Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 5

Abgabe: 19.05.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Eine Gruppe mit der Ordnung 55 operiert auf einer Menge mit 26 Elementen ohne Fixpunkte. Wie viele Bahnen hat diese Operation?
b) Kann auf derselben Menge eine Gruppe der Ordnung 125 fixpunktfrei operieren?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und X eine G-Menge und seien $x, y \in X$. Liegt y in dem gleichen Orbit wie x, so zeige man, dass die Isotropieuntergruppen G_x und G_y in G konjugiert sind und beide Gruppen die gleiche Ordnung haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie (mit Hilfe von Induktion nach der Zahl der erzeugenden Elemente), dass jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe endlich erzeugt ist, und dass man höchstens so viele erzeugende Elemente benötigt wie für die ganze Gruppe.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei A die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ und E sei die Gruppe der Endomorphismen von A. Zerlegen Sie E in eine direkte Summe von zyklischen Gruppen.

Aufgabe 5 (Präsenz)

Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und $N(H) = N_G(H)$ der Normalisator von H in G.
Man zeige: $N(H)$ ist die größte Untergruppe von G, in der H normal ist. Die Anzahl der zu H konjugierten Untergruppen ist gleich dem Index $[G : N(H)]$.