Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 9

Abgabe: 23.06.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R der Ring aller 2×2-Matrizen über einem Körper K. Bestimmen Sie alle Ideale von R.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R (assoziativer, unitärer) kommutativer Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Zeigen Sie:
a) Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale in R mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, so gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.
b) Ist $1_R \neq 0_R$ so gilt: Ist der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ endlich, so ist $\mathfrak{p}$ maximales Ideal.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R (assoziativer, unitärer) kommutativer Ring. Zeigen Sie:
a) R ist genau dann lokal, wenn die Nichteinheiten von R ein Ideal bilden.
b) Ist R lokal und ist $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal, so ist auch $R/\mathfrak{a}$ lokal.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei p eine Primzahl und R ein kommutativer Ring mit Charakteristik p.

a) Zeigen Sie: Es gilt für alle $x, y \in R$:

$$(x+y)^p = x^p + y^p \quad \text{und} \quad (xy)^p = x^p y^p$$

b) Folgern Sie: Die Abbildung $f : x \mapsto x^p$ ist ein Endomorphismus von R; und ist R Integritätsbereich, so ist f injektiv.

Aufgabe 5 (Präsenz)

Sei $\varphi : R \to R'$ ein Morphismus von kommutativen Ringen. Welche Aussagen gelten für die Urbilder von Idealen (Primidealen, bzw. maximalen Idealen) $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ (und analog für die Bilder von Idealen $\mathfrak{a} \subseteq R$)?