

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 2

Abgabe: 28.04.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $r_0 > r_1 > 0$. In der Berechnung von $\text{ggT}(r_0, r_1)$ mittels euklidischem Algorithmus bezeichnen r_2, r_3, \dots die (weiteren) auftretenden Reste. Man zeige, dass für alle i gilt:

$$r_{i+2} < \frac{1}{2}r_i$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Man berechne $d = \text{ggT}(9973, 2137)$ mittels euklidischem Algorithmus und bestimme ein Paar $(X, Y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$9973X - 2137Y = d.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Es bezeichne C eine Teilmenge der Wormalgruppe $W(X)$, und $\alpha : C \rightarrow W(X)$ die Inklusionsabbildung.

Für welche der folgenden Mengen C ist der durch $\alpha : C \rightarrow W(X)$ induzierte Halbgruppenmorphismus $W(C) \rightarrow W(X)$ injektiv?

- (a) $\{ab^2, b^2a^2, ab^2a\}$
- (b) $\{ba, b^2a, b^2ab\}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei G Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass durch $a \sim_H b \iff b^{-1}a \in H$ bzw. $a \sim_H b \iff ab^{-1} \in H$ zwei Äquivalenzrelationen auf G definiert werden, und dass die Äquivalenzklassen eines Elementes $g \in G$ gerade gH bzw. Hg sind.

Aufgabe 5 (Präsenz)

Bestimmen Sie $d = \text{ggT}(360, 294)$

- (a) indem Sie die Primfaktorzerlegungen vergleichen,
- (b) mittels euklidischem Algorithmus.