(j)\| \\ &\geq \|v_i - v_j\| - \|a(i) - v_i\| - \|v_j - a(j)\| > 0\end{aligned}$$

für alle $i,j \in I$ mit $i \neq j$. □

Satz (Besselsche Ungleichung)

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum und $(v_1, v_2, \ldots)$ eine (endliche oder abzählbar unendliche) orthonormale Familie.

Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\sum_k |\langle x, v_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ist V vollständig, so besitzt die Reihe $\sum_k \langle x, v_k\rangle v_k$ in V einen Grenzwert x_∞ und

$$x_\infty = x \iff \sum_k |\langle x, v_k\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Beweis. Wir betrachten für $N \in \mathbb{N}$ den endlich-dimensionalen (und somit vollständigen) Unterraum

$$U_N := \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subseteq V.$$

Sei $x_N \in U_N$ die Orthogonalprojektion von x auf den Unterraum U_N.
Es gilt $x_N = \sum_{k=1}^{N} \langle x, v_k \rangle v_k$, denn $x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, v_k \rangle v_k \perp U_N$.
Aus der orthogonalen Zerlegung $x = x_N + (x - x_N)$ folgt dann

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, v_k \rangle|^2 = \|x_N\|^2 \leq \|x_N\|^2 + \|x - x_N\|^2 = \|x\|^2.$$

Daraus folgt die Besselsche Ungleichung und die absolute Konvergenz der Reihe $x_\infty := \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ mit Werten in V.
Für x_∞ gilt $x_\infty \perp x - x_\infty$ und wegen $\|x\|^2 = \|x_\infty\|^2 + \|x - x_\infty\|^2$

$$\|x_\infty\|^2 = \|x\|^2 \iff \|x - x_\infty\|^2 = 0 \iff x = x_\infty.$$

□

Definition

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum.

Eine abzählbare orthonormale Familie $(v_1, v_2, \dots)$ heißt Hilbertbasis, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung als Reihe $x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ besitzt.

Beispiele

(i) Falls $\dim V < \infty$, so sind Hilbertbasen nichts anderes als unitäre bzw. orthonormale Basen.

(ii) Sei $V = \ell^2$ der Hilbertraum der quadratisch summierbaren Folgen $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Die Folgen $e_j \in \ell^2$ mit $e_j(k) := \delta_{jk}$ $(j, k \in \mathbb{N})$ bilden eine Hilbertbasis $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$, die sogenannte kanonische Hilbertbasis von ℓ^2.

$(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist keine Vektorraumbasis, denn die lineare Hülle der e_j ist

$$\{x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid x_k := x(k) = 0 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\} \subsetneq \ell^2.$$

(Bei der linearen Hülle sind nur endliche Linearkombinationen zugelassen!)

Satz

Für eine abzählbare orthonormale Familie $B = (b_1, b_2, \dots)$ von Vektoren eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathrm{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ *ist dicht in* V.

(ii) B *ist eine Hilbertbasis.*

(iii) *Für alle* $x, y \in V$ *gilt*

$$\langle x, y\rangle = \sum_k \langle x, b_k\rangle \overline{\langle y, b_k\rangle}.$$

(iv) *Für alle* $x \in V$ *gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, b_k\rangle|^2.$$

Beweis.

(i) $\Rightarrow$(ii):
Zu $x \in V$ existiert eine Folge $x_i \in \mathrm{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ mit $x = \lim_{i\to\infty} x_i$.
Wir wählen N_i so, dass

$$x_i \in U_i := \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_{N_i}\},$$

wobei wir N_i jeweils so groß wählen können, dass $N_i \in \mathbb{N}$ sogar eine monoton wachsende Folge ist.
Für die orthogonale Projektion $x_i' = \sum_{k=1}^{N_i} \langle x, b_k\rangle b_k$ von x in U_i gilt

$$\|x - x_i'\| \leq \|x - x_i\| \qquad \text{da } x_i \in U_i$$

und somit

$$x = \lim_{i\to\infty} x_i' = \sum_k \langle x, b_k\rangle b_k.$$

Weiter im Beweis:

(ii)⇒(iii):
Wenn $B = (b_1, b_2, \ldots)$ eine Hilbertbasis ist, so können wir $x, y \in V$ schreiben als Reihen

$$x = \sum_i x_i b_i, \quad y = \sum_j y_j b_j,$$

wobei $x_i := \langle x, b_i \rangle$, $y_j := \langle y, b_j \rangle$.
Daraus folgt wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle \sum_i x_i b_i, y \rangle = \sum_i x_i \langle b_i, y \rangle \\ \langle b_i, y \rangle &= \langle b_i, \sum_j y_j b_j \rangle = \sum_j \overline{y}_j \langle b_i, b_j \rangle = \overline{y}_i \end{aligned}$$

und somit

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \overline{y}_i.$$

Abgeschlossenheit, Vollständigkeit, Gleichmäßige Konvergenz Orthonormale Familien

Weiter im Beweis:

(iii)⇒(iv): Setze $x = y$.

(iv)⇒(i): Aus der Parsevalschen Gleichung folgt (nach dem Satz über die Besselsche Ungleichung), dass $x = \sum_k \langle x, b_k \rangle b_k$ für alle $x \in V$.
Damit gilt (i).

$\square$

Satz (Darstellungssatz von Riesz)

Sei V ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ und V' der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$.

Dann ist durch

$$\phi(x) := \langle \cdot, x \rangle, \quad x \in V,$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume $\phi \colon V \to V'$ gegeben.

Beweis.
Es ist klar, dass ϕ konjugiert-linear ist, denn das Hermitesche Skalarprodukt ist konjugiert-linear im zweiten Argument.
Die Stetigkeit der Linearform $\phi(x) \colon V \to \mathbb{K}$ ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\phi(x)(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle} \quad y \in V.$$

Daraus folgt $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

Weiter im Beweis:

$$|\phi(x)(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle} \quad y \in V.$$

Daraus folgt $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$. Für $y = x$ erhalten wir Gleichheit: $\|\phi(x)\| = \|x\|$. Da ϕ die Norm erhält, ist ϕ injektiv.
Es bleibt noch die Surjektivität von ϕ zu zeigen.
Sei dazu $0 \neq \alpha \in V'$. Wähle $v \in V$ mit $\alpha(v) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von α ist $U := \ker \alpha \subseteq V$ abgeschlossen und daher vollständig im Hilbertraum V. Zerlege $V = U \oplus U^\perp$.
Sei $v_U \in U$ die Orthogonalprojektion von v in U. Wir setzen $x_0 := v - v_U \in U^\perp$.
Dann gilt $\alpha(x_0) = \alpha(v) - \alpha(v_U) = \alpha(v) = 1$ und für alle $y \in V$ ist daher

$$y = \underbrace{(y - \alpha(y)x_0)}_{\in \ker \alpha = U} + \alpha(y)x_0 \in U \oplus U^\perp.$$

Somit $\langle y, x_0 \rangle = \alpha(y)\|x_0\|^2$ und daher $\alpha = \phi(\frac{x_0}{\|x_0\|^2})$. $\square$

Kapitel 17

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Definition

Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige Funktion f heißt periodisch mit Periode $L > 0$, wenn

$$f(x+L) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

- Es ist dann auch $f(x + nL) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- Hat die Funktion f die Periode L, so hat

$$F(x) := f(\frac{L}{2\pi}x)$$

die Periode 2π.

Wir beschränken uns auf solche Funktionen. Sei V der Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die $f|_{[0,2\pi]}$ Riemann-integrierbar ist.

Betrachte auf dem Vektorraum V der 2π-periodischen auf $[0, 2\pi]$ integrablen Funktionen die Hermitesche Form

$$(*) \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in V.$$

(Vgl. auch MfP I: Integrierbarkeit von Produkten).
Die hermitesche Form $(*)$ ist positiv semi-definit, d.h. $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in V$. Auf dem Unterraum der stetigen Funktionen ist sie positiv definit und somit ein Skalarprodukt. Wir schreiben $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ (auch im semi-definiten Fall). Auf demselben Unterraum können wir auch die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$ betrachten. Aus MfP I wissen wir:

Satz

Die Funktionen $e_k(x) := \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein orthonormales System bezüglich der Hermiteschen Form $(*)$.

Die $e_k(x), k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Hilbertbasis des Hilbertraums der L^2-Funktionen auf $[0, 2\pi]$, den wir später noch einführen werden.

Definition

Ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ ist eine Linearkombination

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad \gamma_k \in \mathbb{C}.$$

Es gilt $p \in V$ und $\quad \gamma_k = \langle p, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x)e^{-ikx}dx.$

Definition

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist. Die komplexe Zahl

$$c_k := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

heißt k-ter Fourier-Koeffizient und das trigonometrische Polynom $F_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ heißt n-tes Fourier-Polynom von f.
Die Reihe $(F_n(f))_{n=0,1,\ldots}$, also die Folge der Partialsummen, heißt Fourier-Reihe von f.

Bemerkung.
Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Wenn f reellwertig ist, dann ist $c_{-k} = \overline{c}_k$ und auch die Fourierreihe $F_n(f)$ ist reellwertig.

Ähnlich wie bei einer Taylorreihe ist nicht garantiert, dass die Fourierreihe einer Funktion f konvergiert und dass sie im Fall der Konvergenz gegen f konvergiert.
Wenn aber $f \in V$ sich in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e_k$$

mit einer gleichmäßig konvergenten Reihe darstellen lässt, muss diese Reihe die Fourierreihe sein, denn man kann Integration und Limesbildung bei gleichmäßiger Konvergenz vertauschen und findet für den Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_k &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e_m) e_{-k} dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \gamma_m e_{m-k} dx = \gamma_k \end{aligned}$$

Im Allgemeinen konvergiert aber die Fourierreihe von f weder gleichmäßig noch punktweise gegen f. Ein anderer Konvergenzbegriff auf V ist angemessen.

Hilfssatz

Die Funktion $f \in V$ habe das n-te Fourier-Polynom $F_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$.
Dann gilt: $\|f - F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$.

Beweis. Wir finden
$\langle f, F_n(f)\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \langle f, e_k\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$
und
$\langle F_n(f), F_n(f)\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$
Somit

$$\begin{aligned}
\|f - F_n(f)\|_2^2 &= \langle f, f\rangle - \langle f, F_n(f)\rangle - \langle F_n(f), f\rangle + \langle F_n(f), F_n(f)\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \textstyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2
\end{aligned}$$

□

Satz (Fourier-Polynome und Besselsche Ungleichung)

(i) *Das Fourierpolynom $F_n(f)$ ist die beste Approximation im quadratischen Mittel an $f \in V$ durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$, d.h. $\|f - F_n(f)\|_2 = \inf_{g \in V_n} \|f - g\|_2$, wobei $V_n := \mathrm{span}\{e_k \mid -n \leq k \leq n\}$.*

(ii) *Für die Fourier-Koeffizienten c_k von $f \in V$ gilt die Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0.$$

Beweis. Seien c_k die Fourierkoeffizienten von f.
Um (i) zu zeigen, berechnen wir für beliebiges $g := \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \in V_n$:

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} (\overline{d}_k c_k + d_k \overline{c_k}) + \sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \|F_n(f) - g\|_2^2. \end{aligned}$$

Dies wird minimal für $g = F_n(f)$. (ii) folgt nun aus dem vorangegangenen Hilfssatz: für alle f gilt

$$\sum_k |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt wegen $\|f - F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ genau wenn $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$. □

Wir wollen nun zeigen, dass für $f \in V$ in der Besselschen Ungleichung Gleichheit gilt (Parsevalsche Gleichung).

Satz (Konvergenz der Fourier-Reihe im quadratischen Mittel)

Sei V der Vektorraum der 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist.

(i) *Für alle $f \in V$ gilt*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

(ii) *Die Fourier-Reihe von $f \in V$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.* $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$.

Zum Beweis: Aus dem vorhergehenden Satz wissen wir, dass (i) und (ii) äquivalent sind. Es genügt also, (ii) zu zeigen.

Ein Beispiel vorweg

Wir betrachten $\sigma \in V$ mit $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sigma(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0 < x < 2\pi, \quad \sigma(0) = 0 \ .$$

Wir finden $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(x)dx = 0$ und für $k \neq 0$ ist $c_k = \frac{1}{2ik}$.
Die Fourierreihe lautet also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ikx}}{k} - \frac{e^{-ikx}}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \ .$$

Aus der Konvergenz im quadratischen Mittel folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma(x)|^2 = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Lemma über Treppenfunktionen

Sei $f \in V$ so, dass $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist.
Dann konvergiert die Fourier-Reihe $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Weiter im Beweis des Satzes:

$f|_{[0,2\pi]}$ ist als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass f reellwertig ist und $|f| \leq 1$.

Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$. Für $0 \leq x \leq 2$ gilt $x^2 \leq 2x$.
Für $(\psi - \varphi)^2 \leq 2(\psi - \varphi)$ folgt daraus

$$\|f - \varphi\|_2^2 \leq \|\psi - \varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und somit $\|f - \varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Wegen des Lemmas über Treppenfunktionen existiert für die Treppenfunktion φ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.
Mit $g := f - \varphi$ gilt $\|g - F_n(g)\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und somit
$\|f - F_n(f)\|_2 \leq \|g - F_n(g)\|_2 + \|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \varepsilon$. $\square$

Beweis des Lemmas über Treppenfunktionen:

Wir können annehmen, dass wir es mit der Treppenfunktion f mit $f|_{(0,a)} = 1$ und $f|_{(a,2\pi)} = 0$ zu tun haben, denn jede Treppenfunktion lässt sich als Linearkombination solcher Funktionen darstellen.

Als Fourier-Koeffizienten erhalten wir $c_0 = \frac{a}{2\pi}$ und

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikx}dx = \frac{i}{2\pi k}e^{-ikx}\Big|_0^a, \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 0.$$

Mit $|c_k|^2 = \frac{1-\cos ka}{2\pi^2 k^2}$ $(k \neq 0)$ erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k^2}.$$

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe der für alle $x \in [0, 2\pi]$ gültigen Formel

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

erhalten wir für $x = 0$
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und somit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}((\frac{a-\pi}{2})^2 - \frac{\pi^2}{12}) = \frac{a}{2\pi} = \|f\|_2^2.$$

Also konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen die Treppenfunktion f.

Es bleibt der Beweis der Identität (*) nachzutragen.

Wir behaupten:

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in (0, 2\pi).$$

Darf man $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{x-\pi}{2}$ gliedweise integrieren, so erhält man

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} + c,$$

und durch weitere gliedweise Integration und weil F periodisch ist

$$0 = \int_0^{2\pi} F(x)dx = \left.\frac{(x-\pi)^3}{12}\right|_0^{2\pi} + 2\pi c = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c,$$

also $c = -\frac{\pi^2}{12}$, und damit gilt die Behauptung $(*)$.

Weiter im Beweis von $(*)$:

Um die gliedweise Integration zu rechtfertigen, stellen wir zuerst fest, dass die Reihe $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.
Man muss außerdem die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ gegen $\frac{\pi - x}{2}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ von $(0, 2\pi)$ zeigen.
[Dazu schätzen wir zunächst $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$ ab:

$$|s_n(x)| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} \leq \frac{1}{\sin \delta/2}.$$

Weiter im Beweis: Aus $|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\delta/2} =: \sigma$ erhalten wir weiter

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m} s_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s_m(x)}{m+1} - \frac{s_{n-1}(x)}{n}\right|$$

$$\leq \sigma\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2\sigma}{n}.$$

Also $\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{2\sigma}{n}$, woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe folgt.]

Es bleibt noch die Identität $(**)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ zu zeigen.

Zum Beweis von $(**)$:

Es gilt $\frac{\sin kx}{k} = \int_{\pi}^{x} \cos kt\, dt$ und

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{ikt} + e^{-ikt}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{-int}(1 - e^{i(2n+1)t})}{2(1 - e^{it})} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Lemma

Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt mit $r \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{|r|\to\infty} \int_a^b f(x) \sin rx\, dx = 0.$$

Beweis. partielle Integration. □

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe des Lemmas erhalten wir schließlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt - \frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi - x}{2}.$$

$\square$

Bemerkung

Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass die Folgen c_k, c_{-k} quadratisch summierbare komplexe Zahlenfolgen sind, d.h. Elemente von ℓ^2.
Aus der Parsevalschen Gleichung folgt die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $e_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Anders als bei der Taylorreihe können auch periodische Funktionen dargestellt werden, die nur stückweise stetig differenzierbar sind.

Satz (Fourierentwicklung)

Sei $f \in V$ stetig und stückweise C^1, d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 2\pi$, so dass $f_k := f|_{[t_{k-1},t_k]}$ von der Klasse C^1 ist, $k = 1, \dots, r$.

Dann konvergiert die Fourierreihe $F_n(f)$ gleichmäßig gegen f.

Beweis.

Sei φ die periodische Funktion, die durch $\varphi|_{[t_{k-1},t_k)} = f_k'$ definiert wird.

Die Fourier-Koeffizienten c_n von f ergeben sich durch partielle Integration aus den Fourier-Koeffizienten γ_n von φ:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)e^{-inx}dx = \frac{i}{n}f(x)e^{-inx}\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{i}{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x)e^{-inx}dx.$$

Wegen der Periodizität von f erhält man daraus $c_n = -\frac{i}{n}\gamma_n$ $(n \neq 0)$.

Weiter im Beweis:

Wegen der allgemeinen Ungleichung $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ folgt nun

$$|c_n| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |\gamma_n|^2).$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$ (Besselsche Ungleichung) ist $\sum |c_n|$ (von x unabhängige) absolut konvergente Majorante der Fourier-Reihe, und daraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe $F_n(f)$ gegen eine stetige Grenzfunktion g.

Andererseits konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Das ist nur möglich, wenn $f = g$, denn beide Funktionen sind stetig. $\square$

Kapitel 18

Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Differentialrechung mehrerer Veränderlicher

Richtungsableitung

Erinnerung:

Eine Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert $\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)}{t}$ existiert.

Die Ableitung $\tilde{f}'(0)$ an der Stelle 0 ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)}{t} .$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor.

(i) *Eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in U$ in Richtung v differenzierbar, wenn die Funktion*

$$\tilde{f}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + tv),$$

an der Stelle $t = 0$ differenzierbar ist.

Hierbei ist $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $x + tv \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(ii) *Die Zahl*

$$(\partial_v f)(x) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x + tv) = \tilde{f}'(0)$$

heißt Ableitung von f an der Stelle x in Richtung v oder auch Richtungsableitung.

[Animation für die Richtungsableitung]

Rechenregeln für die Richtungsableitung

Satz

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_v(f + g)(x) &= \partial_v(f)(x) + \partial_v(g)(x) \\ \partial_v(\lambda f)(x) &= \lambda \partial_v(f)(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \partial_v(f \cdot g)(x) &= \partial_v(f)(x)g(x) + f(x)\partial_v(g)(x). \end{aligned}$$

Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x in Richtung v differenzierbar, und es gilt:

$$\partial_v\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\partial_v(f)(x)g(x) - f(x)\partial_v(g)(x)}{g(x)^2}.$$

Der **Beweis** folgt aus den Rechenregeln für die differenzierbaren reellen Funktionen in einer Variablen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(t) := f(x + tv)$, $\tilde{g}(t) = g(x + tv)$. □

Partielle Ableitungen

Definition

Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$.

- *Die Funktion f heißt an der Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar, wenn f an der Stelle x in alle Koordinatenrichtungen e_i differenzierbar ist.*
- *Die Zahl*
$$(\partial_i f)(x) := (\partial_{e_i} f)(x), \quad i = 1, 2, \dots n,$$
heißt i-te partielle Ableitung von f an der Stelle x.
- *f heißt partiell differenzierbar, wenn f in allen Punkten $x \in U$ partiell differenzierbar ist.*
- *Die Funktion $\partial_i f: U \to \mathbb{R}$ heißt i-te partielle Ableitung von f.*
Man schreibt dafür auch
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Bemerkung

Die i-te partielle Ableitung $(\partial_i f)(x)$ an der Stelle $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ist genau die Ableitung der Funktion $h(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ an der Stelle $t = x_i$:

$$\begin{aligned}(\partial_i f)(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= h'(x_i).\end{aligned}$$

Beim Berechnen der i-ten partiellen Ableitung sind also die Variablen x_j für $j \neq i$ als Konstanten zu behandeln. Differenziert wird nach der Variablen x_i.

Beispiel

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, ist partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\|x\|^2) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^n x_j^2 = 2x_i.$$

Beispiel

Partielle Differenzierbarkeit impliziert im Allgemeinen nicht die Stetigkeit!

Gegenbeispiel: Wir betrachten

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist nicht stetig in $(0,0)$: Betrachten wir etwa $x = ay^2$, so ist $\lim_{y\to 0} f(ay^2, y) = a/(a^2+1)$.
Aber alle Richtungsableitungen existieren in $p_0 = (0,0)$:
Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In $p_0 = (0,0)$ gilt dann für $t \neq 0$:

$$\frac{f(p_0+tv) - f(p_0)}{t} = \frac{f(tv)}{t} = \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}$$

$$\stackrel{t\to 0}{\to} \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & v_1 \neq 0 \\ 0, & v_1 = 0 \end{cases}$$

Vektorfelder

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i) *Eine Abbildung* $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ *heißt im Punkt $x \in U$ partiell differenzierbar, wenn ihre Komponentenfunktionen F_i, $i = 1, 2, \ldots m$, in x partiell differenzierbar sind.*

(ii) *Ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $v \colon U \to \mathbb{R}^n$. Ein stetiges Vektorfeld auf U ist entsprechend eine stetige Abbildung $v \colon U \to \mathbb{R}^n$. Man denkt sich an jeden Punkt $x \in U$ den Vektor $v(x)$ angeheftet. [Animation.] (Oft werden wir später nur noch stetige Vektorfelder betrachten.)*

Der Gradient einer Funktion

Definition (Gradient)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar. Der Spaltenvektor $\operatorname{grad} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \partial_2 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$ *heißt Gradient von f an der Stelle x. [Animation]*

Bemerkungen

Somit ist $\operatorname{grad} f$ ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Die Rechenregeln für die Richtungsableitungen implizieren Rechenregeln für den Gradienten. Z.B. ist grad additiv und für zwei in x partiell differenzierbare Funktionen gilt als Folge der Leibnizregel

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot (\operatorname{grad} g)(x) + g(x) \cdot (\operatorname{grad} f)(x).$$

Definition (Divergenz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für ein in $x \in U$ partiell differenzierbares Vektorfeld $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Divergenz an der Stelle x gegeben durch

$$\operatorname{div} v(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i v_i(x).$$

[Animation zur Divergenz.]

Das Newtonsche Gravitationsfeld

Ist $r = r(x) := \|x\|$ die Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist die rotationssymmetrische Funktion $g = f \circ r$ auf $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar.
Die partiellen Ableitungen erhält man mittels der Kettenregel:

$$\partial_i g(x) = f'(r)\partial_i r \text{ mit}$$
$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{r^2} = \frac{1}{2r}\partial_i \|x\|^2 = \frac{x_i}{r}.$$

Das Newtonsche Gravitationsfeld

Wir erhalten daher $\operatorname{grad} r(x) = \frac{x}{r}$ und für $f(r(x))$ den Gradienten

$$f'(r)\operatorname{grad} r(x) = f'(r)\frac{x}{r},$$

Sei jetzt $n = 3$ und $f(r) = -G\frac{M}{r}$ auf $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (das Newtonpotential). Wir erhalten durch

$$-\operatorname{grad} f(r(x)) = -G\frac{M}{r^2}\frac{x}{r}, \qquad \text{für} \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

das Newtonsche Gravitationsfeld.
Die Divergenz dieses Feldes ist für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gleich Null (Übg bzw. Verweis auf später).

Das Newtonsche Gravitationsfeld

Die auf eine Probemasse m im Punkt x wirkende Kraft wird beschrieben durch das Vektorfeld

$$F = -G\tfrac{mM}{r^2}\tfrac{x}{r}.$$

Beschreibt $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ die Bewegung der Probemasse im Gravitationsfeld, so genügt diese nach dem Newtonschen Gesetz $F = m\ddot{x}$ der (von $m \neq 0$ unabhängigen) Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -GM\frac{x}{r^3}.$$

Höhere partielle Ableitungen

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$.

(i) *Für $k \geq 2$ definiert man rekursiv:*
f heißt einmal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist.
f heißt k-mal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $\partial_i f$ $(k$-$1)$-mal partiell differenzierbar sind.

(ii) *f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle k-ten partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}} := \partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k} f$$

stetig sind.

Lemma von Schwarz

Satz (Hermann Amandus Schwarz)

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig differenzierbar.
Dann gilt für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Beweis. Da es nur um zwei Koordinatenrichtungen e_i und e_j geht, können wir annehmen, dass $n = 2$.

Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_0, y_0) \in U$.

Wir können, gegebenenfalls nach Verschiebung, annehmen, dass $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und dass die offene Menge U ein Quadrat $Q = \{(x, y) | \, |x| < \varepsilon \text{ und } |y| < \varepsilon\}$ enthält für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.

Differentialrechung mehrerer Veränderlicher | Höhere partielle Ableitungen

Weiter im Beweis:
Für festes $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ betrachte die Funktion $g_y(x) := f(x, y) - f(x, 0)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem x ein $\xi \in (-|x|, |x|)$ mit

$$(1) \quad g_y(x) - g_y(0) = x g_y'(\xi) = x(\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0)).$$

Halte dieses ξ fest. Die erneute Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$ liefert ein $\eta \in (-|y|, |y|)$ mit

$$(2) \quad \partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0) = y \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich die Existenz von ξ, η mit $|\xi| \le |x|$, $|\eta| \le |y|$ und

$$(3) \quad g_y(x) - g_y(0) = xy \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta).$$

Analog finden wir für die Funktion $h_x(y) := f(x, y) - f(0, y)$ Werte $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ mit

$$(3') \qquad h_x(y) - h_x(0) = xy \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

und $|\tilde{\xi}| < |x|$ und $|\tilde{\eta}| < |y|$.

Weiter im Beweis:
Aus (3) und (3') erhalten wir wegen
$g_y(x) - g_y(0) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = h_x(y) - h_x(0)$:

$$(4) \quad \partial_2\partial_1 f(\xi,\eta) = \partial_1\partial_2 f(\tilde{\xi},\tilde{\eta}).$$

Die Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen erlaubt nun den Grenzübergang $(x,y) \to (0,0)$ in (4), woraus sich $\partial_2\partial_1 f(0,0) = \partial_1\partial_2 f(0,0)$ ergibt. $\square$

Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^m$.

(i) *Die Funktion F heißt im Punkt $x \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$\lim_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \xi \to 0} \frac{\|F(x+\xi) - F(x) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

(ii) *Die Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar, wenn F in allen Punkten $x \in U$ differenzierbar ist.*

Bemerkung:

Wir könnten in der Definition ohne weiteres $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ durch beliebige Banachräume ersetzen. Dann fordert man, dass die lineare Abbildung A stetig ist.

Satz (und Definition Differential)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $x \in U$. Dann wird durch

$$\lim_{\xi \to 0} (\|F(x+\xi) - F(x) - A(\xi)\| / \|\xi\|) = 0$$

die lineare Abbildung

$$dF_x := A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

eindeutig bestimmt. Sie heißt Differential (oder Ableitung) von F im Punkt x. Wir identifizieren oft dF_x mit ihrer beschreibenden Matrix.

Beweis der Eindeutigkeit von A:
Seien A und B zwei lineare Abbildungen mit der geforderten Eigenschaft. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für die Norm erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\xi \to 0} \frac{\|B(\xi) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &\leq \lim_{\xi \to 0} \frac{\|F(x+\xi) - F(x) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi \to 0} \frac{\|-F(x+\xi) + F(x) + B(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man nun $\xi = t\eta$ für $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\eta\| = 1$ so erhält man daraus wegen der Linearität von A und B, dass

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{|t|}(B(\eta) - A(\eta)) = B(\eta) - A(\eta)\,.$$

Hieraus folgt wegen der Linearität $A(\eta) = B(\eta)$ für alle η und somit $A = B$. $\square$

Beispiel

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$, ist überall differenzierbar, denn wegen

$$f(x+\xi) = \|x\|^2 + 2\langle x, \xi\rangle + \|\xi\|^2 = f(x) + 2\langle x, \xi\rangle + \|\xi\|^2$$

gilt

$$\frac{f(x+\xi) - f(x) - 2\langle x, \xi\rangle}{\|\xi\|} = \frac{\|\xi\|^2}{\|\xi\|} = \|\xi\| \to_{\xi\to 0} 0.$$

Das Differential $df_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ ist also gegeben durch die Linearform:

$$df_x(\xi) = 2\langle x, \xi\rangle = 2x^{\mathrm{T}}\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also $df_x = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$.

Jacobi-Matrix (Matrix der Ableitungen)

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar. Dann existiert für jede Komponente F_j mit $j = 1, \ldots, m$ von F die Richtungsableitung $\partial_v F_j(x)$ für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und es gilt

$$\partial_v F_j(x) = (dF_j)_x(v).$$

Insbesondere sind alle Komponentenfunktionen F_j in x partiell differenzierbar, d.h. F ist in x partiell differenzierbar. Weiterhin gilt:

$$dF_x = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & \cdots & \partial_n F_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m(x) & \cdots & \partial_n F_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{grad} F_1(x))^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\mathrm{grad} F_m(x))^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch Jacobi-Matrix

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ und $F = \sum_{j=1}^m F_j e_j$.
Da F differenzierbar ist, sind alle Komponentenfunktionen F_j als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. D.h. es gilt für jede Komponente F_j

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0} \frac{|F_j(x+tv) - F_j(x) - (dF_j)_x(tv)|}{|t|\|v\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{F_j(x+tv) - F_j(x)}{t} - (dF_j)_x(v) \right|, \end{aligned}$$

d.h. $(dF_j)_x(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F_j(x+tv) = \partial_v F_j(x)$.
Damit erhält man für $v = e_i$ die i-te partielle Ableitung $\partial_i F_j(x) = (dF_j)_x(e_i)$.
Dies gilt für jede Komponente F_j und somit

$$dF_x(e_i) = \begin{pmatrix} \partial_i F_1(x) \\ \vdots \\ \partial_i F_m(x) \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } dF_x.$$

Dies beweist die Formel für die Ableitungsmatrix. $\square$

Folgerung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = df_x v = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle.$$

Die Jacobi-Matrix von f ist gegeben durch die Linearform

$$\begin{aligned} df = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{T}} \quad : \quad & U \to (\mathbb{R}^n)^*, \\ & x \mapsto df_x. \end{aligned}$$

Beispiel

Für die Koordinatenfunktionen $f(x) = x_i$ haben wir $\mathrm{grad}(x_i) = e_i$ und somit die Linearformen $dx_i = \langle e_i, \cdot \rangle$. Man schreibt daher für jede differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ auch

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f \; dx_i.$$

Bemerkung

Aus der Folgerung erhalten wir auch eine Charakterisierung des Gradienten $\operatorname{grad} f(x)$ als eindeutig bestimmter Vektor, der im Sinne des Darstellungssatzes von Riesz die Linearform df_x darstellt.
Diese Charakterisierung ermöglicht es, den Gradienten allgemeiner auch zu definieren, wenn nicht $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt betrachtet wird.

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F = \sum_{j=1}^m F_j e_j \colon U \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ total differenzierbar. Dann ist F in x stetig.

Beweis. Sei $x_n := x + \xi_n$ mit $\xi_n \to 0$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist wegen der Dreiecksungleichung

$$\|F(x_n) - F(x)\| \leq \underbrace{\frac{\|F(x_n) - F(x) - dF_x(\xi_n)\|}{\|\xi_n\|}}_{\to 0,\text{ da } f \text{ diffb.}} \underbrace{\|\xi_n\|}_{\to 0} + \|dF_x(\xi_n)\|.$$

Nun ist aber $dF_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und damit stetig, d.h. auch $\|dF_x(\xi_n)\| \to_{\xi_n \to 0} 0$. Also $\|F(x_n) - F(x)\| \to 0$. □

Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F = \sum_{j=1}^m F_j e_j \colon U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen $\partial_i F_j$ seien an der Stelle $x \in U$ stetig.
Dann ist F in x total differenzierbar.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $m = 1$.
Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Wähle $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in B_\varepsilon(0)$.
Für $i = 1, \dots, n$ betrachten wir die reellen Funktionen einer Variablen

$$\begin{aligned} g_1(t) &:= F(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ g_i(t) &:= F(x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots x_n) \\ &\vdots \\ g_n(t) &:= F(x_1 + \xi_1, \dots, x_{n-1} + \xi_{n-1}, x_n + t) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$g_i'(0) = \partial_i F(x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$$

Weiter im Beweis:
Auf jede dieser Funktionen wenden wir nun den Mittelwertsatz an und erhalten, für $i = 1 \dots n$, Zahlen $\theta_i \in (-|\xi_i|, |\xi_i|)$ mit

$$\begin{aligned} &F(x_1 + \xi_1, \dots, x_i + \xi_i, x_{i+1}, \dots x_n) - F(x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i, \dots x_n) \\ &\qquad = \xi_i \partial_i F(x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + \theta_i, x_{i+1}, \dots x_n) \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} y^{(i)} &:= (x_1 + \xi_1, \dots, x_i + \xi_i, x_{i+1}, \dots x_n), i = 0, \dots, n, \\ z^{(i)} &:= (x_1 + \xi_1, \dots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + \theta_i, x_{i+1}, \dots x_n), i \geq 1, \end{aligned}$$

so erhält man daraus

$$F(x + \xi) - F(x) = \sum_{k=1}^n F(y^{(k)}) - F(y^{(k-1)}) = \sum_{k=1}^n \xi_k \partial_k F(z^{(k)}).$$

Ende des Beweises: Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\frac{|F(x+\xi)-F(x)-\sum_{i=1}^n \partial_i F(x)\xi_i|}{\|\xi\|} &= \frac{|\sum_{i=1}^n(\partial_i F(z^{(i)})-\partial_i F(x))\xi_i|}{\|\xi\|}\\ &\leq \|\sum_{i=1}^n(\partial_i F(z^{(i)})-\partial_i F(x))e_i\|\end{aligned}$$

Für $\xi \to 0$ gilt auch $z^{(i)} \to x$.
Da nun alle partiellen Ableitungen stetig sein sollen, bekommen wir

$$\partial_i F(z^{(i)}) \to_{\xi\to 0} \partial_i F(x),$$

und somit

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{|F(x+\xi)-F(x)-\sum_{i=1}^n \partial_i F(x)\xi_i|}{\|\xi\|} = 0.$$

Damit ist F in x differenzierbar. □

Satz

Sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die in x differenzierbar ist. Dann gilt:

- *Ist $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar, so auch $F+G$ und es gilt*

$$d(F+G)_x = dF_x + dG_x$$

- *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λF in x differenzierbar und es gilt*

$$d(\lambda F)_x = \lambda dF_x$$

- *Ist $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so auch $h\cdot F$ und es gilt*

$$d(h\cdot F)_x = F(x)\cdot dh_x + h(x)dF_x.$$

- *Ist $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $g(x)\neq 0$, so ist $\frac{1}{g}F$ in x differenzierbar, und es gilt:*

$$d\left(\frac{1}{g}F\right)_x = \frac{1}{g(x)^2}\left(g(x)dF_x - F(x)\cdot dg_x\right).$$

Satz (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subseteq V$ und $G\colon V \to \mathbb{R}^k$. Wenn F in x und G in $y = F(x)$ differenzierbar sind, dann ist die Verkettung $G \circ F\colon U \to \mathbb{R}^k$ in x differenzierbar und

$$d(G \circ F)_x = dG_y \circ dF_x.$$

Beweis. Für $x \in U$, $y := F(x) \in V$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^m$ hinreichend klein definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &:= F(x+\xi) - F(x) - A\xi, && \text{wobei } A = dF_x, \\ \psi(\eta) &:= G(y+\eta) - G(y) - B\eta, && \text{wobei } B = dG_y, \end{aligned}$$

Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit von F und G, dass

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\eta \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0.$$

Weiter im Beweis:
Für die spezielle Wahl $\eta := F(x+\xi) - y = A\xi + \varphi(\xi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x+\xi) - (G \circ F)(x) &= G(y+\eta) - G(y) \\ &= B\eta + \psi(\eta) \\ &= BA\xi + B\varphi(\xi) + \psi(\eta) \end{aligned}$$

D.h.

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|(G \circ F)(x+\xi) - (G \circ F)(x) - BA\xi\|}{\|\xi\|} \leq \lim_{\xi \to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi \to 0} \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|},$$

Nun ist aber wegen der Linearität von B

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{\xi \to 0} \|B\left(\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\right)\| \leq \|B\|_{Op.-Norm} \lim_{\xi \to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

Also bleibt nur noch zu zeigen, dass $\lim_{\xi \to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\xi\|} = 0$.

Ende des Beweises: Dazu bemerkt man, dass $\eta \to 0$ falls $\xi \to 0$, denn wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\|\eta\| \;=\; \|A\xi + \varphi(\xi)\| \;\leq\; \|A\xi\| + \|\varphi(\xi)\| \;\to_{\xi\to 0}\; 0.$$

Somit gilt $\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|} \to_{\xi\to 0} 0$. Aus der der Differenzierbarkeit von G und der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|} &= \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|\eta\|}{\|\xi\|} = \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|A\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &\leq \underbrace{\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}}_{\to_{\xi\to 0}0}\Big(\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} + \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to_{\xi\to 0}0}\Big) \;\to_{\xi\to 0}\; 0,\end{aligned}$$

denn wegen der (stetigen) Linearität von A bleibt $\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} = \|A(\frac{\xi}{\|\xi\|})\|$ beschränkt. $\square$

Folgerung (Kettenregel in Komponenten)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subseteq V$ und $G\colon V \to \mathbb{R}^k$, $H := G \circ F\colon U \to \mathbb{R}^k$. Es sei F in x und G in $y = F(x)$ differenzierbar. Dann ist $H = G \circ F$ in x differenzierbar und für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ und $l = 1, \ldots k$ gilt:

$$\partial_i H_l(x) = \sum_{j=1}^{m} \partial_j G_l(y)\partial_i F_j(x)\ .$$

In anderer Notation, mit den Einträgen der Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial H_l}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G_l}{\partial y_j}(y)\ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x).$$

Beispiele

In den folgenden Beispielen betrachten wir Abbildungen des Vektorraumes der $n \times n$-Matrizen $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

(i) Sei $F\colon Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(A) = \det(A)$. Dann gilt für das Differential in $\mathbf{1}_n$

$$dF_{\mathbf{1}_n}(A) = d\ \det_{\mathbf{1}_n}(A) = spur(A);$$

denn nach der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} dF_{\mathbf{1}_n}(A) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(\delta_{1\sigma(1)} + ta_{1\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (\delta_{n\sigma(n)} + ta_{n\sigma(n)}) \\ &= a_{11} + \ldots + a_{nn}. \end{aligned}$$

Differentialrechung mehrerer Veränderlicher | Rechenregeln und Kettenregel für das Differential

Beispiele

(ii) Nun sei $F\colon Mat_n(\mathbb{R}) \to Mat_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) = A^2$ und $G\colon Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $G(A) = \mathrm{spur} A$.
F und G sind auf $Mat_n(\mathbb{R})$ differenzierbar mit

$$dF_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left[(A + tB)^2\right] = AB + BA,$$

und

$$dG_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0} [\mathrm{spur}(A + tB)] = \mathrm{spur} B,$$

für $A, B \in Mat_n, (\mathbb{R})$.
Somit ist $G \circ F\colon A \mapsto \mathrm{spur}(A^2)$ differenzierbar und

$$d(G \circ F)_A B = dG_{F(A)} \circ dF_A(B) = \mathrm{spur}(AB + BA) = 2\mathrm{spur}(AB).$$

Übung

Gegebenen sei eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Abbildung in zwei reellen Variablen x, y. Ohne Einschränkung (um Fallunterscheidungen zu vermeiden) sei sie auf der rechten Halbebene definiert,

$$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y).$$

Schreiben wir $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ und $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$, so können wir f auffassen als eine Funktion von r und φ, die wir mit $F(r,\varphi)$ bezeichnen.
Betrachten wir die (unendlich oft differenzierbare) Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (r,\varphi) \mapsto (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

mit der (unendlich oft differenzierbaren) Umkehrabbildung Ψ definiert auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ durch $\Psi(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$,
so ist also $F(r,\varphi) = f(\Phi(r,\varphi))$.

Dann folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$(\partial_x f) \circ \Phi = (\cos\varphi)\partial_r F - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi F$$

und

$$(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f) \circ \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) F.$$

Definition (Laplace-Operator)

Der Gradient $\operatorname{grad} f$ *einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion* $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist ein partiell differenzierbares Vektorfeld* $U \to \mathbb{R}^n$, *und es definiert*

$$\Delta f := \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$$

eine Funktion $U \to \mathbb{R}$.
Der Differentialoperator Δ *heißt Laplace-Operator.*

Ein weiteres Beispiel zur Kettenregel

Sei $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ $(\varepsilon > 0)$ eine differenzierbare Abbildung, d.h. eine differenzierbare Kurve. Setze $x := c(0)$, $v := c'(0) = (c_1'(0),\ldots,c_n'(0))^{\mathrm{T}}$. Ferner sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine in einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x definierte und in x differenzierbare Funktion.
Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f \circ c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$:

$$(f \circ c)'(0) = df_{c(0)}(c'(0)) = df_x(v) = \partial_v f(x).$$

D.h.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(c(t))) \;=\; \partial_v f(x) \;=\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(x+tv)).$$

Es genügt hier übrigens vorauszusetzen, dass c stetige Abbildung, d.h. eine stetige Kurve ist, die im Nullpunkt differenzierbar ist.

Mittelwertsatz

Satz (Mittelwertsatz für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Seien weiterhin $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t\xi \in U$, für alle $t \in [0,1]$.
Dann existiert ein $x_0 = x + t_0\xi \in U$ mit $t_0 \in (0,1)$, so dass

$$F(x+\xi) - F(x) = dF_{x_0}(\xi).$$

Beweis. Die Aussage ist eine direkte Folge des Mittelwertsatzes für Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t\xi$ und $f = F \circ \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.
Nach dem Mittelwertsatz für f erhalten wir ein $t_0 \in (0,1)$ mit $f(1) - f(0) = f'(t_0)$.
Aus der Kettenregel ergibt sich dann

$$f(1) - f(0) = f'(t_0) \;=\; (F \circ \varphi)'(t_0) \;=\; dF_{x+t_0\xi}(\varphi'(t_0))$$

Für $\varphi(t) = x + t\xi$ ist $\varphi' \equiv \xi$ und damit $F(x+\xi) - F(x) = dF_{x_0}(\xi)$. $\square$

Ist eine Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ konstant, so ist $dF_x = 0$ für alle $x \in U$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (man betrachte eine Vereinigung $U = U_1 \cup U_2$ zweier disjunkter offener Mengen). Allerdings gilt:

Folgerung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist U wegzusammenhängend, d.h. gibt es für je zwei Punkte $x, y \in U$ stets eine stetige Kurve $c\colon [0,1] \to U$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$, so gilt:
Ist $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $dF_x = 0$ für alle $x \in U$, so ist F konstant.

Beweis. Für jedes $\xi \in U$ finde $\varepsilon(\xi) > 0$ so, dass $K_\xi := \overline{B_{\varepsilon(\xi)}(\xi)} \subseteq U$.
Nach dem Mittelwertsatz ist F auf K_ξ konstant, d.h. $F|_{K_\xi} \equiv d_\xi$.
Sei nun c eine stetige Kurve von x nach y. Deren Bild wird überdeckt durch die offenen Kugeln $\{B_{\varepsilon(c(t))}(c(t))\}_{t\in[0,1]}$.
Da das Intervall $[0,1]$ kompakt ist und c stetig, ist auch $c([0,1])$ kompakt. Daher finden wir eine endliche Teilüberdeckung durch offene Kugeln $B_{\varepsilon(c(t_i))}(c(t_i))$ für $i = 1, \dots k$ und $t_1 = 0$, $t_k = 1$. Damit ist aber $F|_{B_\varepsilon(c(t_i))} \equiv d_i$, und somit $F(y) = F(c(t_k)) = \ldots = F(c(t_1)) = F(x)$. □

Niveaumengen und Gradient

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Dann steht $\operatorname{grad} f$ senkrecht auf den Niveaumengen

$$N_f(k) := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = k\} \quad \textit{mit} \quad k \in \mathbb{R},$$

d.h. für jede innerhalb der Niveaumenge $N_f(k)$ verlaufende differenzierbare Kurve $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{grad} f|_{c(t)} \perp c'(t) \quad \textit{für alle} \quad t \in (a,b).$$

Beweis. Das folgt durch Ableiten der Gleichung $f \circ c = k$ nach der Kettenregel

$$0 = df_c \circ c' = \langle \operatorname{grad} f, c' \rangle.$$

□

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Norm, $f(x) = \|x\|$. Die Niveaumengen sind dann Kugeln vom Radius k und der Gradient ist $\mathrm{grad} f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Bemerkung

Wenn $\mathrm{grad}\, f(x) \neq 0$ ist, so gibt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $x \in U$ an, denn für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\partial_v f(x) = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle \leq \|\mathrm{grad}\, f(x)\|$$

mit Gleichheit genau für den Einheitsvektor $v = \frac{\mathrm{grad}\, f(x)}{\|\mathrm{grad}\, f(x)\|}$.

Lokale Extrema

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$.

Man sagt, dass f in x ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum) annimmt, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, derart dass

$$f(x) \geq f(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(\xi)$$

für alle $\xi \in U$ mit $\|x - \xi\| < \varepsilon$.

Lokale Minima und Maxima heißen auch lokale Extrema.

Man spricht von einem isolierten lokalen Extremum, falls zusätzlich $f(\xi) \neq f(x)$ für alle $\xi \in U \setminus \{x\}$ mit $\|x - \xi\| < \varepsilon$ für ein $\epsilon > 0$.

Lokale Extrema und Gradient

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x \in U$ partiell differenzierbar.

Wenn f an der Stelle $x \in U$ ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Beweis. Für alle $i = 1, \ldots, n$ ist die Funktion $t \mapsto g(t) := f(x + te_i)$ im Nullpunkt differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum.

Demnach gilt

$$0 = g'(0) = \partial_i f(x).$$

□

Wiederholung: Taylor-Entwicklung für Funktionen einer Variablen

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
Zu $x \in I$ ist das Taylor-Polynom $T_m(f, x)(\xi) = T_m(\xi) \in \mathbb{R}[\xi]$ gegeben durch

$$T_m(\xi) = f(x) + f'(x)\xi + \frac{1}{2} f''(x)\xi^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)\xi^m.$$

Die folgende Beschreibung des Restglieds verallgemeinert den Mittelwertsatz: es gibt zu jedem ξ mit $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subseteq I$ ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$f(x+\xi) = T_m(f,x)(\xi) + \frac{f^{(m+1)}(x+\tau\xi)}{(m+1)!}\xi^{m+1}.$$

Notation: Multi-Indizes

Um die Taylorentwicklung für Funktionen von n Veränderlichen kompakt schreiben zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein.

Für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$
\begin{aligned}
\alpha &:= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\
|\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \in \mathbb{N} \\
\alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! \in \mathbb{N} \\
x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
\partial^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n}
\end{aligned}
$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Es bezeichne

$$C^k(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

Taylorentwicklung für Funktionen von n Variablen

Satz (Taylorentwicklung)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(U)$, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subseteq U$.

Dann existiert $\tau \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \tau\xi) \xi^\alpha.$$

Definition

$T_m(\xi) := \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$ ist ein Polynom vom (Gesamt-)Grad $\le m$ in den n Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und heißt m-tes Taylorpolynom.

Mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes führen wir den Satz auf den Fall einer Funktion in einer Variablen, also $n = 1$, zurück.

Lemma

Für die $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) := f(x + t\xi)$ gilt für alle $0 \le k \le m+1$:

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Beweis des Satzes: Der Satz folgt nun mit Hilfe des Lemmas aus der Taylorentwicklung der Fuktion g im Nullpunkt: es gibt $0 \le \tau \le 1$ mit

$$\begin{aligned} f(x+\xi) \;=\; g(1) \;&=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{g^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!} \cdot 1^{m+1} \\ &=\; \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+\tau\xi)\xi^\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Beweis des Lemmas: Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir berechnen $g^{(k+1)}(t)$ aus der Induktionsannahme

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \partial^\alpha f(x + t\xi) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi_i$$

und somit mit der Induktionsannahme

$$g^{(k+1)}(t) = k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha \xi_i.$$

Weiter im Beweis: Daraus ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) &= k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \xi_i \\ &= k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\beta|=k+1} \frac{\beta_i}{\beta!} \partial^\beta f(x+t\xi)\xi^\beta \\ &= (k+1)! \sum_{|\beta|=k+1} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta f(x+t\xi)\xi^\beta, \end{aligned}$$

denn $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = |\beta| = k+1$, da $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n)$. □

Damit haben wir das Lemma und somit auch den Satz bewiesen.

Approximation durch das Taylorpolynom

Folgerung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ eine m-mal stetig differenzierbare Funktion und $x \in U$.

Dann existiert $\delta > 0$ und $\varphi: B_\delta(x) \to \mathbb{R}$, so dass $B_\delta(x) \subseteq U$ und

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \varphi(\xi)$$

für alle $\xi \in B_\delta(0)$, wobei

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^m} = 0.$$

Beweis (der Folgerung).

Da U offen ist, existiert $B_\delta(x) \subseteq U$. Aus der Taylorentwicklung der Ordnung $m-1$ folgt für $\xi \in B_\delta(0)$:

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+\tau\xi)\xi^\alpha,$$

für ein $\tau \in [0,1]$.

Wir setzen

$$\varphi(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha f(x+\tau\xi) - \partial^\alpha f(x))\xi^\alpha.$$

Dann gilt $f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha + \varphi(\xi)$ und

$$\lim_{\xi\to 0} \varphi(\xi)/\|\xi\|^m = 0,$$

denn die m-ten partiellen Ableitungen von f sind nach Voraussetzung stetig und für $|\alpha| \le m$ bleibt $\frac{|\xi^\alpha|}{\|\xi\|^m}$ beschränkt. □

Spezialfall:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subseteq U$.

Dann gilt

$$f(x+\xi) = \underbrace{f(x) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x)\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \partial_i\partial_j f(x)\xi_i\xi_j}_{quadratisches\ \ Taylorpolynom} + \varphi(\xi),$$

wobei $\lim_{\xi\to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$.

Hessematrix

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Die nach dem Satz von Schwarz symmetrische Matrix

$$\mathrm{Hess}\, f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,\ldots,n}$$

heißt Hessematrix von f im Punkt x.

Nachtrag zum letzten Beispiel:

Mit der Hessematrix lässt sich die obige Gleichung unter Verwendung des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ nun indexfrei schreiben:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \mathrm{grad}\, f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathrm{Hess}\, f(x)\xi, \xi \rangle + \varphi(\xi)$$

mit $\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$.

Definition

(i) *Eine symmetrische Bilinearform β auf einem reellen Vektorraum V heißt positiv semi-definit, wenn*

$$\beta(v,v) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

(ii) *β heißt negativ definit (bzw. negativ semi-definit), wenn $-\beta$ positiv definit (bzw. positiv semi-definit) ist.*

(iii) *β heißt indefinit, wenn β weder positiv noch negativ semi-definit ist.*

(iv) *Ein symmetrischer Endomorphismus A eines Euklidischen Vektorraums V heißt positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.), wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform*

$$\beta(v,w) = \langle v, Aw \rangle, \quad v,w \in V,$$

positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.) ist.

Hessematrix und lokale Extrema

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(i) *Wenn f an der Stelle $x \in U$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum) hat, dann ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(x)$ ist positiv (bzw. negativ) semi-definit.*

(ii) *Wenn der Gradient von f an der Stelle $x \in U$ verschwindet und*
$\operatorname{Hess} f(x)$ *positiv definit ist, dann hat f in x ein isoliertes lokales Minimum,*
$\operatorname{Hess} f(x)$ *negativ definit ist, dann hat f in x ein isoliertes lokales Maximum,*
$\operatorname{Hess} f(x)$ *indefinit ist, dann hat f in x kein lokales Extremum.*

[Animationen.]

Beweis.

(i) f habe in x z.B. ein lokales Minimum. Wir wissen bereits, dass $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und mit $h(\xi) := \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(x)\xi, \xi\rangle$ gilt

$$f(x) \leq f(x+\xi) = f(x) + h(\xi) + \varphi(\xi).$$

Daraus folgt $0 \leq h(\xi) + \varphi(\xi)$, d.h. $h(\xi) \geq -\varphi(\xi)$ und somit mit $t \in \mathbb{R}^*$:

$$h\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) = \frac{h(\xi)}{\|\xi\|^2} = \frac{h(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \geq -\frac{\varphi(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Das impliziert $h(y) \geq 0$ für alle Einheitsvektoren y, d.h. $h \geq 0$.

(ii) Sei nun umgekehrt $\operatorname{grad} f(x) = 0$ und $h(\xi) > 0$ für alle $\xi \neq 0$.
Dann ist $m := \min_{\|y\|=1} h(y) > 0$.
Weiterhin findet man zu $0 < \varepsilon < m$ ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(\xi)| < \varepsilon\|\xi\|^2$ für alle $0 \neq \xi \in B_\delta(0)$.
Aus der Taylorentwicklung folgt dann für diese ξ:
$f(x+\xi) = f(x) + h(\xi) + \varphi(\xi) > f(x) + m\|\xi\|^2 - \varepsilon\|\xi\|^2 > f(x)$.

□

Kapitel 19

Der Umkehrsatz und seine Anwendungen

Umkehrsatz

Definition (Diffeomorphismen)

Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $f: U \to V$, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist, heißt Diffeomorphismus zwischen U und V.

Satz

Sei $f: U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist für alle $x \in U$ die Ableitung df_x eine invertierbare lineare Abbildung und es gilt

$$(df^{-1})_{f(x)} \;=\; (df_x)^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel:

$$Id_{\mathbb{R}^n} \;=\; d\ Id_x \;=\; d\left(f^{-1} \circ f\right)_x \;=\; df^{-1}_{f(x)} \circ df_x$$

und damit $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$. □

Umkehrsatz

Der Umkehrsatz besagt, dass lokal, d.h. in einer geeignet gewählten Umgebung von x, eine Umkehrabbildung existiert, falls df_x invertierbar ist.

Satz (Umkehrsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so, dass die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subseteq U$ von p und W von $q := f(p)$, so dass $f|_V\colon V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

Beispiele

- Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Für $x > 0$ betrachte $W = \mathbb{R}_+$ und $V = \mathbb{R}_+$ mit $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
  Für $x < 0$ betrachte $W = \mathbb{R}_+$ und $V = \mathbb{R}_-$ mit $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ besitzt eine stetige Umkehrabbildung (da streng monoton wachsend). Diese ist aber nicht differenzierbar in $y = 0 = f(0)$ da $f'(0) = 0$.

Der Beweis des Umkehrsatzes beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz und den folgenden beiden Sätzen. Wir brauchen zunächst:

Definition

Seien V, W normierte Räume und $U \subseteq V$. Eine Funktion $f\colon U \to W$ heißt Lipschitzstetig auf U, wenn es eine Zahl $L \geq 0$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle $x, y \in U$. Jede solche Zahl L heißt eine Lipschitzkonstante für f auf U.

Bemerkungen

- Lipschitzstetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.
- Stetige lineare Funktionen sind Lipschitzstetig.

Satz (Schrankensatz)

Sei $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $K \subseteq U$ eine kompakte Menge, die konvex ist, d.h. für alle $x, y \in K$ liegt auch die Verbindungsstrecke $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ in K. Dann ist f auf K Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L := \max_{x \in K} \|df_x\|_{Operatornorm}$. Es gilt also

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle $x, y \in K$.

Beweis. Da K kompakt ist und $x \mapsto df_x$ und die Operatornorm stetig sind, existiert

$$L = \max_{x \in K} \|df_x\|_{Op.-norm} = \max_{x \in K} \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\|=1} \|df_x(\xi)\|$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert dann für $x, y \in K$ ein $t_0 \in [0,1]$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| = \|df_{t_0x+(1-t_0)y}(y - x)\| \leq L\|y - x\|. \qquad \square$$

Satz (Diffeomorphie)

Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V \to U$. Wenn für jedes $x \in U$ das Differential df_x invertierbar ist, so ist f ein Diffeomorphismus, d.h. f^{-1} ist auch stetig differenzierbar und $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Wir erinnern uns:

$f(x) = x^3$ hat eine stetige, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Die Bedingung df_x invertierbar ist also wesentlich.

Beweis. Wir zeigen die stetige Differenzierbarkeit von f^{-1} in $y = f(x)$.
O.B.d.A. können wir annehmen, dass $x = y = 0$, denn:
Sind $L_1, L_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbare affine Abbildungen, so gilt der Satz für f genau dann, wenn er für $L_1 \circ f \circ L_2$ gilt. Mittels zweier Translationen verschiebt man dann x und y nach 0.
Ferner können wir annehmen, dass $df_x = \mathrm{Id}$, denn setzt man $L := (df_x)^{-1}$, so folgt nach der Kettenregel

$$d(L \circ f)_x = dL_{f(x)} \circ df_x = L \circ df_x = \mathrm{Id}.$$

Weiter im Beweis des Satzes: Sei $y \in V$ und $x := f^{-1}(y) \in U$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x) - f(0) - df_0(x) = f(x) - x \\ \psi(y) &:= f^{-1}(y) - y = x - f(x) = -\varphi(x) = -\varphi(f^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Um die Differenzierbarkeit von f^{-1} zu zeigen, müssen zeigen, dass $\frac{\psi(y)}{\|y\|} \to_{y\to 0} 0$.
Da f stetig differenzierbar ist, gilt $\frac{\varphi(x)}{\|x\|} \to_{x\to 0} 0$.
Daher können wir ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{2}$ für alle $\|x\| < \varepsilon$.
Da f^{-1} stetig ist, finden wir zu diesem ε ein $\delta > 0$, so dass $\|f^{-1}(y)\| \leq \varepsilon$ für alle $\|y\| < \delta$. Somit gilt für alle y mit $\|y\| < \delta$, dass

$$\|\psi(y)\| = \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{2}\|f^{-1}(y)\|, \qquad (*)$$

und daher wegen der Dreiecksungleichung

$$\|f^{-1}(y)\| \leq \|f^{-1}(y) - y\| + \|y\| = \|\psi(y)\| + \|y\| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\|f^{-1}(y)\| + \|y\|.$$

Ende des Beweises: Also haben wir für alle y mit $\|y\| < \delta$, dass

$$\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$$

und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|f^{-1}(y)\|}{\|y\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}.$$

Aus $y \to 0$ folgt nun, wegen der Stetigkeit von f^{-1}, dass auch $x = f^{-1}(y) \to 0$ und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \to_{y\to 0} 0.$$

Damit ist f^{-1} differenzierbar in y und mit $df_y^{-1} = (df_x)^{-1}$ erhalten wir auch die Stetigkeit von df^{-1}. $\square$

Jetzt beweisen wir den Umkehrsatz:

Satz (Umkehrsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so, dass die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subseteq U$ von p und W von $q := f(p)$, so dass $f|_V\colon V \to W$ ein Diffeomorphismus ist,
d.h. $f|_V$ ist bijektiv und $(f|_V)^{-1}\colon W \to V$ stetig differenzierbar.

Beweis. Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, dass $p = q = 0$ und $df_p = \mathrm{Id}$. Der Beweis des Umkehrsatzes erfolgt nun in mehreren Schritten:

1) Definition von W: Sei $\delta > 0$, so dass $\overline{B_{2\delta}(0)} \subseteq U$ und so, dass

$$\|Id - df_x\|_{Op.-Norm} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \overline{B_{2\delta}(0)}. \qquad (*)$$

   Wir setzen dann $W := B_\delta(0)$.
2) Definition von $V := f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0) \subseteq U$.
   Da W offen ist und f stetig, ist auch das Urbild $f^{-1}(W)$ offen.
   Damit ist V als Durchschnitt zweier offener Mengen offen.

Weiter im Beweis: 3) Die Abbildung $f|_V\colon V \to W$ ist bijektiv:
Zu $y \in W = B_\delta(0)$ definieren wir die differenzierbare Abbildung

$$\varphi_y\colon U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_y(x) := y + x - f(x).$$

Ein Fixpunkt x von φ_y ist eine Lösung von $f(x) = y$. Wegen $(d\varphi_y)_x = Id - df_x$ liefert der Schrankensatz auf $\overline{B_{2\delta}(0)} \subseteq U$ dass

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \qquad (**)$$

Da $\|y\| < \delta$, gilt für alle $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$, dass

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|y\| < 2\delta,$$

D.h. $\varphi_y\colon \overline{B_{2\delta}(0)} \to B_{2\delta}(0)$. Wegen $(**)$ ist φ_y also eine kontrahierende Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum $\overline{B_{2\delta}(0)}$.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz finden wir also zu jedem $y \in W = B_\delta(0)$ genau ein $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$ mit $\varphi_y(x) = x$.
Wegen $\|x\| = \|\varphi_y(x)\| < 2\delta$, gilt sogar $x \in B_{2\delta}(0)$. D.h aber, dass $f(x) = y$ und $x \in f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0) = V$. Somit ist $f\colon V \to W$ bijektiv und wir können die Umkehrabbildung durch $f^{-1}(y) := x$ definieren.

Weiter im Beweis:

4) f^{-1} ist stetig:
Wegen (**) und der Dreiecksungleichung erhalten wir für $x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &\leq \|\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\overset{(**)}{\leq} \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\|. \end{aligned}$$

Damit ist für $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

und somit ist die Umkehrfunktion f^{-1} (Lipschitz)stetig.

5) Für alle $x \in V$ ist df_x ein Isomorphismus:
Für $x \in V \subseteq B_{2\delta}(0)$ und der Wahl von δ in (*) gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|(Id - df_x)(\xi)\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|.$$

Für $\xi \in \ker(df_x)$ ist dann $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|$, d.h. $\xi = 0$. Also ist df_x invertierbar.

Aus dem vorhergehenden Satz folgt somit die Behauptung des Umkehrsatzes. □

Bemerkung:

f^{-1} ist sogar k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal stetig differenzierbar ist ($k \in \mathbb{N}$). Die Gleichung $df_y^{-1} = (df_{g(y)})^{-1}$ zeigt nämlich, dass f^{-1} k-mal stetig differenzierbar ist, wenn f k-mal und $g = f^{-1}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Folgerung (Offenheits-/Diffeomorphiesatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit df_x invertierbar für alle $x \in U$. Dann gilt

- *$f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen.*
- *Ist f injektiv, so ist f ein Diffeomorphismus $U \to f(U)$.*

Beweis. Dies folgt aus dem Umkehrsatz und dem Satz über Diffeomorphie bei stetiger Umkehrabbildung. (ÜA) □

Beispiel (ebene Polarkoordinaten)

Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

ist unendlich oft differenzierbar. Ihr Differential ist

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Da $\det df = r$, gibt es zu jedem Punkt $p = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, so dass f U bijektiv auf eine offene Menge $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ abbildet mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1}\colon V \to U$.

Z.B. $U = \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$.

Satz über implizite Funktionen

Motivation

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Gleichung für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

bzw. die Lösungsmenge $N_f := N_f(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

- Ist f linear, so ist die Lösungsmenge N_f ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum. Eine Variable, etwa x_i, ist durch die anderen durch eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ bestimmt (wir können nach x_i auflösen): ist z.B. $i = n$, so finden wir $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ mit g linear.
- Was passiert, wenn f nicht linear ist? Unter welchen Bedingungen kann man nun die Gleichung nach einer Koordinate auflösen, d.h. wann existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0,$$

d.h. $N_f \supset graph(g)$? Ist g differenzierbar, falls f differenzierbar ist?

Beispiele

- Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Es ist $N_f = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis. Hier benötigen wir zwei Funktionen, um ganz $N_f(0)$ als Graphen darzustellen:

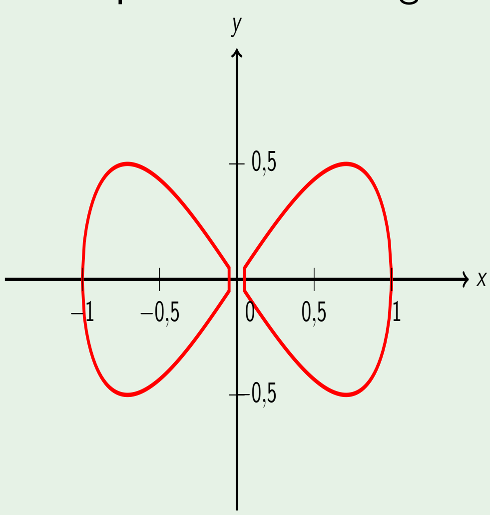
$$\begin{array}{ccccc} S^1 & = & \{(x,y) \in S^1 \mid y \geq 0\} & \cup & \{(x,y) \in S^1 \mid y \leq 0\} \\ & & \mathit{graph}(g_+) & \cup & \mathit{graph}(g_-) \end{array}$$

  mit $g_\pm: [-1,1] \to \mathbb{R}_\pm$. Die Funktionen $g_\pm(x) := \pm\sqrt{1-x^2}$ sind differenzierbar nur auf dem offenen Intervall $(-1,1)$.
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, d.h. $N_f = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Hier gibt es kein g mit $\mathit{graph}(g) = N_f$.

Beispiele

- $f(x,y) := x - y^3$. Hier ist $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nicht differenzierbar in 0.
- $f(x,y) = y^2 - x^2(1-x^2)$. $N_f(0) \setminus \{(-1,0),(0,0),(1,0)\}$ ist Vereinigung von Graphen von 4 stetig differenzierbaren Funktionen.

$N_f =$



Satz über implizite Funktionen

Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig differenzierbar ($k \geq 1$) und $(p, q) \in U$, so dass $f(p, q) = 0$. Weiterhin sei das Differential der Abbildung $y \mapsto f(p, y)$ im Punkt $y = q$ invertierbar.
Dann gibt es offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von p und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von q und eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung $g\colon V \to W$, so dass für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt: $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$.
D.h. $N_f(0) \cap V \times W = graph(g)$.

Beweis. Die Hilfsfunktion $F\colon U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $F(x, y) := (x, f(x, y))$ hat in (p, q) ein Differential, das sich wie folgt aus dem Differential der Abbildung $y \mapsto f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y)e_i$ berechnet:

$$dF_{(p,q)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ * & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}(p, q) \end{pmatrix}$$

Der Umkehrsatz und seine Anwendungen | Satz über implizite Funktionen

Weiter im Beweis: Da $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$ im Punkt (p, q) invertierbar ist, ist auch $dF_{(p,q)}$ im Punkt (p, q) invertierbar.
Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ von p und $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ von q, so dass $V_1 \times V_2 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ durch F bijektiv auf eine offene Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ von $F(p, q) = (p, f(p, q)) = (p, 0)$ abgebildet wird, und zwar so, dass die Umkehrabbildung

$$G = (G_1, G_2)\colon \Omega \to V_1 \times V_2$$

k-mal stetig differenzierbar ist.
Dann ist $V := \{x \in V_1 | (x, 0) \in \Omega\}$ eine offene Umgebung $V \subseteq V_1$ von p.
Wir setzen dann $W := V_2$ und

$$g\colon V \to W, \quad g(x) := G_2(x, 0).$$

Da G k-mal stetig differenzierbar ist, ist es auch g.

Weiter im Beweis: Aus

$$\Omega \ni (x, y) = F(G(x, y)) = (G_1(x, y), f(G_1(x, y), G_2(x, y))) \qquad (*)$$

folgt dann $G_1(x, y) = x$ und $f(x, G_2(x, y)) = y$.
Wir überprüfen nun die Äquivalenz $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$ für alle $(x, y) \in V \times W$:

($\Leftarrow$) Da $g(x) = G_2(x, 0)$ folgt aus (*), dass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$.

($\Rightarrow$) Umgekehrt folgt aus $(x, y) \in V \times W$ mit $f(x, y) = 0$, dass $F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, 0)$ und somit

$$(x, y) = G(F(x, y)) = G(x, 0) = (G_1(x, 0), G_2(x, 0)) = (x, g(x)),$$

d.h. $y = g(x)$.

Damit ist der Satz über implizite Funktionen bewiesen. $\square$

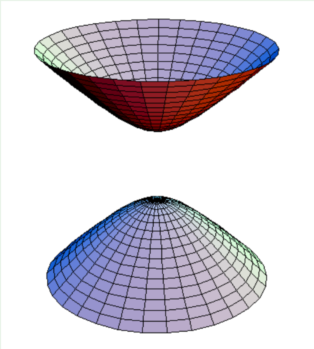
Beispiel (zweischaliges Hyperboloid)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1,$$

erfüllt $\frac{\partial f}{\partial z} = -2z \neq 0$ für alle $(x, y, z) \in H := f^{-1}(0)$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen definiert die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ also lokal eine unendlich oft differenzierbare Funktion $(x, y) \mapsto z = g(x, y)$. Diese kann man durch Auflösen der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach z explizit angeben:

$$g_\pm(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$



Der Graph von $g_+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, bzw. $g_-\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_-$ ist die obere, bzw. untere, Schale des Hyperboloids H.

Differential einer implizit definierten Funktion

Unter den Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen lässt sich das Differential der durch die Gleichung $f(x,y)=0$ implizit definierten Abbildung $x \mapsto g(x)$ wie folgt berechnen.

Bezeichnet $d_x f$ das Differential der Abbildung $x \to f(x,y)$ und $d_y f$ das Differential der Abbildung $y \to f(x,y)$, dann liefert Ableiten der Gleichung $f(x,g(x))=0$ nach der Kettenregel:

$$0 = d_x f + d_y f dg \Longrightarrow dg = -(d_y f)^{-1} d_x f.$$

Hierbei ist dg an der Stelle x und $d_x f, d_y f$ an der Stelle $(x,g(x))$ auszuwerten:

$$dg|_x = -\left(d_y f|_{(x,g(x))}\right)^{-1} d_x f|_{(x,g(x))}.$$

In Komponenten, $i=1,\dots,n$ und $j=1,\dots,m$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,g(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x,g(x)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) \;=\; 0.$$

Abbildungen von konstantem Rang

Definition (Rang einer differenzierbaren Abbildung)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ sei offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

(i) *Der Rang von f im Punkt $p \in U$ ist definiert als*

$$\mathrm{rg}(f)_p := \mathrm{rg}\, df_p \le \min\{m,n\}.$$

Das definiert eine Funktion $\mathrm{rg}(f)\colon U \to \{0,1,2,\dots,\min\{m,n\}\}$.

(ii) *f heißt Immersion, wenn $\mathrm{rg}(f) \equiv m$. Das Differential ist dann injektiv.*

(iii) *f heißt Submersion, wenn $\mathrm{rg}(f) \equiv n$. Das Differential ist dann surjektiv.*

(iv) *k-mal stetig differenzierbare Abbildungen heißen auch von der Klasse C^k oder C^k-Abbildungen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

(v) *$U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ seien offen. Eine C^k-Abbildung $f\colon U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und auch f^{-1} von der Klasse C^k ist.*

Beispiele

(i) Sei $m \leq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$$

ist eine Immersion. Diese nennt man auch kanonische Immersion ι.
Warnung: Immersionen sind nicht unbedingt injektive Abbildungen.

(ii) Sei $m \geq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist eine Submersion. Das ist die kanonische Submersion (Projektion) π.
Warnung: Submersionen sind nicht unbedingt surjektive Abbildungen.

(iii) Sei $r \leq \min\{m, n\}$. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^n$$

hat konstanten Rang r.

Beispiele

(iv) Sei $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$ eine Immersion, denn $rg(dF_x) \equiv n$. Das Bild von F ist der Graph von f.

(v) Der Rang eines Diffeomorphismus $f\colon U \to V$, mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist konstant gleich $m = n$.

Durch Ableiten der Gleichungen $f^{-1} \circ f = Id_U$ und $f \circ f^{-1} = Id_V$ folgt nämlich, dass df_p für alle $p \in U$ invertierbar ist, d.h. $m = n = rg(f)$.

Umgekehrt besagt der Umkehrsatz, dass jede C^k-Abbildung $f\colon U \to V$ vom konstantem maximalen Rang n zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ lokal ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Wir zeigen, dass jede Abbildung von konstantem Rang in geeigneten Koordinaten wie eine der obigen Abbildungen aussieht.

Satz (Normalform für Abbildungen von konstantem Rang)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f) = r$ auf U.

Dann existieren offene Umgebungen $V \subseteq U$ von p und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ und C^k-Diffeomorphismen $\varphi: V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\psi: W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

auf $\varphi(V)$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, veranschaulichen wir kurz den Spezialfall, dass r mit n übereinstimmt, und $n \leq m$.

Submersionen

Im Spezialfall $r = n \leq m$, $p \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, ist f lokal eine Submersion und es existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi: V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

auf $\varphi(V)$.
Schematisch sieht die Situation so aus

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \supseteq U \supseteq V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

wobei $f \circ \varphi^{-1} = \pi$ ist, also die kanonische Submersion π. Dies ist durch das Symbol $\circlearrowleft$ angedeutet. Man spricht auch von einem *kommutativen Diagramm.*

Beweis des Satzes:
Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, dass die quadratische Matrix

$$A = \left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} \quad \text{invertierbar ist.}$$

Wir betrachten die Hilfsabbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^m$,
$F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m)$.
Da

$$dF_p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \mathbf{1}_{m-r} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p, so dass $\varphi := F|_V\colon V \to \varphi(V)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.
Aus $F \circ \varphi^{-1}(x) = x$ folgt dann $f_i(\varphi^{-1}(x)) = x_i$ für alle $i \leq r$ und $x \in \varphi(V)$.
Für $\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1}$ ist also $\tilde{f}_i(x) = x_i$ für alle $i \leq r$. Es ist $f(p) = \tilde{f}(\varphi(p))$.
Außerdem können wir den Definitionsbereich von $\tilde{f}$ verkleinern zu einer Umgebung von $\varphi(p)$ der Form $\tilde{U} = U' \times U''$ mit konvexen $U' \subseteq \mathbb{R}^r$, $U'' \subseteq \mathbb{R}^{m-r}$.

Weiter im Beweis: Somit ist

$$d\tilde{f}_{\varphi(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ * & B \end{pmatrix}, \quad B = \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}\right)_{i,j \geq r+1}.$$

und aus $\mathrm{rg}(f) = r$ folgt nun $B = 0$, d.h. $\tilde{f}$ hängt nur von $(x_1, \dots, x_r)$ ab.
Damit hat $\tilde{f}$ die Form $\tilde{f}(x) = (x', f''(x'))$ ist, wobei

$$x' = (x_1, \dots, x_r) \quad \text{und} \quad f'' = (\tilde{f}_{r+1}, \dots, \tilde{f}_n).$$

Es ist $W := U' \times \mathbb{R}^{n-r}$ eine offene Umgebung von $\tilde{f}(\varphi(p)) = (p', f''(p'))$, wobei $p' \in U'$ die Projektion von $\varphi(p)$ nach $\mathbb{R}^r$ ist.
Wir verwenden nun den C^k-Diffeomorphismus $\psi\colon W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(x) = (x', x'' - f''(x')) \quad \text{für} \quad x = (x', x'') \in W = U' \times \mathbb{R}^{n-r}.$$

In der Tat gilt, wie gewünscht,
$\psi(\tilde{f}(x)) = \psi(x', f''(x')) = (x', f''(x') - f''(x')) = (x', 0)$. $\square$

Beispiel

Die Abbildung $f\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto f(A) = A^{\mathrm{T}}A$, hat auf der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ konstanten Rang $r = \frac{n(n+1)}{2}$, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wir können f als Abbildung $f\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ in den Unterraum $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ der symmetrischen Matrizen auffassen.

Das Differential $df_A\colon B \mapsto B^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}B$, $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, ist für $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ surjektiv:

Sei $C \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$. df_A bildet $B = \frac{1}{2}(A^{-1})^{\mathrm{T}}C$ auf $\frac{1}{2}(C^{\mathrm{T}} + C) = C$ ab.

Daraus folgt $\mathrm{rg}(f)_A = \dim \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Somit definiert f eine Submersion $GL(n,\mathbb{R}) \to Sym(n,\mathbb{R})$ und hat somit konstanten Rang $r = \frac{n(n+1)}{2}$

Immersionen

Wir halten noch fest:

Folgerung (Normalform für Immersionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f)_p = m \leq n$.

Dann existiert eine offene Umgebung V des Bildes $f(p)$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\psi\colon V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\psi \circ f)(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

in einer Umgebung von p. Schematisch, mit ι kanonische Immersion:

$$\begin{tikzcd} & V \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \supset U \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "\iota"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist f lokal eine Immersion.

Beweis. Im Beweis des Satzes können wir statt F die Hilfsfunktion $G\colon U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, $G(x,y) := f(x) + (0,y)$ betrachten.

G ist von der Klasse C^k und

$$dG_{(p,y)} = \left(\begin{array}{c|c} df_p & \begin{matrix} 0 \\ 1_{n-m} \end{matrix} \end{array} \right) \in Mat_n(\mathbb{R}).$$

Da insbesondere $dG_{(p,0)}$ invertierbar ist, existiert nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung W von $(p,0) \in \mathbb{R}^n$, so dass $G|_W\colon W \to G(W)$ ein C^k-Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $V := G(W)$ von $G(p,0) = f(p)$ ist.

Der C^k-Diffeomorphismus $\psi := (G|_W)^{-1}\colon V \to W$ erfüllt dann, wie gewünscht, $\psi(f(x)) = \psi(G(x,0)) = (x,0)$. $\square$

Kapitel 20

Mannigfaltigkeiten

Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum

Wir wollen nun Teilmengen des Euklidischen Raumes betrachten, die lokal durch eine Immersion oder eine Submersion gegeben sind.

Bemerkung: Die auf Teilmengen induzierte Metrik

Sei $Y \subseteq (X, d)$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d).

Dann definiert die Einschränkung von d auf Y eine Metrik d_Y auf Y, so dass (Y, d_Y) ein metrischer Raum ist. Es heißt d_Y induzierte Metrik.

Beispiel

Die zweidimensionale Einheitssphäre
$S^2 = S_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge im Euklidischen Raum und bezüglich der induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum.
Die obere Halbsphäre $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ ist eine offene Teilmenge der Sphäre S^2 und kein vollständiger topologischer Raum.

Definition

Eine bijektive stetige Abbildung $\Phi\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y heißt Homöomorphismus, wenn auch die Umkehrfunktion $\Phi^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist.
Bezeichnung: $\Phi\colon X \xrightarrow{\sim} Y$.

Beispiel

Die Abbildung

$$\Phi\colon [0, 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}, \quad \varphi \mapsto e^{i\varphi},$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus. Denn die Bildfolge $z_n = \Phi(2\pi - \frac{1}{n}) \in S^1$ konvergiert gegen 1, aber die Urbildfolge $\Phi^{-1}(z_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \in [0, 2\pi)$ konvergiert nicht gegen $\Phi^{-1}(1) = 0$.

Die Einschränkung von Φ auf das offene Intervall $(0, 2\pi)$ definiert jedoch einen Homöomorphismus von $(0, 2\pi)$ auf die offene Teilmenge $S^1 \setminus \{1\}$ der Einheitskreislinie S^1.

Untermannigfaltigkeiten

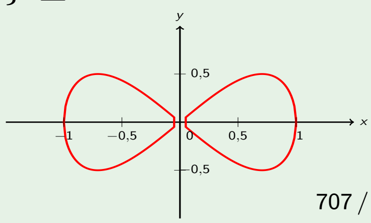
Definition (Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine C^k-Immersion $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ gibt, die U homöomorph auf die offene Teilmenge $F(U) = V \cap M$ von M abbildet. Wir sprechen bei $U \xrightarrow{\sim} V \cap M$ von einer lokalen Parametrisierung von M und bei $V \cap M \xrightarrow{\sim} U$ auch von einer Karte bei $p \in M$. Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten in einem beliebigen $\mathbb{R}^n$ heißen Flächen und $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ heißen Hyperflächen.

Beispiel

Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1 - x^2) - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

ist keine Untermannigfaltigkeit.
$M \setminus \{(0,0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit.



Mannigfaltigkeiten

Bemerkungen

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und seien $F_i\colon U_i \xrightarrow{\sim} V_i$, $i = 1, 2$ zwei lokale Parametrisierungen mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Man zeigt: Die Urbildmengen $W_i := F_i^{-1}(V)$ sind offen in $\mathbb{R}^m$ und $F_2^{-1} \circ F_1\colon \quad W_1 \to W_2$ ist ein C^k-Diffeomorphismus.
- Man kann den Begriff der Untermannigfaltigkeit verallgemeinern: Gegeben seien ein metrischer Raum M, eine offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von M mit offenen Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^m$ und Homöomorphismen $F_i\colon U_i \xrightarrow{\sim} V_i$. Man spricht dann von einer (abstrakten) m-dimensionalen C^k-Mannigfaltigkeit wenn für je zwei offene Mengen $V_1, V_2 \subseteq M$ mit Abbildungen F_1 und F_2 die Kartenwechselabbildung

$$F_2^{-1} \circ F_1\colon \quad F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \quad F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Beispiel: Graph einer Abbildung als Untermannigfaltigkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung.

Dann ist der Graph von f

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^r | y = f(x)\}$$

eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $n = m + r$.

Denn die C^k-Immersion $F\colon U \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (x, f(x))$, bildet U homöomorph auf $F(U) = \Gamma_f$ ab.

Es gilt auch eine Umkehrung, jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ lässt sich lokal als Graph schreiben:

Satz

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$, eventuell nach Umbenennung der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$, offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ von $a' := (a_1, \dots, a_m)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von $a'' := (a_{m+1}, \dots, a_n)$ und eine C^k-Abbildung $g\colon U' \to U''$ gibt, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}$$

gilt. Lokal lässt sich also M als Graph schreiben.

Beweis. Wir müssen nur noch eine Richtung zeigen und nehmen an, dass $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit ist. Sei $a \in M$ und sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ und

$$F\colon T \xrightarrow{\sim} F(T) \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine lokale Parametrisierung mit $a = F(t_a)$, also eine Immersion, die T homöomorph auf $F(T) = M \cap U$ abbildet. Wir können, eventuell nach Umnummerierung, annehmen, dass die Familie $(\mathrm{grad} F_1(t_a), \dots, \mathrm{grad} F_m(t_a))$ linear unabhängig ist.

Nach dem Umkehrsatz bildet $\tilde{F} := (F_1, \ldots, F_m)$ dann eine Umgebung $T_1 \subseteq T$ bijektiv und C^k-invertierbar auf eine Teilmenge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ ab. Sei $\varphi\colon U_1 \to T_1$ die Umkehrabbildung. Dann hat

$$G := F \circ \varphi\colon U_1 \to \mathbb{R}^n$$

die Form

$$G(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, g_{m+1}(x'), \ldots, g_n(x')) \quad \text{mit} \qquad x' := (x_1, \ldots, x_m)$$

Auf einer Verkleinerung $U' \subseteq U_1$ hat dann die Abbildung

$$g = (g_{m+1}, \ldots g_n)\colon U' \to \mathbb{R}^{n-m}$$

alle gewünschten Eigenschaften: denn $x = F(t)$ für $t = \varphi(u'), u' \in U'$ genau dann, wenn $x = G(u') = (u', g(u'))$. $\square$

Beispiel

Die Sphäre S^2 ist eine C^∞-Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Sie besitzt nämlich eine Überdeckung durch 6 Halbsphären

$$H_i^\pm := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 | \pm x_i > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und jede der Halbsphären ist ein Graph. Zum Beispiel ist $H_1^+ = \{(f(u), u) | u \in U\}$ mit $f\colon U = \{u \in \mathbb{R}^2 | \|u\| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}$.

Beispiel: Die stereographische Projektion der Sphäre

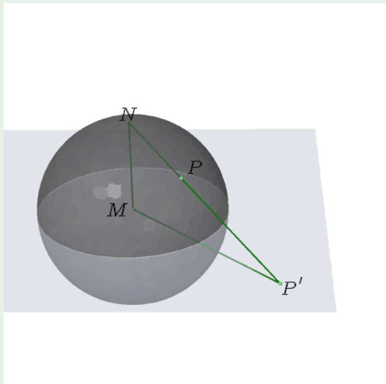
Wir betrachten die beiden Abbildungen $\varphi_\pm \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi_\pm(x,y) := \frac{1}{1+\|(x,y)\|^2}\left(2x, 2y, \pm(\|(x,y)\|^2 - 1)\right).$$

Beides sind Immersionen mit $\mathrm{im}(\varphi_\pm) \subseteq S^2$ (ÜA).
Seien $N^\pm = (0,0,\pm 1)$ der Nord- und Südpol der Sphäre. Dann sind $\varphi_\pm \colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N^\pm\}$ Homöomorphismen mit der Umkehrabbildung (ÜA)

$$\varphi_\pm^{-1} : S^2 \setminus \{N^\pm\} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\pm^{-1}(x,y,z) := \left(\frac{x}{1\mp z}, \frac{y}{1\mp z}\right)$$

$\varphi_\pm^{-1}$ heißt stereographische Projektion aus dem Nord/Südpol. Sie ordnet jedem Punkt $P \in S^2 \setminus \{N^\pm\}$ den Schnittpunkt P' der Gerade durch P und $N^\pm$ mit dem $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ zu.



Untermannigfaltigkeiten als Urbilder unter Abbildungen von konstantem Rang

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung von konstantem Rang r und $q \in f(U)$. Dann ist

$$M := f^{-1}(q) \subseteq U$$

eine C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-r$.

Beweis. Sei $p = (p_1, \ldots, p_n) \in M$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass

$$f \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0),$$

definiert auf einer in U enthaltenen offenen Umgebung $V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ von p, wobei $q = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0) \in f(V_1 \times V_2) \subseteq \mathbb{R}^m$.
Dann ist $V_2 \ni (y_{r+1}, \ldots, y_n) \mapsto (p_1, \ldots, p_r, y_{r+1}, \ldots, y_n) \in V_1 \times V_2$ eine Immersion, die V_2 homöomorph auf $f^{-1}(q)$ abbildet. $\square$

Beispiele

(i) Die Abbildung $f\colon \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{\mathrm{T}}A$, hat überall den Rang $n(n+1)/2$. Somit ist $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\mathbf{1}_n) \subseteq \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ eine (kompakte) C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

(ii) Man zeigt auf ähnliche Weise, dass $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ eine (kompakte) C^∞-Untermannigfaltigkeit der (reellen) Dimension n^2 ist (ÜA).

(iii) Sei $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x-p\|^2$, definiert eine Submersion von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p\}$ auf $\mathbb{R}$. Die n-dimensionalen Sphären $S^n_r(p) = f^{-1}(r^2) \subseteq \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$ sind also C^∞-Hyperflächen.

(iv) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung und $\Gamma_F = \{(x,F(x)) \in U \times \mathbb{R}^r\}$ der Graph von F.
Dann gilt: die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{m+r} \to \mathbb{R}^r$ definiert durch $f(x,y) := y - F(x)$ ist eine Submersion und

$$\Gamma_F = f^{-1}(0).$$

Untermannigfaltigkeiten und Submersionen

Satz

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt und eine C^k-Submersion $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-m}$, so dass $M \cap V = f^{-1}(0)$.

Eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist also lokal durch $n-m$ Gleichungen gegeben.

Beweis. "$\Longrightarrow$" Gegeben sei eine Untermannigfaltigkeit. Sei $F\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p \in F(U) = M \cap V$.

Wegen der Normalform von Immersionen können wir annehmen, dass $F\colon (x_1,\ldots,x_m) \mapsto (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$.

Dann ist $f\colon V \to \mathbb{R}^{n-m}$, $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_{m+1},\ldots,x_n)$ die gesuchte Submersion.

Die Umkehrung folgt aus dem vorhergehenden Satz. □

Tangentialraum

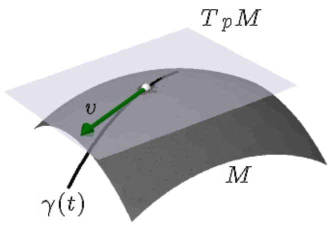
Definition (Tangentialvektoren)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in $p \in M$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\gamma(0) = p \quad \text{und} \quad v = \gamma'(0).$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p heißt Tangentialraum in p und wird mit T_pM bezeichnet.



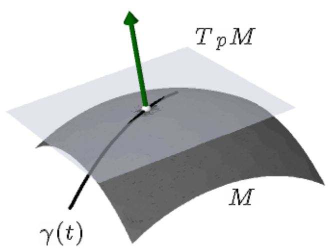
Beispiel: Tangentialraum an die Sphäre

Sei $S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = r^2\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre vom Radius r. Wir behaupten, dass dann für alle $p \in S_r^n$ gilt

$$T_pS_r^n \;=\; p^\perp.$$

Denn es gilt $v \in T_pM \iff \exists$ eine Kurve
$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_r^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.
Dann gilt $r^2 \equiv \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} (\gamma_i(t))^2$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \\ &= 2 \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i(0)(\gamma_i)'(0) \\ &= 2\langle p, v \rangle. \end{aligned}$$



Satz (Eigenschaften des Tangentialraumes)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und T_pM der Tangentialraum an M in $p \in M$. Dann gilt:

(i) *T_pM ist ein Vektorraum der Dimension $m = \dim M$.*

(ii) *Sei $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^m \to V$ eine lokale Parametrisierung von M, $u \in U$ mit $p = F(u)$.*
Dann bilden die m Vektoren $\partial_1 F(u), \ldots, \partial_m F(u) \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von T_pM.

(iii) *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f_1, \ldots, f_{n-m})\colon V \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine C^1-Submersion, so dass $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist*
$T_pM = \ker(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m}(\mathrm{grad}\, f_j(p))^\perp$.

(iv) *Insbesondere gilt $T_pM^\perp = \mathrm{span}\{\mathrm{grad}\, f_1(p), \ldots, \mathrm{grad}\, f_{n-m}(p)\} \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\mathrm{span}\{\partial_1 F(u), \ldots, \partial_m F(u)\} \subseteq T_pM \qquad (*)$$

$$\text{und} \quad \mathrm{grad}\, f_j(p) \perp T_pM \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n-m, \qquad (**)$$

Denn wegen $\mathrm{Rang}(F) = m$ und $(*)$ folgt dann $\dim(T_pM) \geq m$. Wegen $\mathrm{Rang}(f) = n - m$ und $(**)$ folgt ebenso $\dim(T_pM) \leq n - (n-m) = m$.

Sei nun $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann definiert $c(t) := F(u + tv)$ eine C^1-Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subseteq M$ mit

$$c'(0) = dF_p v = \sum_{i=1}^m v_i \partial_i F(u) \in T_pM.$$

Das beweist $(*)$.
Für jede C^1-Kurve $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subseteq M$ mit $c(0) = p$ gilt $f(c(t)) \equiv q$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und somit $0 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0)$.

Das zeigt $T_pM \subseteq \ker(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m}(\mathrm{grad}\, f_j(p))^\perp$ und damit $(**)$. $\square$

Beispiele:

- Tangentialraum an die Sphäre:
  Es ist $S^n = f^{-1}(0)$ wobei $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Submersion ist, die durch $f(x) = \|x\|^2 - 1$ gegeben ist. Damit ist für $p \in S^2$
  $T_pM = (\operatorname{grad} f_p)^\perp = 2p^\perp = p^\perp$.

Mannigfaltigkeiten Extrema mit Nebenbedingungen

Beispiele:

- Tangentialraum an einen Graphen:
  Sei $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine C^k-Abb. und $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \in U \times \mathbb{R}\}$ der Graph von φ.
  Dann ist $F\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $F(x) = (x, \varphi(x))$ eine Parametrisierung und

$$T_p\Gamma_\varphi = \operatorname{span}\left((e_i, \partial_i\varphi(p))^{\mathrm{T}}\right)_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$$

  Ist $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \varphi(x) - y$ die durch den Graphen definierte Submersion, dann gilt auch

$$T_p\Gamma_\varphi \;=\; (\operatorname{grad} f(p, \varphi(p)))^\perp \;=\; (\operatorname{grad} \varphi(p), -1)^\perp.$$

  Beachte, dass $\langle(\operatorname{grad} \varphi(p), -1), (e_i, \partial_i\varphi(p))\rangle = 0$.
  Analoge Aussagen gelten natürlich auch für $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^r$ mit $r > 1$.

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz (Extrema mit Nebenbedingungen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in M \cap U$ differenzierbar

(i) *Wenn die Einschränkung $F := f|_{U \cap M}$ im Punkt p ein lokales Extremum annimmt, so ist*

$$(*) \qquad T_pM \subseteq \ker df_p = (\mathrm{grad}\, f(p))^{\perp}.$$

(ii) *$(*)$ gilt genau dann, wenn es Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (sogenannte Lagrangemultiplikatoren) gibt mit*

$$\mathrm{grad}\, f(p) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathrm{grad}\, h_j(p),$$

wobei $r := n - m$ und $h = (h_1, \dots, h_r): U \to \mathbb{R}^r$ eine C^1-Submersion ist, so dass $M \cap U = h^{-1}(0)$.

Beweis. Sei $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve in der Untermannigfaltigkeit mit $c(0) = p$. Dann hat die Funktion $f \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in 0 und somit

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0) = \langle \mathrm{grad}\, f(p), c'(0) \rangle.$$

Das beweist (i), d.h. $T_pM \subseteq (\mathrm{grad}\ f)^{\perp}$. Das impliziert aber $\mathrm{grad}\ f \in (T_pM)^{\perp}$. Damit folgt (ii) aus

$$T_pM^{\perp} = \mathrm{span}\{\mathrm{grad}\, h_1(p), \dots, \mathrm{grad}\, h_r(p)\}.$$

$\square$

Beispiel

Hiermit können wir (erneut) zeigen, dass jeder symmetrische Endomorphismus A eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums V einen Eigenvektor hat:

Da die Einheitssphäre $S = S_1^n(0) \subseteq V$ kompakt ist, nimmt die quadratische Form

$$\begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \end{array}$$

als stetige Funktion in einem Punkt $p \in S$ ihr Minimum an.

Nach dem vorherigen Satz gilt also

$$\mathrm{grad}\, f(p) = Ap \in (T_pS)^\perp = \mathbb{R}p,$$

d.h. p ist ein Eigenvektor von A. Der Lagrangemultiplikator ist der Eigenwert.

Kapitel 21

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DG) besteht aus einer oder mehreren Gleichungen an eine oder mehrere Funktionen einer Variablen und deren Ableitungen.

Wir kennen schon einige Differentialgleichungen:

- Die differenzierbare Funktion $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ erfülle die DG $x'(t) \equiv 0$. Jede Lösung ist dann von der Form $x(t) \equiv c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wir müssen noch eine Anfangsbedingung (AB) stellen: $x(t_0) = c$, um die Lösung festzulegen.
- Die DG zweiter Ordnung $x''(t) \equiv 0$ hat die Lösungen $x(t) = at + b$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Diesmal müssen wir zwei Anfangsbedingungen stellen: $x(t_0) = b_0$ und $x'(t_0) = a_0$. Dann ist $x(t) = a_0(t - t_0) + b_0$ eine Lösung.
- Die DG $x'(t) = t^2$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + c$.
- Die DG $x'(t) = x(t)$ mit der AB $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = ce^t$.

Warum interessieren wir uns für Differentialgleichungen:

Die Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch eine Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

$x'(t)$ gibt dann die Geschwindigkeit und $x''(t)$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt t an. Auf den Punkt wirke eine Kraft F, die vom Ort x, der Zeit t und der Geschwindigkeit $x'(t)$ des Punktes abhängt, d.h. $F = F(x, x', t)$. Das Newtonsche Bewegungsgesetz der Mechanik hat dann folgende Form

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Unter der Annahme, dass F und die Anfangswerte $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ bekannt sind, versucht man, die Bewegungskurve des Punktes zu berechnen.
Dies ist ein Anfangswertproblem der Form

$$x''(t) = \frac{1}{m}F(x, x', t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- *Dann heißt die Gleichung*

$$x'(t) = f(x,t) \tag{1}$$

  Differentialgleichung erster Ordnung in x. Meist schreiben wir auch nur $x' = f(x,t)$.
- *Unter einer Lösung der DG (1) versteht man eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, so dass*
  (i) $(\varphi(t), t) \in \Omega$ *für alle* $t \in I$,
  (ii) $\varphi'(t) = f(\varphi(t), t)$ *für alle* $t \in I$.
- *Sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Eine Lösung φ der DG (1) mit $\varphi(t_0) = c$ heißt Lösung des Anfangswertproblems (AWP) zu (1) mit der Anfangsbedingung*

$$x(t_0) = c. \tag{2}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.

$$x^{(k)} = f(x, x', \dots, x^{(k-1)}, t) \tag{3}$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordung.

- *Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte k-mal differenzierbare Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, so dass*
  (i) $(\Phi(t), t) \in \Omega$ *für alle t, wobei* $\Phi := (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)})\colon I \to \mathbb{R}^k$ *und*
  (ii) $\varphi^{(k)}(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ *für alle* $t \in I$.
- *Sei $t_0 \in I$ und $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Das Anfangswertproblem ist gegeben durch (3) und*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{4}$$

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition (Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen)

Sei $\Omega \subseteq (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}$ *und* $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *stetig.*

$$x^{(k)} = F(x, x', \ldots, x^{(k-1)}, t) \tag{5}$$

heißt System gewöhnlicher DG'en k-ter Ordung an $x = (x_1, \ldots x_n)$.

- *Unter einer Lösung versteht man eine differenzierbare Kurve* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *mit*
  (i) $(\Phi(t), t) \in \Omega$ *für alle* t*, wobei* $\Phi = (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(k-1)})\colon I \to \mathbb{R}^{nk}$ *und*
  (ii) $\varphi^{(k)}(t) = F(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ *für alle* $t \in I$.
- *Sei* $t_0 \in I$ *und* $c_1, \ldots, c_k$ *Vektoren in* $\mathbb{R}^n$*. Das Anfangswertproblem ist gegeben durch* (5) *und*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{6}$$

Reduktion von Systemen höherer Ordnung

Satz

Sei $F\colon \Omega \subseteq (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und* $F^*\colon \Omega \to (\mathbb{R}^n)^k$ *definiert durch* $F^*(y_0, \ldots, y_{k-1}, t) := (y_1, \ldots, y_{k-1}, F(y_0, \ldots, y_{k-1}, t))$*, wobei* $y_j \in \mathbb{R}^n$ *für alle* $j \in \{0, \ldots, k-1\}$*. Dann gilt:*

(1) *Ist* $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung des AWP's k-ter Ordnung*

$$x^{(k)} = F(x, \ldots, x^{(k-1)}, t) \text{ mit AB'en} \left\{\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & a_1 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & a_k, \end{array}\right\} \tag{7}$$

so ist $y := \left(x, x', \ldots, x^{(k-1)}\right) : I \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$ *eine Lösung des AWP's*

$$y' = F^*(y, t), \qquad y(t_0) = (a_1, \ldots, a_k) \tag{8}$$

(2) *Ist* $y = (y_0, \ldots, y_{k-1})\colon I \to (\mathbb{R}^n)^k$ *eine Lsg. des AWP's* (8) *erster Ordnung, so ist* $y_0\colon I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lsg. des AWP's* (7) *k-ter Ordnung.*

Beweis: Nach Definition von F^* ist $y'(t) = F^*(y(t), t)$ äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} y_0'(t) & = & y_1(t), \\ y_1'(t) & = & y_2(t), \\ & & \dots \\ y_{k-2}'(t) & = & y_{k-1}(t), \\ y_{k-1}'(t) & = & F(y_0, \dots, y_{k-1}, t). \end{array}$$

Die Behauptung folgt dann sofort durch Einsetzen:

$$\begin{array}{lcl} x(t) \text{ löst } (7) & \Longrightarrow & y(t) = (x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \text{ löst } (8) \\ y(t) \text{ löst } (8) & \Longrightarrow & x(t) = y_0(t) \text{ löst } (7). \end{array} \qquad \square$$

Beispiel: Schwingungsgleichung ohne Reibung

Die Bewegung einer Masse m, die reibungsfrei an einer Feder auf der x-Achse um 0 gleitet, wird beschrieben durch die DG zweiter Ordnung

$$x''(t) = -\tfrac{k}{m}x = F(x, x', t) \quad \text{mit } F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x_0, x_1, t) = -\tfrac{k}{m}x_0. \tag{9}$$

Wir führen nun (9) auf das System erster Ordnung zurück

$$(y_0'(t), y_1'(t)) = (y_1(t), -\tfrac{k}{m}y_0(t)) = F^*(y_0, y_1, t),$$

wobei $F^*\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F^*(y_0, y_1, t) = (y_1, F(y_0, y_1, t)) = (y_1, -\frac{k}{m}y_0)$. Das heißt, $x(t)$ löst genau dann (9), wenn $(y_0(t), y_1(t)) := (x(t), x'(t))$ folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung löst

$$\begin{pmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -\frac{k}{m}y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix},$$

d.h. $y'(t) = A \cdot y(t)$, mit einer konstanten Matrix A: dies ist ein lineares Differentialgleichungs-System mit konstanten Koeffizienten.

Autonome Differentialgleichungen und Vektorfelder

Definition

- *Ein DG-System der Form $x^{(k)} = F(x, \ldots, x^{(k-1)})$, bzw. $x' = F(x)$ falls $k = 1$, heißt autonom. Entscheidend ist, dass F nicht von t selbst abhängt.*
- *Ein stetiges Vektorfeld (ab jetzt, kurz: Vektorfeld) auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $V: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*
- *Eine C^1–Kurve $\gamma_{x_0}: (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow U$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes V durch $x_0 \in U$, falls gilt*

$$\gamma_{x_0}'(t) = V(\gamma_{x_0}(t)) \;\; \textit{für alle} \;\; t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \;\; \textit{und} \;\; \gamma_{x_0}(0) = x_0.$$

Der Vektor $V(\gamma_{x_0}(t))$ des Vektorfelds ist gleich dem Tangentialvektor der Kurve γ_{x_0} in t. Die Integralkurven eines Vektorfeldes $V: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind also Lösungen der autonomen Differentialgleichung

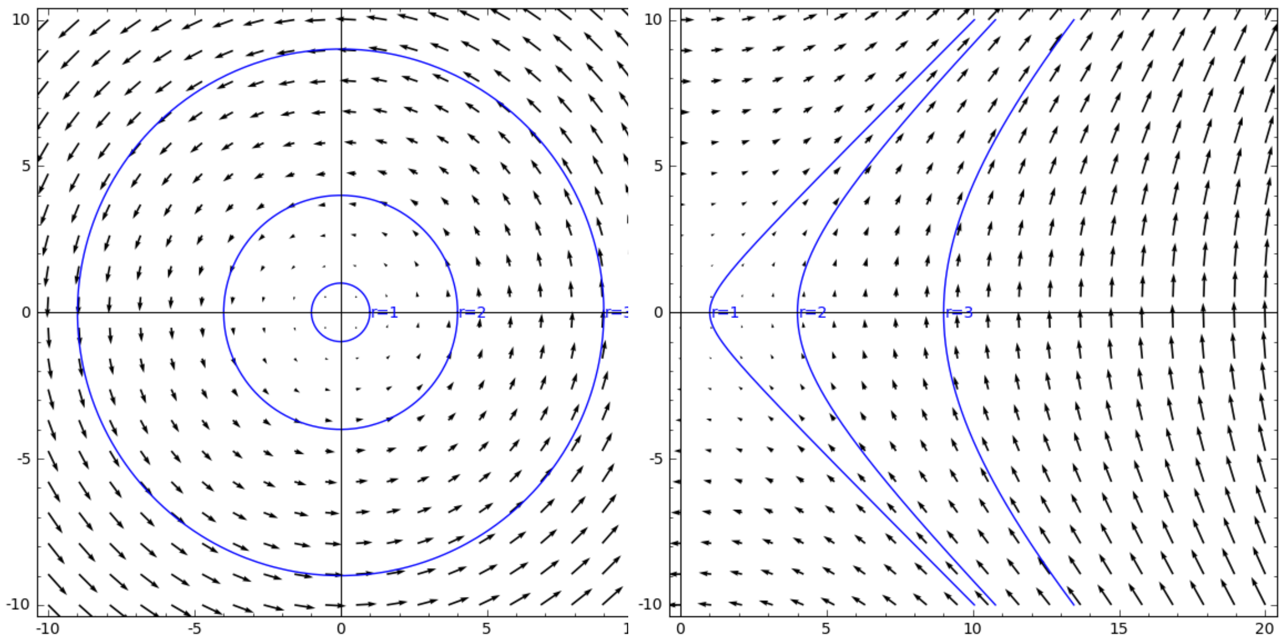
$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \;\text{ mit der Anfangsbedingung }\; \gamma(0) = x_0.$$

Beispiel: Lineare Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^2$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld definiert durch $U(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$. Eine Integralkurve von U durch $p := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch

$$\gamma_p = e^{\lambda t} p,$$

  denn $\gamma_p'(t) = \lambda e^{\lambda t} p = \lambda \gamma_p(t) = U(\gamma_p(t))$.
- Sei V das Vektorfeld $V(x, y) = (-y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch $\gamma_p(t) = r^2(\cos t, \sin t)$, denn $\gamma_p'(t) = r^2(-\sin t, \cos t) = V(\gamma_p(t))$. [Siehe Graphik]
- Sei W das Vektorfeld $W(x, y) = (y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch $\gamma_p(t) = r^2(\cosh t, \sinh t)$, denn $\gamma_p'(t) = r^2(\sinh t, \cosh t) = W(\gamma_p(t))$. [Siehe Graphik]



Elementare Lösungsmethoden für DG'en 1. Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungen der Form

$$x' = F(x, t)$$

wobei $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Eine Lösung ist also eine differenzierbare Funktion $x\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Wir geben elementare Lösungsmethoden an, für Fälle, in denen F eine einfache Gestalt hat. Diese Verfahren basieren meist auf der Möglichkeit der Trennung der Variablen.
Grundidee:
F sei von der Gestalt $F(x, t) = f(t) \cdot g(x)$, die Gleichung also $x' = f(t) \cdot g(x)$.
Formal gilt dann $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$ und deshalb $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$; Integration liefert die Lösung der Differentialgleichung.

Trennung der Variablen

Definition

Eine DG mit getrennten Variablen ist eine DG folgenden Typs

$$x'(t) = f(t) \cdot g(x(t)) \quad \text{mit Anfangsbedingungen } x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

wobei die Funktionen $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$ und $g\colon I_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$ und $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle.

Satz (Differentialgleichung mit getrennten Variablen)

Sei G eine Stammfkt. von $\frac{1}{g}$ auf I_2 und G^{-1} die Umkehrfkt. von G. Das AWP (10) besitzt auf einem Intervall $J \subseteq I_1$ um t_0 die eindeutige Lösung

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right),$$

Das Intervall J ist gegeben durch das Innere der Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds \in \operatorname{im}(G)\}$.

Beweis.
Existenz: Da die Funktion $\frac{1}{g}$ stetig und ohne Nullstellen ist, ist ihre Stammfunktion G streng monoton und somit umkehrbar mit $G^{-1}\colon \operatorname{im}(G) \to I_2$. Setze

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right);$$

nach der Kettenregel ist die Ableitung

$$x'(t) = \frac{1}{G'(x(t))}(G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds)' = g(x(t)) \cdot f(t)\ ,$$

also erfüllt $x(t)$ die DG (10). Es gilt $x(t_0) = x_0$. Die Funktion $x(t)$ ist definiert für diejenigen t, für die $G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds \in \operatorname{im}(G)$.

Weiter im Beweis.
Eindeutigkeit: Sei x eine Lösung von (10)
Wir integrieren die Gleichung $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$ von t_0 bis T nahe t_0:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int_{t_0}^{T} f(t)\, dt.$$

Die Substitution $x = x(t)$ ergibt $dx = x'(t)\, dt$ und

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} = G(x(T)) - G(x_0)$$

für G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$. Da G streng monoton ist, ist die Lösung x eindeutig bestimmt. □

Beispiele

- Jede autonome DG $x' = g(x)$, $x(t_0) = x_0$ ist eine DG mit getrennten Variablen, wobei $f \equiv 1$. Ist G eine Stammfunktion von $1/g$, so ist $x(t) := G^{-1}(t + G(x_0) - t_0)$ eine Lösung.
  Sei z.B. $x' = x$ mit $x(0) = c > 0$. Dann ist $g(x) = x$ und eine Stammfunktion von $1/g = 1/x$ ist $G(x) = \ln x$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$. Somit ist die Lösung gegeben durch

$$x(t) = G^{-1}(t + \ln c) = \mathrm{e}^{t+\ln c} = c \cdot \mathrm{e}^t.$$

- Sei $x' = t \cdot x^2$ mit Anfangsbedingungen $x(0) = c \neq 0$. Dann ist $g(x) = x^2$ und eine Stammfunktion von $1/g = 1/x^2$ ist $G(x) = -\frac{1}{x}$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = -\frac{1}{x}$. Andererseits ist $\int_0^t s\, ds = \frac{1}{2}t^2$. Somit ist die Lösung gegeben durch

$$x(t) = G^{-1}(-\frac{1}{c} + \frac{t^2}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{t^2}{2}}$$

Euler–homogene Differentialgleichungen

Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Euler–homogene DG ist eine DG vom Typ

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) \qquad \text{wobei} \qquad (x,t) \text{ so dass } \frac{x}{t} \in I \tag{11}$$

Lösungsmethode: Die Substitution $u(t) := \frac{x(t)}{t}$ ergibt

$$u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x}{t}\right) \overset{(11)}{=} \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right).$$

Löst $x(t)$ die DG (11), so löst $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ die DG mit getrennten Variablen

$$u'(t) = \frac{1}{t}(f(u) - u). \tag{12}$$

Umgekehrt ist für jede Lösung $u(t)$ der DG (12) die Funktion $x(t) = t \cdot u(t)$ Lösung der Euler–homogene DG (11), denn

$$x' = tu' + u \overset{(12)}{=} f(u) - u + u = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen | Elementare Lösungsmethoden für DG'en 1. Ordnung

Beispiel für Euler-homogene Differentialgleichungen

Wir betrachten die DG $x' = 1 + \frac{x}{t}$ mit der Anfangsbedingung $x(1) = x_0$, und wir suchen Lösungen auf $(0, \infty)$. Dann gilt

$$u(t) = \frac{x(t)}{t} \implies u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t^2}(t + x - x) = \frac{1}{t}.$$

Somit ist $u'(t) := \frac{1}{t}$ mit $u(1) = x_0$ zu lösen. Die Lösung ist aber offensichtlich gegeben durch $u(t) = \ln(t) + x_0$. Folglich erhalten wir als Lösung für die DG $x' = 1 + \frac{x}{t}$ mit Anfangsbedingung $x(1) = x_0$ die Funktion

$$x(t) = t(\ln(t) + x_0) \qquad \text{für alle} \quad t \in (0, \infty).$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition

Eine lineare Differentialgleichung ist eine DG der Form

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \tag{13}$$

wobei $p, q\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Ist die Störfunktion $q(t) \equiv 0$, so heißt (13) homogene lineare DG, andernfalls inhomogene lineare DG.

Satz (Homogene lineare DG)

Jede Lösung einer homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ ist gegeben durch

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t)dt} \ ,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant und $\int p(t)dt$ eine Stammfunktion von p ist. Das AWP $x' = p(t)x$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ hat genau eine Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Beweis. $x' = p(t)x$ ist eine DG mit getrennten Variablen. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig gestimmt.
In der Tat erfüllt $x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ das AWP, denn

$$x'(t) \;=\; x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \cdot \Big(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big)' \;=\; x(t)p(t) \quad \text{und } x(t_0) = x_0.$$

$\square$

Die "allgemeine Lösung" von $x'(t) = p(t)x(t)$ ist von der Gestalt $x(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz

Sei $x_s\colon I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DG $x' = p(t)x + q$ mit $q \neq 0$. Dann erhält man alle Lösungen x der inhomogenen Gleichung mittels $x = x_s + x_c$ mit einer Lösung

$$x_c(t) := ce^{\int p(t)dt}$$

der homogenen Gleichung $x' = p(t)x$.

Beweis. $x - x_s$ löst die homogene lineare Gleichung. $\square$

Wie findet man nun eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen Gleichung $x' = p(t)x + q(t)$?

1. Methode: Variation der Konstanten

Wir betrachten eine Lösung $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ der homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ und machen den folgenden Ansatz: Angenommen,

$$x_s(t) := c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$$

löse die inhomogene, lineare DG $x' = p(t)x + q(t)$.
Man bestimmt daraus die Funktion $c(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(t)x_s + q(t) \quad = \quad x_s' &= c'(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + c(t) \cdot p(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} \\ &= c'(t) \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + p(t) \cdot x_s(t). \end{aligned}$$

Folglich muss $c'(t) = q(t) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}$ gelten und somit $c(t) = \int q(t) \cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}\,dt$. Mit dieser Funktion ist $x_s(t) = c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ eine Lösung der inhomogenen, linearen DG $x' = p(t)x + q(t)$.

Beispiel zur Variation der Konstanten

Wir betrachten die inhomogene, lineare Differentialgleichung

$$x' = tx + te^{t^2} \quad \text{mit Anfangsbedingung } x(0) = x_0. \tag{14}$$

- Allgemeine Lösung der homogenen DG $x' = tx$ ist $x(t) = ce^{\frac{1}{2}t^2}$.
- Variation der Konstanten: Sei $x_s(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ eine spezielle Lösung.

$$x_s'(t) = c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + c(t)te^{\frac{t^2}{2}} = c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + tx_s(t) \overset{(14)}{\Longrightarrow} c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = te^{t^2}$$

Folglich ist $c' = te^{\frac{t^2}{2}} = (e^{\frac{t^2}{2}})'$ und somit $c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.
- Spezielle Lösung: $x_s(t) = e^{t^2}$ der inhomogenen, linearen DG.
- Allgemeine Lösung $x(t) = e^{t^2} + ce^{\frac{t^2}{2}}$ mit $c \in \mathbb{R}$.
- Konstante c aus AB $x(0) = x_0$ gibt $x_0 = 1 + c$ und somit

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + x_0 - 1\right).$$

als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (14).

2. Methode: Ansätze für x_s bei $p(t) \equiv p \neq 0$ konstant

Wir betrachten die inhomogene lineare DG $x'(t) = px(t) + q(t)$ mit $p \neq 0$ konstant.

(1) Ist die "Störfunktion" $q(t)$ ein Polynom $h(t)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten, so setze für $x_s(t)$ ein Polynom Q vom Grad m an.

(2) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot e^{at}$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q(t) \cdot e^{at}$ $(p \neq a)$ bzw. $t \cdot Q(t) \cdot e^{at}$ $(p = a)$ an mit h, Q wie oben.

(3) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt)$ oder $h(t) \cdot \sin(bt)$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t) \cdot \cos(bt) + Q_2(t) \cdot \sin(bt)$ an.

(4) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt) \cdot e^{at}$ oder $h(t) \cdot \sin(bt) \cdot e^{at}$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t)e^{at} \cdot \cos(bt) + Q_2(t)e^{at} \cdot \sin(bt)$ an.

Dann setzt man den Ansatz in die inhomogene, lineare DG ein und berechnet die Koeffizienten des Polynoms $Q(t)$ durch Koeffizientenvergleich.

Die Bernoullische Differentialgleichung

Definition

Eine Bernoullische DG ist eine DG des folgenden Types

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^{\alpha}, \tag{15}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$ und $p, q \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Eine Bernoullische DG wird durch die Substitution $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$ behandelt. Man erhält

$$\begin{aligned} u' &= (1-\alpha)x^{-\alpha} \cdot x' \overset{(15)}{=} (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^{\alpha}) \\ &= (1-\alpha)p(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)q(t) \\ &= (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t)\ , \end{aligned}$$

also eine inhomogene lineare DG für $u(t)$. Aus deren Lösung $u(t)$ erhält man $x(t) = u(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ als Lösung der Bernoullischen DG.

Beispiel zur Bernoullischen Differentialgleichung

Wir betrachten eine Bernoullische DG

$$x' = -x + t\sqrt{x}\,, \quad \text{d.h. } \alpha = 1/2. \tag{16}$$

• Wir setzen $u(t) := x(t)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$u' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' \overset{(16)}{=} \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x + t\sqrt{x}) \;=\; -\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}t = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}t. \tag{17}$$

• Für die homogene lineare DG $u' = -\frac{1}{2}u$ erhält man als allgemeine Lösung $u(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

• Um eine spezielle Lösung u_s der inhomogenen, linearen DG (17) $u' = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$ zu finden, machen wir den Ansatz mit einem Polynom ersten Grades als Lösung: $u_s = at + b$. Daraus ergibt sich

$$a \;= u_s' \;=\; -\frac{1}{2}u_s + \frac{1}{2}t \;=\; -\frac{1}{2}(at+b) + \frac{1}{2}t.$$

Dies hat die Lösung $a = 1$ und $b = -2$, also $u_s(t) = t - 2$.

Weiter im Beispiel zur Bernoullischen Differentialgleichung

Damit haben wir mit $u_s(t) = t - 2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DG (17) gefunden. Somit ist $u(t) = t - 2 + c\;e^{-\frac{1}{2}t}$ eine allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen DG (16), und wir erhalten

$$x(t) = \left(t - 2 + c\;e^{-\frac{1}{2}t}\right)^2$$

als allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung (16) $x' = -x + t\sqrt{x}$.

Exakte Differentialgleichung

Sei $V = (P, Q)\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Falls es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\operatorname{grad} F(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)),$$

eine sogenannte Potentialfunktion des Vektorfelds V, so muss wegen des Lemmas von Schwarz gelten

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}. \tag{18}$$

Bemerkung

Ist die offene Menge U sternförmig, so findet man zu jedem stetig differenzierbaren Vektorfeld $V = (P, Q)\colon U \to \mathbb{R}^2$, welches $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ erfüllt, auch eine Potentialfunktion $F \in C^2(U, \mathbb{R})$, also $V = \operatorname{grad} F$.

Exakte Differentialgleichung

Definition

Seien $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R}),\ U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und gelte auf U

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \text{und} \quad Q \neq 0. \tag{19}$$

Dann heißt die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$P(t, x(t)) + Q(t, x(t)) \cdot x'(t) = 0 \tag{20}$$

exakte Differentialgleichung. (19) heißt die Integrabilitätsbedingung.

Satz

Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine Potentialfunktion, also $\frac{\partial F}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2} = Q$. Es gelte $Q \neq 0$; dann erhält man eine Lösung der exakten DG (20) mit der AB $x(t_0) = x_0$ durch Auflösen der (Erhaltungs-)Gleichung

$$F(t, x) - F(t_0, x_0) = 0 \qquad \textit{nach } x.$$

Beweis. Wegen des Lemmas von Schwarz ist die Integrabilitätsbedingung (19) erfüllt, d.h. es liegt eine exakte Differentialgleichung vor.
Da $\frac{\partial F}{\partial x_2}(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) \neq 0$, folgt nach dem Satz über implizite Funktionen die eindeutige Auflösbarkeit von $F(t,x) - F(t_0, x_0) = 0$ nach x in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Das heißt, es existiert eine C^1–Funktion $x\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t_0) = x_0$ und

$$F(t, x(t)) - F(t_0, x_0) = 0 \ .$$

Differenzieren nach t ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x(t))}_{=P(t,x(t))} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x(t))}_{=Q(t,x(t))} \cdot x'(t) = 0.$$

Somit erfüllt die Auflösung nach $x(t)$ die exakte Differentialgleichung. $\square$

Beispiel zur exakten DG

Wir betrachten die DG $(t + x + 1) + (t + x)x' = 0$ mit AB $x(t_0) = x_0$ auf dem Gebiet $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + x_2) > 0\}$. Diese ist exakt:

$$P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1, \quad Q(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \ \text{ also } \ \frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Eine bis auf eine Konst. c eindeutige Potentialfkt. F von (P, Q) ist:

$$F(x_1, x_2) \ = \ \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + x_1 + c$$

Wir lösen $0 = F(t,x) - F(t_0, x_0) = \frac{1}{2}(t + x)^2 + t - \frac{1}{2}(t_0 + x_0)^2 - t_0$ nach x auf und erhalten $(t + x)^2 = 2(t_0 - t) + (t_0 + x_0)^2$ und somit

$$x(t) = \sqrt{(t_0 + x_0)^2 + 2(t_0 - t)} - t,$$

da $x + t > 0$. Die Funktion $x(t)$ ist Lösung der gegebenen DG und der Definitionsbereich von x ist $\{t \in \mathbb{R} \mid t_0 + \frac{(t_0 + x_0)^2}{2} \geq t\}$.

Exakte Differentialgleichung: Integrierender Faktor

Ist die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ für die DG $P + Q \cdot x' = 0$ nicht erfüllt, so kann die Exaktheit durch die Multiplikation mit $\lambda \in C^1(U)$ erreicht werden.

Definition

Eine stetige Funktion $\lambda \in C^1(U)$, $\lambda \neq 0$ heißt integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator) der DG $P + Q \cdot x' = 0$, falls $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x_1}$.

Es ist dann $(\lambda P) + (\lambda Q) \cdot x' = 0$ exakte DG mit unveränderten Lösungen.

Beispiel

Sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1,\ x_2 > 0\}$. Wir betrachten die DG

$$5t^4 + 2x^3 + 3tx^2 \cdot x' = 0. \tag{21}$$

Hier ist $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 6x_2^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 3x_2^2$, das heißt (21) ist nicht exakt. Aber die Funktion $\lambda(x_1, x_2) = x_1$ ist ein integrierender Faktor für die DG (21); wir können die exakte DG $5t^5 + 2tx^3 + 3t^2x^2 \cdot x' = 0$ lösen.

Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche DG'en

Wir haben gesehen, wie sich bestimmte gewöhnliche DG'en (eindeutig) lösen lassen. Im folgenden Abschnitt wollen wir allgemeine Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen machen.
Dazu muss die "rechte Seite" f eine Bedingung erfüllen, die stärker ist als die der Stetigkeit und die wir schon vom Schrankensatz kennen.

Definition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$.

f heißt auf einer Teilmenge $K \subseteq \Omega$ bezüglich x Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $L_K \geq 0$, wenn

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L_K \|x_1 - x_2\| \qquad (*)$$

für alle $(x_1, t), (x_2, t) \in K$.
f heißt auf Ω bezüglich x lokal Lipschitzstetig, wenn es zu jedem $p \in \Omega$ eine Umgebung U von p gibt, so dass $(*)$ für alle $(x_1, t), (x_2, t) \in U \cap \Omega$ mit einer Konstanten L_U gilt, die von U abhängen kann.

Bemerkung zur Lipschitzstetigkeit

Wir erinnern an den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit: Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen heißt gleichmäßig stetig auf X, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ für alle $x \in X$.
Es gilt:

$$\text{Lipschitzstetigkeit} \Rightarrow \text{gleichm. Stetigkeit} \Rightarrow \text{Stetigkeit.}$$

Die erste Implikation beweist man, indem man $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ wählt.
Beispiele:

- $f(x) = \cos(x)$ ist nach dem Schrankensatz Lipschitzstetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante $L = 1$.
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn $f(x+\delta) - f(x) = \frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x} = \frac{-\delta}{x(x+\delta)} \to_{x\to 0} \infty$.
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ ist als stetige Abbildung auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig auf Intervallen $(0,a)$ und damit nicht lokal Lipschitzstetig, denn $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \to_{x,y\to 0} \infty$.

Lipschitzbedingung

Satz (Lipschitzbedingung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, d.h. stetig differenzierbar. Ist $K \times [a,b] \subseteq \Omega$ mit K kompakt und konvex, dann ist f auf $K \times [a,b]$ bezüglich x Lipschitzstetig. Insbesondere ist f auf Ω bezüglich x lokal Lipschitzstetig.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Schrankensatz, der sich wiederum aus dem Mittelwertsatz ergab: Da $K \times [a,b] \subseteq \Omega$ kompakt und konvex ist und f stetig differenzierbar, ist nach dem Schrankensatz f auf $K \times [a,b] \subseteq \Omega$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L. Insbesondere gilt

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq L\|(x_1,t) - (x_2,t)\| = L\|(x_1 - x_2, 0)\| = L\|x_1 - x_2\|,$$

und somit ist f auf $K \times [a,b]$ Lipschitzstetig bezüglich x. $\square$

Der Satz von Picard–Lindelöf

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)

Sei $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(x_0, t_0) \in U$ und $a, b > 0$ so, dass

$$Q := \overline{B_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq U,$$

wobei $\overline{B_b(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius b um x_0 ist. Sei F Lipschitzstetig auf Q bzgl. der x–Variablen und

$$M := \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\| \quad \text{und} \quad \sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Dann hat das AWP $\boxed{x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0}$ genau eine C^1-Lösung

$$x\colon [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

für die gilt $x(t) \in \overline{B_b(x_0)}$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Beweis. Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz auf eine Abbildung zwischen Funktionenräumen anwenden. Sei $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$. Dazu betrachten wir um die Funktion, die konstant x_0 ist, die abgeschlossene Kugel $\overline{B_b}$ im Banachraum $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$, d.h.

$$K := \{\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n) | \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \quad \forall t \in I\}$$

Da K eine abgeschlossene Teilmenge im vollständigen metrischen Raum $(C(I, \mathbb{R}^n), d_\infty)$ ist, ist K selbst ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun den Integraloperator

$$\begin{array}{rcrcl} H & : & K & \to & C(I, \mathbb{R}^n) \\ & & x & \mapsto & \left(H(x) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s)\, ds\right). \end{array}$$

Wegen der Wahl von $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ gilt $H\colon K \to K$, denn

$$\|H\varphi(t) - x_0\| = \|\int_{t_0}^t F(\varphi(s), s)\| \leq M\sigma \leq M\tfrac{b}{M} = b.$$

Ein Fixpunkt von H ist nun eine Lösung des AWP's, denn

$$x(t) \overset{\text{FP}}{=} Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s)\, ds \iff x'(t) = F(x(t), t), x(t_0) = x_0.$$

Weiter im Beweis: Ist L Lipschitzkonstante von F, so ist H Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L\sigma$, denn

$$\|Hx(t)-Hy(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(x(s),s)-F(y(s),s)\| ds \leq L\int_{t_0}^{t} \|x(s)-y(s)\| ds \tag{22}$$

und somit $\|Hx - Hy\|_\infty \leq L\sigma\|x-y\|_\infty$.
Um mittels des Banachschen Fixpunktsatzes einen Fixpunkt zu finden, muss H kontrahierend sein. Im allgemeinen ist H aber nicht kontrahierend Wir führen daher eine neue Norm ein, bzgl. derer H kontrahierend ist. Dazu wählen wir eine beschränkte Funktion $\alpha \in C(I,[r,s])$ und definieren eine modifizierte Norm auf $C(I,\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\|_\alpha := \max_{t\in I} \|e^{\alpha(t)}\varphi(t)\|.$$

Diese ist äquivalent zu $\|.\|_\infty$, denn $e^r\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\alpha \leq e^s\|\varphi\|_\infty$. Damit ist auch $(C(I,\mathbb{R}^n),\|.\|_\alpha)$ ein Banachraum und $K \subseteq C(I,\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_\alpha$. D.h. auch (K,d_α) ist ein vollständiger metrischer Raum.

Ende des Beweises: Wir wählen nun $\alpha(t) := -L|t-t_0|$, somit $\alpha \in C(I,[-L\sigma,0])$. Multiplizieren wir nun die Ungleichung (22) mit $e^{\alpha(t)} = e^{-L|t-t_0|}$, so erhalten wir für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}\left\|e^{\alpha(t)}\left(Hx(t)-Hy(t)\right)\right\| &\leq Le^{\alpha(t)}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)}e^{\alpha(s)}\|x(s)-y(s)\| ds\\ &\leq Le^{-L|t-t_0|}\underbrace{\left|\int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|}ds\right|}_{=\frac{1}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)}\|x-y\|_\alpha\\ &\leq \left(1-e^{-L\sigma}\right)\|x-y\|_\alpha\end{aligned}$$

D.h. aber, dass H kontrahierend ist bezüglich d_α:

$$\|Hx-Hy\|_\alpha \leq \underbrace{(1-e^{-L\sigma})}_{<1}\|x-y\|_\alpha$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist H konstant oder hat genau einen Fixpunkt $x \in K$ und somit genau eine Lösung x des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$ mit dem Definitionsbereich $I = [t_0-\sigma, t_0+\sigma]$ und dem Bild $x(I) \subseteq \overline{B_b(x_0)}$. □

Approximative Lösung des AWP's

Folgerung

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf liefert der Banachsche Fixpunktsatz ein Verfahren zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$: Sei

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \qquad \varphi_1 := H\varphi_0, \quad \ldots, \qquad \varphi_n := H\varphi_{n-1}, \ \ldots$$

iterativ definiert. Dann konvergiert φ_n gleichmäßig gegen die Lösung x des AWP's in $(C(I, \overline{B_b(x_0)}), \|.\|_\infty)$. Die Abschätzungen in jedem Schritt liefern

$$\|x(t) - \varphi_n(t)\| \ \leq \ \frac{M\ L^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}.$$

Zum Beweis dieser Folgerung benutzt man den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes und eine Induktion über n.

Lokale Version des Satzes von Picard–Lindelöf

Folgerung (Picard–Lindelöf lokal)

Sei $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal Lipschitzstetig bzgl. x ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Lösung $\varphi_{x_0}\colon \ (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x,t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Da F lokal Lipschitzstetig ist, finden wir zu jedem $(x_0, t_0) \in U$ eine Umgebung V auf der F Lipschitzstetig ist mit Lipschitz-Konstante L. Darin finden wir nun eine kompakte Menge $Q = \overline{B_\delta(x_0)} \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, so dass $\varepsilon \leq \delta / M$ und $L\varepsilon < 1$ (M wie im Beweis des Satzes).
Im Beweis des Satzes hatten wir gesehen, dass $L\varepsilon$ die Kontraktionskonstante für den Integraloperator H ist, d.h. dass H für dieses ε kontrahierend ist. Die Behauptung folgt nun wieder aus dem Banachschen Fixpunktsatz. $\square$

Eindeutigkeit der Lösung

Wir brauchen ein Lemma:

Lemma

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $D \subseteq I$ eine nicht-leere Teilmenge, die in I offen und abgeschlossen ist. Dann gilt $D = I$.

Beweis. Angenommen, $D \subsetneq I$, dann ist die Menge $I \setminus D$ nicht leer, offen und abgeschlossen. Finde $p_1 \in D$ und $p_2 \in I \setminus D$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $p_1 < p_2$ gilt. Definiere

$$p := \sup D \cap [p_1, p_2] \; .$$

Dann muss $p \in D$ oder $p \in I \setminus D$ gelten.
• Angenommen, $p \in D$. Da D offen ist, finde $\epsilon > 0$, so dass auch noch $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subseteq D$, im Widerspruch dazu, dass p obere Schranke ist.
• Angenommen, $p \in I \setminus D$. Da auch $I \setminus D$ offen ist, finde $\epsilon > 0$, so dass $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subseteq I \setminus D$, im Widerspruch dazu, dass p kleinste obere Schranke ist. □

Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x lokal Lipschitzstetig. Seien $\varphi, \psi\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $x' = F(x, t)$ mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$. Dann gilt $\varphi = \psi$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $D := \{t \in I \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$. Dann ist

- D nicht leer, denn $t_0 \in D$,
- D ist abgeschlossen, denn φ und ψ sind stetig und $D = (\varphi - \psi)^{-1}(0)$.
- D ist offen in I: Sei dazu $t \in D$. Dann sind φ, ψ Lösungen des AWP's $x' = F(x, t)$, $x(t) = \varphi(t) = \psi(t)$. Nach Picard–Lindelöf lokal existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi \equiv \psi$ auf $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq I$. Dann ist aber $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq D$. D.h. D ist offen in I.

Damit ist D nicht leer, offen und abgeschlossen im Intervall I.
Somit ist $D = I$. □

Fortsetzung zur maximalen Lösung

Definition

Eine Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *des Anfangswerteproblems (*)* $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$, *heißt maximal, falls für jede andere Lösung* $\psi\colon J \to \mathbb{R}^n$ *von (*) gilt, dass* $J \subseteq I$.

Folgerung (Satz über die maximale Lösung)

Sei $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und lokal Lipschitzstetig bezüglich* x. *Dann existiert zu jedem* $(x_0, t_0) \in U$ *genau eine maximale Lösung* $\varphi_{x_0}\colon (a_{x_0}, b_{x_0}) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *des Anfangswerteproblems* $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0$.

Beweis. Sei $(x_0, t_0) \in U$. Wir definieren die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned} a_{x_0} &:= \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}\} \\ b_{x_0} &:= \sup\{b \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

mit $a_{x_0} < x_0 < b_{x_0}$. Auf dem offenen Interval $I_{\max} := (a_{x_0}, b_{x_0}) \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}\colon I_{\max} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi(t), \quad \text{falls } t \in (a,b) \text{ und } \varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n \text{ eine} \\ & \qquad\qquad \text{Lsg. des AWP's } x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist diese wohldefinert, da zwei auf einem Intervall gegebene Lösungen übereinstimmen. Alle Lösungen sind C^1–Abbildungen, und damit auch φ_{x_0}.
Des Weiteren löst φ_{x_0} das Anfangswertproblem $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0$ auf dem gesamten (und maximal möglichen) Intervall (a_{x_0}, b_{x_0}). $\square$

Globale Existenz- und Eindeutigkeit

Satz

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und $F \colon \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$, wobei $J \subsetneq I$ ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$ eine eindeutige, auf ganz I definierte maximale Lösung $\varphi_{x_0} \colon I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x, t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf: Sei $J \subseteq I$ ein kompaktes Intervall. Da $F \colon \mathbb{R}^n \times J \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig ist, ist der Integraloperator H aus dem Beweis eine Lipschitzstetige Abbildung von $C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n)$. Wie im Beweis weist man dann nach, dass H kontrahierend ist (bzgl. der geänderten Norm). Somit erhält man für jedes kompakte $J \subseteq I$ eine eindeutige Lösung $\varphi \colon J \to \mathbb{R}^n$ des AWP's. Diese kann man nun wie im Satz über die maximale Lösung zu einer Lösung auf I fortsetzen. □

Maximale Lösung des linearen Anfangswertproblems

Folgerung (Maximale Lösung des linearen AWP's)

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, $A \colon I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} \colon I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann besitzt das lineare AWP

$$x' = A(t)x + \mathbf{b}(t), \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} \colon I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. $F(x, t) := A(t)x + \mathbf{b}(t)$ ist Lipschitzstetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$ mit einem kompakten Intervall $J \subsetneq I$:

$$\|F(y, t) - F(x, t)\| = \|A(t)y - A(t)x\| = \|A(t)(y - x)\| \le \max_{t \in J} \|A(t)\| \|y - x\|,$$

wobei $\|A(t)\| = \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| = 1} \|A(t)\xi\|$. Die Lipschitz-Konstante ist $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$. Die Behauptung folgt dann aus dem vorhergehenden Satz. □

Existenzsatz von Cauchy und Peano

Zum Abschluss geben wir noch einen allgemeineren Existenzsatz an, ohne ihn zu beweisen. Die Voraussetzungen sind schwächer (Stetigkeit statt Lipschitz-Stetigkeit), dafür erhält man keine Eindeutigkeitsaussage.

Satz (Existenzsatz von Cauchy und Peano)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $(x_0, t_0) \in U$. Die Abbildung $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf dem kompakten Bereich

$$Q := \overline{B_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq U.$$

Bezeichne wieder $M := \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\|$ und $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Dann hat das AWP $\boxed{x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0}$ mindestens eine C^1-Lösung

$$x\colon [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

und diese erfüllt $\|x(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Für einen Beweis siehe H. Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Beispiel zur Mehrdeutigkeit der Lösung

Wir betrachten die stetige Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \sqrt{|x|}$ und das Anfangswertproblem

$$x' = F(x) = \sqrt{|x|}, \quad x(t_0) = 0.$$

Wir haben gesehen, dass F nicht lokal Lipschitzstetig ist, so dass wir nicht den Satz von Picard–Lindelöf anwenden können. Nach dem Satz von Peano gibt es jedoch mindestens eine Lösung, z.B. $x(t) \equiv 0$. Man findet jedoch unendlich viele weitere Lösungen, denn für jede Konstante $c \geq t_0$ ist

$$x_c(t) := \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4} & \text{für} \quad t \geq c \\ 0 & \text{für} \quad t \leq c \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (ÜA).

Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung von den Anfangswerten abhängt. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma (Gronwall–Ungleichung)

Seien $u, v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetige, nichtnegative Funktionen und gelte

$$v(t) \le c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \qquad \text{für alle } t \in [a,b],$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Dann gilt

$$v(t) \le c \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds} \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

Beweis. 1. Fall: $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \; > \; 0.$$

Es gilt $0 < c \le f(t)$ und $v(t) \le f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt

$$f'(t) = v(t) \cdot u(t) \le f(t) \cdot u(t) \quad \text{und deshalb} \quad (\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} \le u(t).$$

Durch Integration erhält man

$$\ln(f(t)) - \ln(f(a)) \le \int_a^t u(s)\,ds, \;\text{ also }\; f(t) \le f(a) \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}$$

Folglich ist $v(t) \le f(t) \le c \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds}$ wegen $c = f(a)$.
2. Fall: $c = 0$. Hier ist zu zeigen, dass $v(t) \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist

$$v(t) \le \int_a^t v(s)u(s)\,ds \le \varepsilon + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],\; \varepsilon > 0.$$

Nach dem 1. Fall folgt dann $0 \le v(t) \le \varepsilon \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}$ für alle $\varepsilon > 0$.
Lassen wir ε gegen 0 gehen, so folgt $v(t) \equiv 0$. $\square$

Stetige Abhängigkeit der Lösung von den AB

Satz

Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf U stetig und Lipschitzstetig in x mit der Lipschitzkonstanten L. Seien (x_0, t_0), $(y_0, t_0) \in U$ und

$$\varphi_{x_0}\ ,\ \varphi_{y_0} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Lösungen der DG $x' = F(x,t)$ mit den Anfangsbedingungen $\varphi_{x_0}(t_0) = x_0$ bzw. $\varphi_{y_0}(t_0) = y_0$. Dann gilt

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \forall\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\,.$$

Folgerung (Stetige Abhängigkeit der Lösung von der AB)

Sei F wie im Satz, und definiere $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von AB'en, die gegen die AB mit x_0 konvergiert. Sei φ_{x_n} die Lösung des AWP's $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_n$. Dann konvergiert (φ_{x_n}) gleichmäßig gegen φ_{x_0} auf jedem kompakten Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, auf dem alle Lösungen definiert sind.

Beweis. $v(t) := \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\|^2$ ist diffbar. Für $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v'(s)ds \qquad\qquad [\text{Hauptsatz}] \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \langle \varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s), \varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\rangle\, ds \\
&\overset{\text{CS-U.}}{\leq} v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\| \cdot \|\varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\|\, ds \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\| \cdot \|F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{y_0}(s), s)\| ds \\
&\leq v(t_0) + 2L\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\|^2}_{=v(s)}\, ds
\end{aligned}$$

Aus der Gronwall–Ungleichung für $u(s) \equiv 2L$ folgt dann

$$v(t) \leq v(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} 2L\, ds} = v(t_0) \cdot e^{2L(t-t_0)}.$$

Damit erhält man die Behauptung $\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot e^{L(t-t_0)}$ für alle $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Analog geht man für $t_0 - \varepsilon < t \leq t_0$ vor. $\square$

Beispiel zur Abhängigkeit der Lsg. von den AB's

Wir betrachten das folgende Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^2$:

$$V(x,y) := (-y,x) + (r^2(x,y)-1)\,(x,y)\,,$$

wobei $r^2(x,y) := x^2+y^2$. Wir suchen die Integralkurven von V durch einen Punkt $(x_0,0) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 > 0$, d.h. wir müssen das autonome AWP

$$\gamma_{x_0}'(t) = V(\gamma_{x_0}(t)) \quad \text{mit} \quad \gamma_{x_0}(0) = (x_0,0) \tag{23}$$

lösen. Schreiben wir $\gamma_{x_0} = (x,y)$, so ist das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y+(r^2-1)x, \\ y' & = & x+(r^2-1)y \end{array} \;,\quad x(0)=x_0 \quad y(0)=0$$

zu lösen. Wir machen den folgenden Ansatz für die Lösung γ_{x_0}:

$$\gamma_{x_0}(t) \;=\; h(t)(\cos(t),\sin(t))$$

für eine Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = x_0$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen | Abhängigkeit der Lösung von den AB'en

Dann gilt $r^2(\gamma_{x_0}(t)) = h^2(t)$. Ist $\gamma_{x_0}(t) \;=\; h(t)(\cos(t),\sin(t))$ eine Integralkurve von V, so gilt

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{x_0}'(t) & = & h'(t)(\cos(t),\sin(t)) + h(t)(-\sin(t),\cos(t)) \\ & \overset{(23)}{=} & h(t)(-\sin(t),\cos(t)) + (h^2(t)-1)h(t)(\cos(t),\sin(t)) \end{array}$$

Also muss h das autonome AWP $h' = h(h^2-1)$, $\;h(0) = x_0$ erfüllen. Dies löst man mittels Trennung der Variablen und erhält

$$h(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} - \left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)}}.$$

Ist nun $x_0 \leq 1$, so ist $\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right) \leq 0$ und damit ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist dagegen $x_0 > 1$, so ist $0 < \left(1-\frac{1}{x_0^2}\right) < 1$ und damit ist h nur definiert auf dem Intervall $I = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)\right) \subseteq \mathbb{R}$ um $t_0 = 0$.

Noch ein Beispiel für Trennung der Variablen

Wir rechnen noch einmal die Lösung des AWP $h' = h(h^2 - 1)$ mit Anfangsbedingungen $h(0) = x_0$ durch Trennung der Variablen nach: Es ist $f(t) = 1$ und $g(x) = x(x^2 - 1)$ und

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

mit Stammfunktion, wobei wir hier im Fall $x > 1$ rechnen:

$$G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{1}{x^2}) \ .$$

Es folgt $G^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}}$ und somit als Lösung des AWP

$$G^{-1}(t + \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{1}{x_0^2})) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle für die Integralkurven $\gamma_{x_0}(t) = h(t)(\cos(t), \sin(t))$:

- $\underline{x_0 = 1}$: Hier ist $h(t) \equiv 1$ und die Integralkurve ist ein Kreis.
- $\underline{0 < x_0 < 1}$: Hier sind die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Spiralen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Das Quadrat des Abstandes zum Nullpunkt $r^2(t) := r^2(\gamma_{x_0}(t))$ ist

  $$r^2(t) = h^2(t) = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)} = \frac{1}{1 - e^{2t}\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}$$

  und erfüllt $r^2(t) \to_{t\to-\infty} 1$ und $r^2(t) \to_{t\to\infty} 0$. D.h. die Spiralen laufen für $t \to \infty$ in die Null und nähern sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis an.
- $\underline{x_0 > 1}$: Die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)\right) \to \mathbb{R}^2$ sind Spiralen, die sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis annähern, und für $t \to -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)$ in endlicher Zeit gegen ∞ gehen.

Lineare Differentialgleichungen mit Werten im $\mathbb{R}^n$

Wir haben Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ kennengelernt. In diesem Kapitel verallgemeinern wir diese und behandeln lineare Differentialgleichungen mit Werten im $\mathbb{R}^n$.
Sei $I = (a_0, b_0) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-\infty \leq a_0 < b_0 \leq \infty$ und

$$A\colon I \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}), \quad b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\begin{array}{lcll} x' & = & A(t)x & \text{homogenes, lineares DG System,} \\ x' & = & A(t)x + b(t) & \text{inhomog., lin. DG System mit Störfkt. } b(t). \end{array}$$

Gilt speziell $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$, so sagt man, das System habe konstante Koeffizienten.
Wir haben schon gesehen, dass es zu jeder Anfangsbedingung der Form $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in I$ genau eine maximale Lösung gibt, die auf ganz I definiert ist.

Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme

Satz (Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme)

Die Menge V der maximalen Lösungen $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ des linearen homogenen Systems (*) $x' = A(t)x$ ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.
Die Menge der maximalen Lösungen des linearen inhomogenen Systems (**) $x' = A(t)x + b(t)$ ist der affine Raum $\mathcal{A} = x_s + V$ wobei x_s eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist.

Beweis. Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen von $(*)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ eine Lösung von $(*)$. Zu jedem Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine maximale Lösung φ_{x_0}, d.h. die lineare Abb. $x_0 \to \varphi_{x_0}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, und somit ist $\dim V = n$.
Sei $\mathcal{A}$ der Lösungsraum des inhom. lin. Systems $(**)$. Wir wissen, dass eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen linearen DG $(**)$ existiert. Außerdem gilt für jede andere Lösung $x \in \mathcal{A}$, dass $x - x_s \in V$ und für jede Lösung $y \in V$, dass $x_s + y \in \mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A} = x_s + V$.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Definition (Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix)

Sei $A\colon I \to Mat_n(\mathbb{R})$ stetig und (*) $x' = A(t)x$ ein homogenes lineares DG-System.

- Eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des Lösungsraumes von (*) nennt man ein Fundamentalsystem zu (*).
- Die matrixwertige Funktion $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ aus den Spaltenvektoren φ_j heißt eine Fundamentalmatrix von (*).
- Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ Lösungen von (*). Die Funktion $W := \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Wronski-Determinante des (Fundamental-)Systems $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

- Bilden $\varphi_j = \sum_{i=1}^n \varphi_{ij} e_i$ ein Fundamentalsystem mit $\varphi_{ij}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und e_i die kanonische Basis, dann ist die Fundamentalmatrix gegeben durch $\Phi = (\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$.
- n Lösungen von (*) bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronski-Determinante für ein t nicht verschwindet.

Eigenschaften der Fundamentalmatrix

Sei Φ eine Fundamentalmatrix zu $(*)$. Dann gilt:

1. Φ ist eine Lösung des linearen homogenen Systems $X' = A \cdot X$ mit Werten in $\mathbb{R}^{n^2}$.
2. Eine Lösung des homogenen Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch
$$\varphi(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0$$
3. Ist $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, d.h. S invertierbar, so ist $\Phi \cdot S$ ist auch eine Fundamentalmatrix.

Beweis.
1) $\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) = A \cdot \Phi$.
2) $\varphi'(t) = \Phi'(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\varphi(t)$.
3) $(\Phi \cdot S)' = \Phi' \cdot S = A \cdot \Phi \cdot S$. $\square$

Beispiel

Sei $\omega \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Wir betrachten das homogene lineare DG-System mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} x_1' &= -\omega x_2 \\ x_2' &= \omega x_1 \end{cases}, \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalystem wird von den folgenden beiden Funktionen gebildet

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Diese entsprechen den Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = e_1$ und $\varphi_2(0) = e_2$.
Zu einer beliebigen Anfangsbedingungen $x(0) = c_1 e_1 + c_2 e_2$ erhalten wir die Lösung $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$.
Die Fundamentalmatrix zu φ_1, φ_2 ist dann gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Spezielle Lösungen des inhomogenen Systems

Wie im eindimensionalen Fall erhält man spezielle Lösungen der inhomogenen lin. DG $x' = A(t)x + b(t)$ aus einem Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DG mittels Variation der Konstanten.

Satz (Variation der Konstanten)

Seien $A\colon I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\Phi\colon I \to Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix des linearen homogenen Systems $x' = A(t)x$. Dann ist

$$\psi_s(t) := \Phi(t)u(t)$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $x' = A(t)x + b(t)$, wobei $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$, d.h.

$$(*) \qquad u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds + v$$

mit einem konstanten Vektor v. Gibt man zur inhomogenen DG die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ vor, so ist $v := \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Beweis. Für $u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds + v$ wie in $(*)$ gilt dass $u'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ und damit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$. Damit gilt für $\psi_s(t) = \Phi(t)u(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_s'(t) &= \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) && \text{[Produktregel]} \\ &= A(t)\Phi(t)u(t) + b(t) &&= A(t)\psi_s(t) + b(t). \end{aligned}$$

Also ist $\psi_s(t) = \Phi(t)u(t)$ eine spezielle Lösung. □

Bemerkung

Ist $v = (v_1, \dots, v_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, so ist mit $\int_{t_0}^{t} v(s)ds$ die folgende differenzierbare Abbildung gemeint

$$I \ni t \mapsto \int_{t_0}^{t} v(s)ds \; := \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} v_n(s)ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel

Wir betrachten das inhom. lin. DG-System mit konst. Koeffizienten

$$\begin{cases} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_1 + t \end{cases}, \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{=b(t)}$$

Wir müssen nun folgendes tun, um eine spezielle Lösung zu erhalten:

1) Bestimmen der Fundamentalmatrix (bereits bekannt, s.o.):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

2) Invertieren von Φ, $\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, und damit

$$\Phi(t)^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

3) Integrieren von

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s\sin(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} ds$$

Dies berechnen wir mit partieller Integration und erhalten

$$\begin{aligned} \int t\sin(t)dt &= -t\cos(t) + \sin(t) \\ \int t\cos(t)dt &= t\sin(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

und damit $u(t) = \begin{pmatrix} -t\cos(t) + \sin(t) \\ t\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\psi_s(t) = \Phi(t)u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t\sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Um ein Fundamentalsystem eines homog. lin. DG-Systems $x' = A(t)x$ zu bestimmen, betrachten wir den Spezialfall $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$ konstant.

Definition (Matrixexponential)

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Die Matrix $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ heißt Exponential von A.

Dies ist wohldefiniert, d.h. diese Reihe konvergiert:
1) Es gilt die folgende Ungleichung für die Operatornorm:
$\|AB\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\| \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|$.
2) Da $(Mat_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ ein Banachraum ist, reicht es, zu zeigen, dass die Partialsummen $S_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}$ eine Cauchy-Folge bilden. Es ist aber

$$\|S_m - S_{\ell-1}\| = \|\sum_{k=\ell}^{m} \frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} \to_{m,\ell\to\infty} 0,$$

denn die reellwertige Reihe $e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert. Die Reihe e^A konvergiert sogar absolut.

Lemma

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ und $\Phi\colon \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$, $\Phi(t) := e^{tA}$. Es sei eine Folge $\Phi_m\colon \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ von Abildungen definiert durch $\Phi_m(t) := \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}$. Dann konvergiert Φ_m auf jedem kompakten Intervall $K \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen Φ. Insbesondere ist die Funktion Φ stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $M := max\{|a|, |b|\} \cdot \|A\|$. Die konvergente Reihe $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ ist eine Majorante für die Exponentialreihe der Beträge $e^{\|tA\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!}$. Nach dem Cauchy-Kriterium finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein n_ε, so dass $\frac{M^m}{m!} + \ldots + \frac{M^\ell}{\ell!} < \varepsilon$ für alle $m \geq \ell \geq n_\varepsilon$. Somit gilt für alle $t \in K$ und $m \geq \ell \geq n_\varepsilon$, dass

$$\|\Phi_m(t) - \Phi_{\ell-1}(t)\| \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{|t|^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{M^k}{k!} \leq \varepsilon.$$

D.h., sowohl Φ_m als auch die Exponentialreihe der Beträge sind Cauchyfolgen in vollständigen metrischen Räumen und somit gleichmäßig konvergent auf dem kompakten Intervall K. Damit ist der Grenzwert Φ stetig auf allen kompakten Intervallen, und damit auch auf ganz $\mathbb{R}$. $\square$

Die Lsg. der homogenen DG mit konstanten Koeffizienten

Satz

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Dann ist die matrixwertige Funktion $\Phi\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix zu der homogenen linearen DG $x' = Ax$. Insbesondere ist zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die differenzierbare Abbildung $\varphi_{x_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\varphi_{x_0}(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$, die Lösung des AWP's $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Da A konstant ist, sind die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der Anfangswertprobleme $x' = Ax$, mit Anfangsbedingungen $x(0) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Sei $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die dazugehörige Fundamentalmatrix.
Nach der Iteration von Picard-Lindelöf wird jede dieser Lösungen φ_i auf kompakten Intervallen gleichmäßig approximiert durch Funktionen φ_{im} die sich durch iteratives Anwenden des Integraloperators H ergeben, d.h.

$$\varphi_{i0}(t) \equiv e_i,\ \ \varphi_{i1}(t) = e_i + \int_0^t A\varphi_{i0}(s)ds,\ \ \varphi_{im}(t) = e_i + \int_0^t A\varphi_{i\,m-1}(s)ds$$

Schreibt man Φ_m für die Matrix mit den Spalten $(\varphi_{1m}, \dots, \varphi_{nm})$, so ist

$$
\begin{aligned}
\Phi_0(t) &\equiv \mathbf{1}_n \\
\Phi_1(t) &= H\Phi_0(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A ds = \mathbf{1}_n + tA \\
\Phi_2(t) &= H\Phi_1(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A(\mathbf{1}_n + sA) ds = \mathbf{1}_n + tA + \tfrac{t^2A^2}{2} \\
&\vdots \\
\Phi_m(t) &= H\Phi_{m-1}(t) = \mathbf{1}_n + \int_0^t A\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{s^kA^k}{k!}\Big) ds = \sum_{k=0}^{m} \tfrac{t^kA^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Wir haben aber gesehen, dass die Folge von Abbildungen $\Phi_m \colon t \mapsto \sum_{k=0}^m \frac{t^kA^k}{k!}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen $\Phi(t) = e^{tA}$ konvergiert. Da die kompakten Intervalle beliebig groß sein können, erhält man dass $\Phi \colon \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ ist. Damit ist Φ differenzierbar und $\varphi(t) = \Phi(t)x_0$ die Lösung des AWP's $x(0) = x_0$. Dass $\psi(t) = \Phi(t - t_0)x_0$ eine Lsg. des AWP's $x(t_0) = x_0$ ist, folgt aus der Kettenregel. □

Beispiel

Wir betrachten wieder die homogene lin. DG mit konstanten Koeffizienten

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Dann rechnet man nach, dass $A^{2k+1} = (-1)^k A$ und $A^{2k} = (-1)^k \mathbf{1}_2$. Somit können wir das Exponential e^{tA} bestimmen:

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\Big) \mathbf{1}_2 + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big) A \\
&= (\cos t)\mathbf{1}_2 + (\sin t)A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Folgerung (Exponentialabbildung)

Für $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\Phi\colon (\mathbb{R},+) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Insbesondere ist $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\cdot\mathrm{e}^{sA} = \mathrm{e}^{sA}\cdot\mathrm{e}^{tA}$ und $(\mathrm{e}^{tA})^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}$

Beweis. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und seien φ und ψ Lösungen des AWP's $x' = Ax$ mit den jeweiligen Anfangsbedingungen $x(s) = x_0$ und $x(0) = x_0$. Nach dem vorherigen Satz gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $\varphi(t) = \mathrm{e}^{(t-s)A}x_0 = \psi(t-s)$. Somit erhalten wir mit Eigenschaften der Fundamentalmatrix, dass

$$\Phi(t)\Phi(s)^{-1}x_0 = \varphi(t) \;=\; \psi(t-s) = \Phi(t-s)\Phi(0)^{-1}x_0 = \Phi(t-s)x_0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir für alle $t,s \in \mathbb{R}$, dass

$$(*) \qquad \Phi(t)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t-s).$$

Dies impliziert aber die Behauptung

$$\Phi(t+s) = \Phi(t+s)\Phi(s)^{-1}\Phi(s) \overset{(*)}{=} \Phi(t)\Phi(s).$$

□

Folgerung (Weitere Eigenschaften der Exponentialabbildung)

Seien $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$.

1. *Ist $AB = BA$, dann gilt $A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B A$ und $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\cdot\mathrm{e}^B$.*
2. *Ist $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so ist $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\mathrm{e}^A B^{-1}$.*

Beweis. Alle Aussagen folgen aus der Eindeutigkeit der Lsg. eines AWP's. Sei z.B. $X(t) = A\mathrm{e}^{tB}$ und $Y(t) = \mathrm{e}^{tB}A$. Dann gilt $X(0) = Y(0) = A$ und

$$X'(t) = AB\mathrm{e}^{tB} = BA\mathrm{e}^{tB} = BX(t) \;\text{ sowie }\; Y'(t) = B\mathrm{e}^{tB}A = BY(t).$$

Aus der Eindeutigkeit der Lsg. des AWP's $X' = BX$, $X(0) = A$ folgt dann $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Sei weiter $U(t) := \mathrm{e}^{t(A+B)}$ und $V(t) = \mathrm{e}^{tA}\cdot\mathrm{e}^{tB}$. Dann gilt $U(0) = V(0) = \mathbf{1}_n$ und

$$U'(t) = (A+B)U(t) \;\text{ sowie }\; V'(t) = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} = (A+B)V(t)$$

und somit $U(t) = V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Die verbleibende Aussage beweist man analog. □

Zusammenfassung: Lineare DGn mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

1. Die eindeutige Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen AWPs $x' = Ax$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$.
2. Die eindeutige Lösung $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des inhomogenen AWP's $x' = Ax + b(t)$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist nach dem Satz über Variation der Konstanten gegeben durch
$$\psi(t) = \mathrm{e}^{tA}\Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA}b(s)ds + \mathrm{e}^{-t_0A}x_0\Big) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x_0 + \mathrm{e}^{tA}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA}b(s)ds.$$
3. Ist auch $b(t) \equiv b$ konstant, kann man das Integral sofort berechnen, falls A invertierbar ist. Dann ist $\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA}bds = -A^{-1}\mathrm{e}^{-sA}b|_{t_0}^{t}$ und somit $\psi(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x_0 + A^{-1}(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}b - b)$, denn A und damit auch A^{-1} kommutieren mit e^{tA}.
   Beachte, dass $-A^{-1}b$ eine (konstante) Lsg. von $y' = Ay + b$ ist.

Beispiel: Lineare Systeme mit diagonalisierbarem A

Sei nun A diagonalisierbar und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A: $Av_i = \lambda_i v_i$. Dann ist v_i auch Eigenvektor von e^A zum Eigenwert e^{λ_i}.

1. Setzen wir $\varphi_i(t) := e^{\lambda_i(t-t_0)}v_i$, dann bilden die $\varphi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems $x' = Ax$. Daher ist $\varphi_{x_0}(t) := \sum_{i=1}^n (x_0)_i\varphi_i(t)$ die Lsg. zur AB $x(t_0) = x_0 =: \sum_{i=1}^n (x_0)_i v_i$.
2. Eine spezielle Lsg. des inhomogenen Systems $x' = Ax + b$ mit konstantem b erhalten wir für $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$:
$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n b_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{-s\lambda_i}ds\Big)v_i = \sum_{i=1}^n c_i(t)v_i$$
   wobei $c_i(t) := \begin{cases} \frac{b_i}{\lambda_i}(\mathrm{e}^{\lambda_i t} - 1), & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ b_i\, t, & \text{falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$ und $b = \sum_{i=1}^n b_i v_i$.

Aber: Nicht jede quadratische Matrix ist diagonalisierbar!

Lineare Systeme in Jordanscher Normalform

Wir wollen nun die Jordansche Normalform von quadratischen Matrizen benutzen, um lineare Systeme in möglichst einfacher Form zu schreiben. Einem Basiswechsel entspricht dann eine Substitution:

Lemma

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\tilde{A} := S^{-1}AS$.
φ ist eine Lsg. von $x' = Ax \iff \psi = S^{-1}\varphi$ ist eine Lsg. von $y' = \tilde{A}y$.
Φ ist eine Fundamentallösung von $x' = Ax \iff S^{-1}\Phi S$ (und damit auch $S^{-1}\Phi$) ist eine Fundamentallösung von $y' = \tilde{A}y$.

Beweis. Da S eine konstante invertierbare Matrix ist, erhält man

$$(S^{-1}\varphi)'(t) = S^{-1}\varphi'(t) = S^{-1}A\varphi(t) = (S^{-1}AS)S^{-1}\varphi(t),$$

d.h. $S^{-1}\varphi$ ist eine Lösung von $y' = \tilde{A}y$.
Damit ist $S^{-1}\Phi$, und somit auch $S^{-1}\Phi S$ eine Fundamentallösung von $y' = \tilde{A}y$.
(Der letzte Punkt folgt auch aus $e^{tS^{-1}AS} = S^{-1}e^{tA}S$.) $\square$

Folgerung

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, d.h. $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann ist $\Phi(t) = S\, diag(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$ eine Fundamentalmatrix von $x' = Ax$.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2$, d.h. Eigenwerte sind $\pm\sqrt{2}$ mit Eigenvektoren $v_1 = e_1 + (\sqrt{2} - 1)e_2$ und $v_2 = e_1 - (\sqrt{2} + 1)e_2$.
Nun bilden die Spalten v_1, v_2 die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -(\sqrt{2} + 1) \end{pmatrix}$
und es ist $\det S = -2\sqrt{2}$, $S^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $S \begin{pmatrix} e^{t\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & e^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\sqrt{2}} & e^{-t\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} & -(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
eine Fundamentalmatrix der DG $x' = Ax$.

Problem: Nicht jede quadratische Matrix ist diagonalisierbar.

Beispiel

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrix

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_m(\mathbb{C})$$

Sie hat das charakteristische Polynom
$P(t) = \det(J_m(\lambda) - t\mathbf{1}_m) = (\lambda - t)^m$.
Somit ist λ der einzige Eigenwert, mit algebraischer Vielfachheit m.
Eigenvektoren v erfüllen $(J_m(\lambda) - \lambda\mathbf{1}_n)v = 0$. Der Eigenraum zu λ ist $\mathbb{C}e_1$, und die geometrische Vielfachheit von λ ist 1. Insbesondere kann die Matrix $J_m(\lambda)$ für $m \geq 2$ nicht diagonalisiert werden.

Satz (Jordansche Normalform)

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{C})$. Dann existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass

$$\widetilde{A} := SAS^{-1} = \mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \cdots, J_{m_k}(\lambda_k)),$$

wobei

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_m(\mathbb{C})$$

Hierbei sind λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A. Die Blockdiagonalmatrix auf der rechten Seite der Gleichung heißt Jordansche Normalform von A. Die Blöcke, d.h. die Matrizen $J_m(\lambda)$, heißen Jordanblöcke. Die Jordansche Normalform ist eindeutig bis auf Permutation der Jordanblöcke.

Zum **Beweis**:
Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Man kann zeigen, dass sich jede Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{K}$, für die das charakteristische Polynom über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, in die Jordansche Normalform überführen lässt. Nach dem Hauptsatz der Algebra folgt dann für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Behauptung des Satzes.

Beispiel für eine Matrix in Jordanscher Normalform

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{3} & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Eigenwert	alg. Vielf.	Geom. Vielf.
0	3	2
3	1	1
2	2	1

Satz (Reelle Jordansche Normalform)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. *Dann existiert* $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, *so dass* $\widetilde{A} = SAS^{-1}$ *folgende Gestalt hat*

$$\widetilde{A} = \mathrm{diag}(J_{\ell_1}(\lambda_1), \cdots, J_{\ell_r}(\lambda_r), J_{2m_1}(\alpha_1, \beta_1), \cdots, J_{2m_s}(\alpha_s, \beta_s)),$$

$$J_{2m}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta \mathbf{1}_m \\ \beta \mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2m, \mathbb{R})$$

Hierbei sind λ_i *die (nicht notw. verschiedenen) reellen Eigenwerte von* A, *sowie* $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ *und* $\overline{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$, *mit* $\beta_j > 0$, *die (nicht notw. verschiedenen) nicht reellen Eigenwertepaare von* A.[a]

[a] Die algebraische Vielfachheit eines reellen Eigenwerts λ (bzw. eines imaginären Eigenwerts μ) ist dabei also $\sum_{\lambda_i = \lambda} \ell_i$ (bzw. $\sum_{\mu_j = \mu} m_j$).

Für einen **Beweis** siehe z.B. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*: Man betrachtet $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ als Matrix in $Mat_n(\mathbb{C})$ und erhält komplexe Jordanblöcke. Für reelle Eigenwerte erhält man direkt reelle Jordanblöcke. Ist μ ein nicht reeller EW von A, so auch $\overline{\mu}$, denn A und somit das charakteristische Polynom von A sind reell.
Nun kombiniert man die Jordanblöcke von μ und $\overline{\mu}$ zu Blöcken (mit Einträgen aus $\mathbb{R}$) der Form $J_{2m}(\alpha, \beta)$.

□

Anwendung auf lineare DG'n

Sei $x' = Ax$ ein lineares DG-System mit konstanten Koeffizienten.
Sei $\tilde{A} := S^{-1}AS$, dann ist die Fundamentalmatrix der DG $x' = Ax$ gegeben durch $e^{tA} = Se^{t\tilde{A}}S^{-1}$.
Wir nehmen an, $\tilde{A}$ sei in Jordanscher Normalform, also $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \ldots + \tilde{A}_k$, wobei die $\tilde{A}_i$ jeweils nur einen Jordanblock oder nur eine Matrix der Form $J_{2m}(\alpha, \beta)$ enthalten, und sonst nur Nullen.
Dann kommutieren die Matrizen $\tilde{A}_i$ paarweise miteinander und wir haben

$$e^{t\tilde{A}} = e^{t(\tilde{A}_1 + \ldots + \tilde{A}_k)} = e^{t\tilde{A}_1} \cdot \ldots \cdot e^{t\tilde{A}_k}.$$

D.h., um die Fundamentalmatrix der DG $x' = Ax$ zu bestimmen, müssen wir S kennen und e^{tB} für die beiden Fälle 1) $B = J_n(\lambda)$ und 2) $B = J_{2m}(\alpha, \beta)$ bestimmen.

1) $\underline{B = J_n(\lambda) = \lambda \mathbf{1}_n + J_n(0)}$: Da $J_n(0)$ und $\lambda \mathbf{1}_n$ miteinander kommutieren, ist $e^{tB} = e^{t\lambda} \cdot e^{tJ_n(0)}$. Wir müssen also nur noch $e^{tJ_n(0)}$ berechnen: Berechnet man die Potenzen von $e^{tJ_n(0)}$, so erhält man

$$e^{tB} = e^{t\lambda} \cdot e^{tJ_n(0)} = e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h., eine Lsg. von $x' = Bx$ mit der AB $x(0) = x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ ist gegeben durch

$$e^{tB}x_0 = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \ldots + c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ c_2 + c_3 t + \ldots + c_n \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $p(t) := \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$ ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ ist.

2) $\underline{B = J_{2m}(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{1}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & J_m(0) \end{pmatrix}$$

Da alle drei Summanden paarweise kommutieren, erhält man wieder

$$\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t)\mathbf{1}_m & -\sin(\beta t)\mathbf{1}_m \\ \sin(\beta t)\mathbf{1}_m & \cos(\beta t)\mathbf{1}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tJ_m(0)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{tJ_m(0)} \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \begin{pmatrix} p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \\ q(t) \\ \vdots \\ q^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \begin{pmatrix} -q(t) \\ \vdots \\ -q^{(m-1)}(t) \\ p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Polynomen p, q vom Grad $\leq m-1$, deren Koeffizienten durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir wollen nun die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten auf Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden.
Erinnerung: Um eine DG n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t)$ mit $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ein System erster Ordnung zu reduzieren, führen wir die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ein mit

$$F(y_1, \ldots, y_n, t) := (y_2, \ldots, y_n, f(y_1, \ldots, y_n, t)) .$$

Es ist $x\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP's n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, \ldots, x^{(n-1)}, t)$ mit AB'en $x(t_0) = a_1, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(t_0) = a_n$, genau dann, wenn $y := \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP's $y' = F(y,t)$, $y(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$ erster Ordnung ist. D.h.

$$\begin{array}{rcrcl} & & y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1''(t) & = & y_3(t) \\ & & & \vdots & \\ y_{n-1}'(t) & = & y_1^{(n-1)}(t) & = & y_n(t) \\ y_n'(t) & = & y_1^{(n)}(t) & = & f(y_1, \ldots, y_n, t) \end{array}$$

Da aus der Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die von $(x_1, \ldots, x_n, t) \mapsto F(x_1, \ldots, x_n, t) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n, t))$ folgt, übertragen sich alle Existenz- und Eindeutigkeitssätze auf DG'en höherer Ordnung. Folgende Aussagen gelten für das AWP n-ter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} x^{(n)} &= f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) \\ & \quad x(t_0) = a_1,\ x'(t_0) = a_2,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = a_n \end{aligned}\right\} (*)$$

Folgerung (Maximale Existenz- und Eindeutigkeit)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ Lipschitzstetig. Dann existiert zu jedem $(x_0, t_0) = (a_1, \ldots, a_n, t_0) \in \Omega$ genau eine maximale Lösung $\varphi\colon (t_0 - \delta, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ des AWP's $(*)$.

Folgerung (Globale Existenz- und Eindeutigkeit)

Sei $I = (c, d)$ mit $-\infty \leq c < d \leq \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzstetig bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$, wobei $J \subsetneq I$ ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert genau eine auf ganz I definierte maximale Lösung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $(*)$.

Definition (lineare DG höherer Ordnung)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, a_k\colon I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, \ldots, n-1$ stetig.

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{24}$$

heißt lineare DG n-ter Ordnung. Ist $b(t) \equiv 0$, heißt (24) homogen, sonst inhomogen.

Folgerung (Maximale Lösung des linearen AWP's n-ter Ordnung)

Sei $I = (c, d)$ mit $-\infty \leq c < d \leq \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, und $b, a_k\colon I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, seien stetige Funktionen. Dann besitzt das lineare AWP zu (24) genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0}\colon I \to \mathbb{R}^n$.

Folgerung (Struktur des Lösungsraumes)

Die maximalen Lösungen der homogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen Vektorraum L. Die maximalen Lösungen der inhomogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen affinen Raum $L + \psi$, wobei ψ eine spezielle Lösung der inhomogenen DG ist.

Überführen wir nun die lineare DG n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

in ein System erster Ordnung, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ b(t) - a_{n-1}(t)y_n - \ldots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{pmatrix}$$

und damit das lineare System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Definition und Bemerkungen

Eine Basis $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, des Lösungsraumes der homog. lin. DG n-ter Ordnung $(*)$ $\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0}$ heißt Fundamentalsystem von $(*)$. Die Fundamentalmatrix Φ des dazugehörigen linearen Systems erster Ordnung,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(t),$$

heißt Fundamentalmatrix von $(*)$.

Definition und Bemerkungen

Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i\colon I \to \mathbb{R}$ beliebige $(n-1)$-mal differenzierbare Funktionen, dann heißt $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \det\left(\varphi_i^{(j-1)}\right)_{1\le i,j\le n}$ Wronski-Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Ist nun $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem $(*)$, so ist die Wronski-Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ gleich der Wronski-Determinante des Fundamentalsystems des zugehörigen linearen Systems.

Aus der Variation der Konstanten für lineare Systeme erhalten wir, dass eine Lösung des inhomogenen Systems (24) gegeben ist durch

$$(\psi(t), \ldots, \psi(t)^{(n-1)})^{\mathrm{T}} = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \underbrace{(0, \ldots, 0, b(s))^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{b}} \, ds,$$

wobei Φ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist. Mittels der Cramerschen Regel lässt sich $\Phi^{-1}\mathbf{b}$ ausdrücken, und mit Laplacescher Entwicklung (nach der die Spalte $\mathbf{b}$ enthaltenden Spalte) erhalten wir:

Satz (Variation der Konstanten)

Sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem der homog. DG n-ter Ordnung. Dann ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DG (24) gegeben durch

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(s)} \, ds. \tag{26}$$

Variation der Konstanten

1. Für $n = 2$ sieht diese Formel so aus

$$\psi(t) = -\varphi_1 \int_{t_0}^{t} \frac{b\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds + \varphi_2 \int_{t_0}^{t} \frac{b\varphi_1}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds.$$

2. Die spezielle Lösung (26) kann auch mittels der Variation der Konstanten ermittelt werden: Dazu machen wir den Ansatz $\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)c_k(t)$ und bestimmen die Funktion $c_k(t)$ so, dass ψ die inhomog. DG (24) löst. Dabei erhält man das folgende lineare Gleichungssystem an die $c_k'(t)$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Integration liefert dann die Funktionen $c_k(t)$.

Lineare DG *n*-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun das Fundamentalsystem einer linearen DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten finden.

Definition (Charakteristisches Polynom)

Das charakteristisches Polynom der linearen homogenen DG n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_0x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist das Polynom

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Ist $P \in \mathbb{R}[\lambda]$ ein Polynom in einer Variablen, dann ist umgekehrt $P(\lambda)$ das charakteristische Polynom zur DG
$P(\frac{d}{dt})x := a_nx^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0$

Wir hatten gesehen, dass die DG n-ter Ordnung $x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$ äquivalent ist zu einem System $y' = Ay$ mit einer Matrix A wie in (25). Das charakteristische Polynom der DG ist gleich dem charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_n)$ der Matrix A: Entwickelt man nach der letzten Zeile, so erhält man $\det(A - \lambda \mathbf{1}_n)$

$$
\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-a_0) + (-1)^{n+2}(-a_1)(-\lambda) + \ldots \\
&\quad + (-1)^{2n-1}(-a_{n-2})(-\lambda)^{n-2} + (-1)^{2n}(-a_{n-1} - \lambda)(-\lambda)^{n-1} \\
&= (-1)^n \left(a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n \lambda^n \right)
\end{aligned}
$$

Also sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DG gleich den Eigenwerten von A. Diese brauchen wir, um ein Fundamentalsystem der DG zu bestimmen.

Satz (Lineare DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$ das charakteristische Polynom zur homogenen linearen DG

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0. \qquad (*)$$

Seien λ_j die reellen und $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ sowie $\overline{\mu}_k$ die Paare nicht reeller Nullstellen von P mit den zugehörigen Multiplizitäten ℓ_j, m_k, wobei $j = 1, \ldots, r$ und $k = 1, \ldots, s$. Dann bilden die reellen Funktionen

$$
\begin{aligned}
\varphi_{j\ell}(t) &= e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell & &\forall\, j = 1, \ldots, r,\ \ell = 0, \ldots, \ell_j - 1 \\
\left.\begin{aligned} \psi_{km}(t) &= e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ \tilde{\psi}_{km}(t) &= e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m \end{aligned}\right\} & & &\forall\, k = 1, \ldots, s,\ m = 0, \ldots, m_k - 1
\end{aligned}
$$

ein Fundamentalsystem der homogenen linearen DG $(*)$.

Lemma

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ k-mal differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{C}$

$$(\frac{d}{dx} - \mu)^k \left(f(x)e^{\mu x}\right) = f^{(k)}(x)e^{\mu x} \ .$$

Beweis. Vollständige Induktion, $k = 0$ ist trivial. Für $k = 1$ finden wir:

$$(\frac{d}{dx} - \mu) \left(f(x)e^{\mu x}\right) = f'(x)e^{\mu x} + \mu f(x)e^{\mu x} - \mu f(x)e^{\mu x} = f'(x)e^{\mu x}$$

Für den Induktionsschritt $k \to k+1$ bemerken wir

$$\begin{aligned}(\tfrac{d}{dx} - \mu)^k \left(f(x)e^{\mu x}\right) &= (\tfrac{d}{dx} - \mu)(\tfrac{d}{dx} - \mu)^{k-1} \left(f(x)e^{\mu x}\right) \\ &\overset{I.A}{=} (\tfrac{d}{dx} - \mu) \left(f^{(k-1)}(x)e^{\mu x}\right) = f^{(k)}(x)e^{\mu x}\end{aligned}$$

Lemma

Enthält ein Polyonom $P(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ den Faktor $(\lambda - \lambda_j)^{\ell_j}$ und ist $\ell < \ell_j$, so gilt $P(\frac{d}{dt})e^{\lambda_j t}t^\ell = 0$.

Beweis.
Die Aussage folgt aus dem vorhergehenden Lemma:
$(\frac{d}{dt} - \lambda_j)^{\ell_j} \left(e^{\lambda_j t}t^\ell\right) = \frac{d^{\ell_j}}{dt^{\ell_j}}(t^\ell)e^{\lambda_j t} = 0$, da $\ell < \ell_j$. □

Beweis. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+s}$ die verschiedenen (und nicht zueinander konjugierten), komplexen Nullstellen von $P(\lambda)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten ℓ_j. Es gilt:
Aufgrund des zweiten Lemmas erhält man, dass die Funktionen $\varphi_{j\ell}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell \quad \text{für alle } j = 1, \dots, r,\ \ell = 0, \dots, \ell_j - 1 \qquad (**)$$

komplexe Lösungen der homogenen DG
$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} \dots + a_0 x(t) = 0$ sind.

Aus (**) folgt also, dass die Funktionen $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ für die reellen Eigenwerte λ_j Lösungen sind. Für die echt komplexen Eigenwerte $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ erhält man aus (**), dass sowohl Realteil als auch Imaginärteil von $\varphi_{km}(t) = e^{\mu_k t} \cdot t^m$ Lösungen sind. D.h. man erhält $2\sum_{k=1}^{s} m_k$ weitere Lösungen

$$\begin{aligned}\psi_{km}(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_{km}(t)) = \mathrm{Re}\, t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ \tilde{\psi}_{km}(t) &= \mathrm{Im}(\varphi_{km}(t)) = \mathrm{Im}\, t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m\end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, s,\ m = 0, \ldots, m_k - 1$.

Wir haben n Lösungen gefunden und müssen nur noch zeigen, dass diese über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Das gilt, wenn alle komplexen Lösungen $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind. Und dies folgt aus:

Lemma

Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $p_1(t), \ldots, p_n(t) \in \mathbb{C}[t]$. Ist

$$p_1(t)e^{c_1 t} + \cdots + p_n(t)e^{c_n t} = 0 \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so gilt $p_1 = \cdots = p_n = 0$.

Beweis. $n = 1$: Aus $p_1(t)e^{c_1 t} = 0$ folgt offensichtlich $p_1(t) = 0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir nehmen an, dass $\sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei k der Grad des Polynoms p_{n+1}. Dann gilt wegen des vorhergehenden Lemmas $(\frac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_{n+1}(t)e^{c_{n+1}t} = 0$ und somit

$$0 = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} \sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)e^{c_j t}$$

mit gewissen Polynomen h_j.
Aus der Induktionsvoraussetzung folgt aber $h_j = 0$ für $j = 1, \ldots, n$.

Um zu zeigen, dass $p_j = 0$, schreiben wir $(t - c_{n+1})^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m (t - c_j)^m$ mit $a_0 \neq 0$.
Daraus ergibt sich

$$h_j(t)e^{c_j t} = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m p_j^{(m)}(t)e^{c_j t}$$

und somit hat h_j denselben Grad wie p_j. Wegen $h_j = 0$ folgt $p_j = 0$. $\square$

Beispiel:

Wir betrachten die DG $x''' - x'' + x' - x = t$.
(1) Um das Fundamentalsystem der homogenen DG zu finden, suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Wir erhalten somit als komplexes Fundamentalsystem

$$x_1(t) = e^t, \quad \underbrace{\hat{x}_2(t) = e^{\mathrm{i}t}, \quad \hat{x}_3(t) = e^{-\mathrm{i}t}}_{komplex.}$$

Somit ist

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_2) = \cos(t), \quad x_3(t) = \mathrm{Im}(\hat{x}_2) = \sin(t)\ .$$

Wir haben also als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

(2) Wir wollen auch eine spezielle Lösung der inhomogenen DG bestimmen: $b(t) = t$ ist ein Polynom ersten Grades. Daher machen wir den folgenden Ansatz

$$y_s(t) = \alpha t + \beta\ ,$$

der zu der Gleichung $\alpha - \alpha t - \beta = t$ führt und somit auf

$$-\alpha = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta \qquad \text{d.h.} \qquad \beta = -1$$

Somit ist eine spezielle Lösung $y_s(t) = -(t + 1)$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen DG ist

$$x(t) = -(t + 1) + c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

Inhomogene lineare DG mit konst. Koeffizienten

Satz (Inhomogene lin. gewöhnliche DG mit konst. Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Dann gilt:

(i) $\frac{e^{\mu t}}{P(\mu)}$ *ist eine Lsg. der inhomog. DG* $P(\frac{d}{dt})x = e^{\mu t}$.

(ii) *Sei $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ Polynom vom Grad m. Dann hat die inhomog. DG $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $g(t)e^{\mu t}$, wobei $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist.*

Beweis. (i) und der Induktionsanfang von (ii) sind offensichtlich. Für den Induktionsschritt schreiben wir $P(\frac{d}{dt})t^m e^{\mu t} =: f_0(t)e^{\mu t}$, wobei $f_0(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist. Damit gibt es ein $c \neq 0$, so dass $h(t) := f(t) - cf_0(t)$ Grad $\leq m-1$ hat. Nach Ind.vor. existiert dann eine Lsg. $g_1(t)e^{\mu t}$ von $P(\frac{d}{dt})x = h(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom $g_1(t)$ vom Grad $\leq m-1$. Für das Polynom $g(t) = ct^m + g_1(t)$ vom Grad m gilt dann:

$$P(\tfrac{d}{dt})\left((ct^m + g_1(t))e^{\mu t}\right) = \left(cf_0(t) + h(t)\right)e^{\mu t} = f(t)e^{\mu t} \qquad \square$$

Satz

Sei $\mu \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle, $k \geq 1$, des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m. Dann hat die inhomog. DG $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $h(t)e^{\mu t}$, wobei

$$h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j.$$

Beweis. Wir schreiben $P(x) = Q(x)(x-\mu)^k$, mit einem Polynom $Q(x)$ vom Grad $n-k$ und $Q(\mu) \neq 0$.
Nach dem Satz existiert ein Polynom $g(t)$ vom Grad m, so dass $g(t)e^{\mu t}$ eine Lösung der DG $Q(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ ist.
Sei $h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j$ ein Polynom derart, dass $h^{(k)}(t) = g(t)$. Dann gilt für die Funktion $h(t)e^{\mu t}$ nach einem Lemma für den ersten Satz

$$\begin{aligned} P(\tfrac{d}{dt})x &= Q(\tfrac{d}{dt})(\tfrac{d}{dt} - \mu)^k[h(t)e^{\mu t}] = Q(\tfrac{d}{dt})h^{(k)}e^{\mu t} \\ &= Q(\tfrac{d}{dt})g(t)e^{\mu t} = f(t)e^{\mu t}. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.

Die letzten beiden Sätze gelten auch für DG'en mit komplexen Koeffizienten, d.h. $P, f, g, h \in \mathbb{C}[t]$, $\mu \in \mathbb{C}$. Die Lösungen $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Wir betrachten die DG

$$(*) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos \omega t, \qquad \omega, \omega_0 > 0, a \in \mathbb{R}^*.$$

Diese DG beschreibt Schwingungen ohne Reibung. Man nennt Sie auch getriebener (oder angeregter) harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz ω_0. Die Anregung erfolgt hier periodisch mit Frequenz ω.
Die entsprechende homogene Gleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ heißt harmonischer Oszillator. Das charakteristische Polynom $P(x) = x^2 + \omega_0^2$ hat nur das Paar imaginärer Nullstellen $\pm\omega_0 i$. Daher sind die Lösungen der homogenen Gleichung Linearkombinationen von $\sin \omega_0 t$ und $\cos \omega_0 t$.

... Harmonischer Oszillator

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung $(*)$ zu finden betrachten wir die DG

$$(**) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\omega t}.$$

(i) Wenn $\omega \neq \omega_0$, d.h. $P(i\omega) \neq 0$, so existiert eine Lsg. von $(**)$ von der Form $ce^{i\omega t}$. Einsetzen in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
$\varphi(t) = \mathrm{Re}\, ce^{i\omega t} = c \cos \omega t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$.

(ii) Wenn $\omega = \omega_0$ (d.h. der harm. Oszillator wird mit der Eigenfrequenz ω_0 angeregt) dann gibt es eine Lsg. von $(**)$ von der Form $cte^{i\omega_0 t}$.
Einsetzen in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{2i\omega_0}$.
$\varphi(t) = \mathrm{Re}\, cte^{i\omega_0 t} = \frac{a}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$ und für die Amplitude der Schwingung gilt $|\frac{a}{2\omega_0} t| \to \infty$ für $t \to \infty$ (Resonanzkatastrophe).