Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 7

Abgabe: 09.06.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $n \geq 4$ und A_n die n-te alternierende Gruppe. Die Elemente von A_n, die sich als Produkte zweier disjunkter Transpositionen (in S_n) schreiben lassen, nennt man Doppeltranspositionen. Zeigen Sie:

a) Die Doppeltranspositionen in A_4 bilden zusammen mit den Neutralelement eine Untergruppe, die normal ist, und isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Sei $n \geq 5$. Schreiben Sie den 3-Zykel (a, b, c) als Produkt zweier Doppeltranspositionen in A_n.

c) Für $n \geq 5$ wird A_n von den Doppeltranspositionen erzeugt.

d) Je zwei Doppeltranspositionen sind schon konjugiert in A_n.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei N Normalteiler einer Gruppe G. Bezeichne $K(G)$ die Kommutatorgruppe von G. Zeigen Sie: die Restklassengruppe G/N ist genau dann abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 12. (Tipp: Fallunterscheidung nach der Anzahl der 2-Sylow-Untergruppen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei G Gruppe und U, V Untergruppen von G. Es sei U' Normalteiler von U, V' Normalteiler von V. Zeigen Sie:
Es ist $U'(U \cap V')$ Normalteiler von $U'(U \cap V)$, ebenso ist $V'(V \cap U')$ Normalteiler von $V'(V \cap U)$, und es gilt:

$$U'(U \cap V)/U'(U \cap V') \cong (U \cap V)/(U \cap V')(U' \cap V) \cong V'(V \cap U)/V'(V \cap U').$$

Aufgabe 5 (Präsenz)

Zeigen Sie:
Es gibt eine Kompositionsreihe von $\mathbb{Z}_4$ und eine Kompositionsreihe von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, deren Kompositionsfaktoren isomorph sind.