Universität Hamburg
Department Mathematik SoSe 2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra

Blatt 1

Abgabe: 21.04.2009

(Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf nach Aufgaben getrennten Blättern ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Entscheiden Sie jeweils (mit Begründung) für

1. $\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Verknüpfung $(n, m) \mapsto n^m$
2. $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung $(n, m) \mapsto m + n + nm$

ob ein Magma, eine Halbgruppe, ein Monoid vorliegt und ob diese(s) jeweils abelsch ist.

(b) Geben Sie jeweils eine Verknüpfung an, bezüglich der die zweielementige Menge $\{a, b\}$

1. zu einem abelschen Magma wird, das keine Halbgruppe ist bzw.
2. zu einer Halbgruppe wird, die nicht abelsch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(X)$ die zugehörige Potenzmenge. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ist die symmetrische Differenz durch $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ definiert ($A^c := X \setminus A$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit $\triangle$ ein abelsches Monoid ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $X = \{x\}$ einelementige Menge und F das freie Magma über X. Es bezeichne $c_n = \#F_n$ die Anzahl aller Elemente der Länge n in F. Zeigen Sie: $c_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.
Hinweis: Wenn Sie die gesuchten Anzahlen als Koeffizienten einer Potenzreihe $f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n x^n$ benutzen, so erfüllt diese die Gleichung $f(x) = x + (f(x))^2$. (Begründung!).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{m}$ irrational. Betrachten Sie die Teilmenge $E = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$. (a) Zeigen Sie: Durch E ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ gegeben.
(b) Zeigen Sie: Durch $E^* = E \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ gegeben.

Aufgabe 5 (Präsenz)

(a) Überlegen Sie jeweils für

1. $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung $(n, m) \mapsto \mathrm{kgV}(n, m)$
2. $\mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Verknüpfung $(n, m) \mapsto \mathrm{ggT}(n, m)$

ob ein Magma, eine Halbgruppe, ein Monoid vorliegt und ob diese(s) jeweils abelsch ist. Hierbei bezeichnet $\mathrm{kgV}(n, m)$ das kleinste gemeinsame Vielfache und $\mathrm{ggT}(n, m)$ den größten gemeinsamen Teiler von n und m.
(b) Für welche $t \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $(\mathbb{N}_{\geq t}, \cdot)$ frei als abelsche Halbgruppe?