Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 8

Abgabe: 16.06.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein assoziativer Ring und K ein Unterring. Es gelte, dass R zusätzlich unitär ist, mit Eins 1_R, und dass ebenso K unitär ist, mit Eins 1_K.
Zeigen Sie:

a) Ist der Ring K ein Körper und R nullteilerfrei, so ist $1_R = 1_K$.

b) Geben Sie ein Beispiel, in dem $1_R \neq 1_K$, wobei K ein Körper und R nicht nullteilerfrei ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Die (assoziativen, unitären) Ringe $(\mathbb{Z}^{n\times n})^{m\times m}$ und $\mathbb{Z}^{mn\times mn}$ sind isomorph, für $m, n \geq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R assoziativer Ring und $\emptyset \neq S \subseteq Z(R)$ ein multiplikatives System. Ergänzen Sie die Beweisskizze dafür, dass $S^{-1}R$ assoziativer Ring mit Eins ist, indem Sie zeigen:
a) Die durch

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{a\,s' + s\,a'}{s\,s'}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{a\,a'}{s\,s'}$$

definierten Verknüpfungen sind wohldefiniert.
b) Die Distributivgesetze gelten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei R assoziativer, kommutativer Ring mit Eins und S eine multiplikative Teilmenge von R. Zeigen Sie:
a) Ist $f : R \to A$ ein Morphismus von assoziativen, kommutativen Ringe mit Eins, so dass $f(S) \subseteq A^\times$ gilt, so gibt genau einen Morphismus $h : S^{-1}R \to A$, so dass $f = h \circ j_S$. Hierbei ist j_S die zu $S^{-1}R$ gegebene Abbildung $R \to S^{-1}R$ mit $j(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$.
b) $S^{-1}R$ ist bis auf Isomorphie der einzige assoziative, kommutative Ring mit Eins, der für gegebenes R und S die obige Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 5 (Präsenz)

Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und S die durch die Restklassen von 1 und 3 gegebene Teilmenge von R. Wieviele (verschiedene) Elemente hat $S^{-1}R$?