Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1 (4 Bonus-Punkte)

a) Was ist das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2}$ über $\mathbb{Q}$?

b) Was ist das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\mathrm{i}+\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2 (4 Bonus-Punkte)

a) Sei $a=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$. Bestimmen Sie den Körpergrad $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$ und das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ist ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$.

Was ist der Grad des Minimalpolynoms von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?

Aufgabe 3 (Wiederholung)

Sei R ein kommutativer Ring.

a) Was versteht man unter einem Primideal in R? (Geben Sie zwei äquivalente Definitionen an.)

b) Zeigen Sie: Ist $\varphi: R \to R'$ ein Morphismus von kommutativen Ringen und $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Primideal, so ist das Urbild $\mathfrak{a} := \varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$ ein Primideal in R. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ Ideal ist.)

Aufgabe 4 (Wiederholung)

Es sei X eine Menge. Welche 'universelle' Eigenschaft hat das freie Magma $F=F(X)$ über X? Wie ist $F=\dot{\bigcup}_{n\geq 1} F_n$ konkret gegeben?

Es bezeichne c_n die Anzahl aller Elemente von F_n im Fall $X=\{a\}$ (einelementige Menge).

Vergleichen Sie, für jedes $n \geq 1$, c_n mit $\sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i}$ (mit Begründung).