Funktionalanalysis mit Anwendungen

Wolf Hofmann

WS 2005/06

Inhaltsverzeichnis

Literatur

ALT, H.W.: Lineare Funktionalanalysis, Springer 1985

AUBIN J.P.: Applied Functional Analysis, Wiley, 1970

BALAKRISHNAN A.V.: Applied Functional Analysis, Springer 1976

BREZIS H.: Analyse Fonctionel et Applications, Masson 1983

CONVEY J.B.: A course in Functional Analysis, Springer 1985

COLLATZ L.: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Springer 1964

CYREF C.W.: Numerical Functional Analysis, Clarendon Press 1982

DUNFORD N.-SCHWARZ J.T.: Linear Operators I,II Interscience Publishers 1958

HEUSER H.: Funktionalanalysis, Teubner 1975

HIRZEBRUCH F.-SCHARLAU W.: Einführung in die Funktionalanalysis, BI 1971

LJUSTERNIK L.A.-Sobolev W.I.: Elemente der Funktionalanalysis, Akad.-Verl. 1968

PFLAUMANN E.-UNGER U.: Funktionalanalysis I, BI 1974

REED M-SIMON S.:Meth. of Mod. Math. Phys., Academic Press 1962

RUDIN W.: Functional Analysis, Mc-Graw-Hill, 1973

RUDIN W.: Real and Complex Analysis, Mc-Graw-Hill,1974

SCHECHTER M.: Principles of Functional Analysis, Academic Press 1971

TAYLOR A.E.-LAY D.C.: Introduction to Funtional Analysis, Wiley 1980

WERNER D.: Funktionalanalysis, Springer1997

WLOKA J.: Funktionalanalysis und ihre Anwendungen, De Gruyter 1971

YOSIDA J.: Functional Analysis, Springer 1980

Vorbemerkung

Dieses Skript will und soll kein Lehrbuch ersetzen. Es soll die Studenten/innen vom Zwang des Mitschreibens befreien um ihnen die Möglichkeit zu geben, dem Gang der Handlung besser folgen zu können und um die (nötige!) Nacharbeit und die (wünschenswerte!) Vorbereitung zu erleichtern. Eine Motivierung vieler Fragen, ihre Einordnung in größere Zusammenhänge, Ergänzung durch Beispiele erfolgt in der Vorlesung, den Übungen und (hoffentlich) einem eigenständigen Literaturstudium. Schon ein flüchtiges Studium der Literatur (bzw. der Inhaltsverzeichnisse einzelner Bücher) zeigt, daß man Dutzende verschiedener Vorlesungen über Funktionalanalysis halten kann. Diese Vorlesung muß sich also auf eine Auswahl beschränken. Sie wird versuchen möglichst viele Grundlagen (Einstiegsmöglichkeiten in einzelnen Theorien) zu vermitteln, kann deshalb jedoch bei den einzelnen Abschnitten nicht in die Tiefe gehen.

Zur kürzeren Darstellung benutzen wir folgende Abkürzungen

$\forall$	für alle	$\wedge$	und	$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$	wird definiert durch
$\exists$	es gibt	$\vee$	oder		
$\exists\,!$	es gibt genau ein ...				
:	sodaß	$\Rightarrow$	Implikation		

Einleitung

Der Frage „Was ist Funktionalanalysis?“ kann man sich auf 2 Möglichkeiten („andeutungsweise“) nähern.
1. Struktur-theoretisch: Man abstrahiert von Bekanntem und entwickelt weiter. Dies ist der Weg, den die meisten Lehrbücher verfolgen. Er ist elegant, zeitsparend und uneinsichtig.
2. Auf dem Hintergrund der klassischen $\mathbb{R}^n$ -Analysis kann man Verallgemeinerungen klassischer Begriffe diskutieren, wenn diese Begriffe zur Lösung eines Problems nicht ausreichen (solche Begriffe sind z.B. Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration usw.). Sie alle bedürfen neuerer Klärung, wenn man, ausgehend von $\mathbb{R}^n$, $n \to \infty$ gehen läßt. Welche Probleme auftreten, wollen wir an einigen Beispielen erläutern, bevor wir in die Theorie einsteigen.

1. Der $\mathbb{R}^n$ ist mit der Norm $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein vollständiger, normierter Raum. Eine abgeschlossene, beschränkte Menge ist hier kompakt (folgenkompakt).
   Betrachte auf einer beschränkten, abgeschlossenen Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $C^0(S)$ der stetigen Funktionen mit der analogen Norm (Normaxiome nachrechnen)
   $$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{\boldsymbol{x} \in S} |f(\boldsymbol{x})|$$
   $C^0(S)$ ist ∞ dimensional. (Was heißt das?) Abgeschlossene und beschränkte Mengen sind in diesem Raum nicht kompakt (Satz von Arzela u. Ascoli).

   Im $\mathbb{R}^n$ wird durch $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ ein Skalarprodukt definiert, das die Norm $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ (Euklidische Norm) erzeugt. Die Euklidische Norm ist zur Max-Norm äquivalent. Es gilt (Übung)
   $$\frac{1}{\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \;\leq\; 1\,.$$
   In $C(S)$ lautet das Analogon zum Skalarprodukt
   $$(f, g) \;=\; \int\limits_S f(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{(Axiome nachrechnen)}\,.$$
   Es erzeugt die Norm
   $$\|f\|_2 \;=\; \sqrt{\int\limits_S |f(x)|^2\, dx} \qquad \text{(Normbeweise später)}\,.$$
   Diese Norm ist zur Supremumsnorm nicht mehr äquivalent. Es gilt zwar
   $$\|f\|_2 \;\leq\; \sqrt{\max_{x \in S} |f(x)|^2 \int\limits_S dx} \;\leq\; \sqrt{\int\limits_S dx} \;\cdot\; \|f\|_\infty\,,$$

d.h. Konvergenz bzgl. $\| \|_\infty$ impliziert Konvergenz bzgl. $\| \|_2$. Das umgekehrte ist nicht richtig, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$S = [-1,1] \subset \mathbb{R}, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \qquad f_\varepsilon(x) = \sqrt{\max\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)\right)}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_\infty &= \sqrt{\tfrac{1}{\varepsilon}} \qquad \text{(beliebig groß für } \varepsilon \to 0) \\ \|f_\varepsilon\|_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Aus der Analysis ist bekannt, daß $C(S)$ mit $\| \|_\infty$ vollständig ist. Für $C(S)$ mit $\| \|_2$ gilt das nicht, denn für $S = [0,1]$ ist die Folge

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 1 - 2^n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} + 2^{-n}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} + 2^{-n} \le t \le 1, \end{cases}$$

eine Cauchy–Folge, die keinen stetigen Grenzwert hat.

Frage:
Kann man diesen Raum vervollständigen? (Und bzgl. welchen Konvergenzbegriffs?)

2. N Teilchen im $\mathbb{R}^3$ stehen gemäß den Gesetzen von Newton und Hook in Wechselwirkung $-m\ddot{x}_i = \sum_{k=1}^{3N} w_{ik}\, x_k$ mit x_k, $i,k = 1,\ldots,3N$ (3 Raumkoordinaten für jedes Teilchen).

Der Lösungsansatz für kleine Schwingungen

$$x_i = a_i \sin\omega t, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

liefert

$$\begin{aligned} a_i\, m\, \omega^2 \sin\omega t &= \sum_{k=1}^{3N} w_{ik}\, a_k \sin\omega t \\ a_i\, \omega^2 &= \sum_k \tfrac{w_{ik}}{m}\, a_k \\ \text{bzw.} \qquad \omega^2 \mathbf{a} &= \mathbf{W}\,\mathbf{a} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{3N})^T, \quad \mathbf{W} = \left(\tfrac{w_{ik}}{m}\right) \end{aligned}$$

Behandlung für

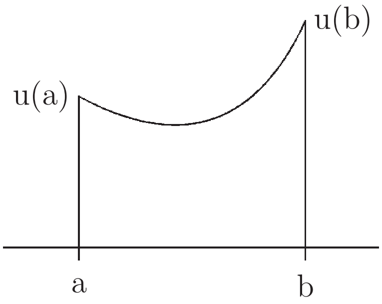
$N < \infty$	? $N \to \infty$ (Übergang zu Materie)
Matrizen $\mathbf{W}$	? Operatoren
Eigenwerte $\lambda = \omega^2$	? EW
Eigenvektoren $\mathbf{a}$	? EV
allg. Bewegung (Superposition, Summierung)	? Integration

3. Eine zylindrische Dose mit vorgegebenem Volumen $V = r^2\pi\, h$ hat die Oberfläche

$$\begin{aligned} O &= 2r^2\pi + 2\pi\, rh \\ \text{bzw.} \qquad O(r) &= 2\pi\, r^2 + 2\tfrac{V}{r} \end{aligned}$$

Die Dose mit minimaler Oberfläche findet man durch Differenzieren $O'(r) = 0$.

Die Lage einer Kettenlinie $u(x)$ wird dadurch bestimmt, daß die potentielle Energie der Kette minimal ist.



Die potentielle Energie der Kette wird, in Abhängigkeit von ihrer Lage, beschrieben durch einen Ausdruck der Form

$$\phi(u(x)) \;=\; \int\limits_a^b F(t, u(t), u'(t))\, dt\,, \quad \phi :\; C^1[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Wie wird so was minimiert? Was ist das Analogen der Ableitung (das Argument von ϕ ist eine Funktion)? Wann existiert überhaupt ein Minimum?
Vgl. Übungen. Dort zeigen wir als Beispiel:

Das Funktional

$$\phi(u) \;=\; \|u'\|_\infty + \int\limits_0^1 u'(x)^2\, dx$$

ist auf der im $C^1[0,1]$ abgeschlossenen Menge

$$M_1 \;=\; \{u \in C^1[0,1];\; u(0) = 0,\; u'(1) = 1\}$$

zwar nach unten beschränkt, besitzt jedoch kein Minimum (→ Variationsrechnung)

4. Jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine Basisdarstellung $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, \boldsymbol{e}^i$ mit Elementen $\boldsymbol{e}^i$, $i = 1, \ldots, n$, die zueinander orthogonal sind.

Bei der Lösung der Differentialgleichung für eine schwingende Saite der Länge $\ell = 2\pi$ stellen sich die Fragen (vgl. Übungen):
Bilden die Funktionen $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1, \cos\, t, \sin\, t, \cos\, 2t, \sin\, 2t, \ldots\}$ eine Basis des

Raumes $C[0, 2\pi]$ und ist es möglich, eine beliebige Funktion $f \in C[0, 2\pi]$ bzgl. dieser Basis darzustellen ?

$$f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \phi_i(t)\,, \quad \text{(Fourier-Reihe)}$$

und wenn ja, in welcher Norm konvergiert diese Darstellung?

Immerhin sind die Elemente dieser Basis bzgl. des inneren Produkts aus 1. zueinander orthogonal: $(\phi_i, \phi_j) = 0$ für $i \neq j$. (→ Fourier–Reihen)

5. Eine Ladungsverteilung, die auf den Bereich $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq k$ konzentriert ist und die Gesamtladung 1 hat, kann dargestellt werden durch eine reellwertige Funktion ϕ mit den Eigenschaften

$$\phi(\boldsymbol{x}) \;=\; 0 \text{ für } \|\boldsymbol{x}\|_2 \;>\; k, \qquad \int\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq k} \phi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \;=\; 1. \qquad (\phi(\boldsymbol{x}) \;=\; \text{Ladungsdichte})$$

Konsequenterweise müßte eine Punktladung an der Stelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ durch eine "Funktion δ" mit den Eigenschaften

$$\delta(\boldsymbol{x}) \;=\; 0 \text{ für } \boldsymbol{x} \neq 0, \qquad \int \delta(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \;=\; 1$$

beschrieben werden können. Eine reellwertige, integrierbare Funktion mit diesen Eigenschaften existiert jedoch nicht. (→ Theorie der Distributionen)

Für weitere einführende Beispiele vgl. z.B. die Lehrbücher von Heuser und Alt.

Will man diese (und viele andere) Beispiele in Analogie zu klassischen Methoden behandeln, so liegen anstelle des $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) allgemeinere Räume zugrunde, die eine lineare Struktur besitzen, jedoch nicht notwendig von endlicher Dimension sind. Häufig handelt es sich dabei um Räume, deren Elemente Funktionen sind. In diesen Räumen wird ein Konvergenzbegriff häufig durch eine Metrik, eine Norm, oder ein inneres Produkt induziert. Bzgl. dieser Metrik müssen dann Abbildungen (z.B. stetige, differenzierbare) studiert werden. Diese Abbildungen können ihrerseits wieder als Elemente von Räumen aufgefaßt werden. Räume mit solchen Strukturen sind

topologische lineare Räume,
metrische Räume,
normierte Räume,
unitäre Räume,
normierte Algebren,
halbgeordnete, lineare, normierte Räume, usw.

Das heutige Bild der Funktionalanalysis ist das einer weitentwickelten mathematischen Theorie solcher Räume und der Beziehungen zwischen ihnen, die neben ihrem "Wert an sich" (als schöne Theorie) auch in der Lage ist "harte" Probleme der Analysis zu lösen, ja, die sogar für viele Anwendungen heute unentbehrlich ist.

Stichworte

> Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen,
> Integralgleichungen,
> Variationsprobleme,
> Steuerungsprobleme (friedliche Rakete).

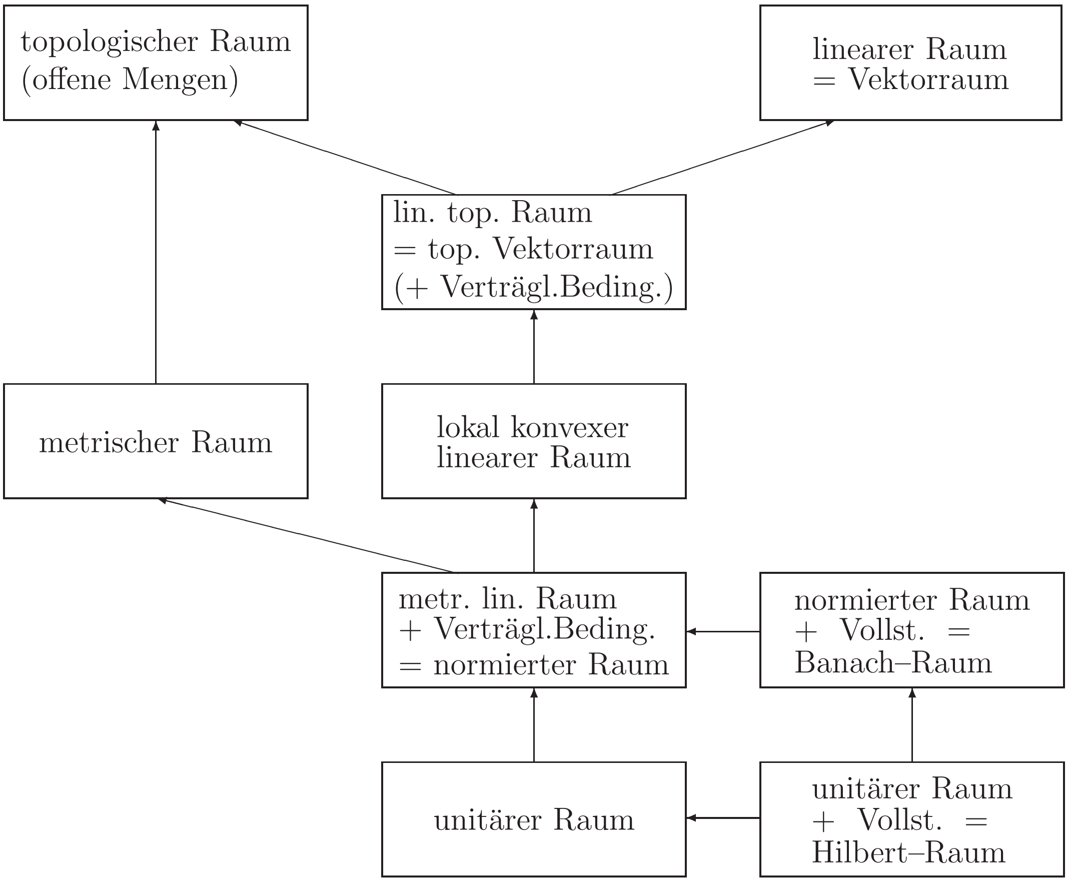
Im Folgenden befassen wir uns zunächst mit den Räumen, die in der Funktionalanalysis studiert werden und dann mit den Abbildungen zwischen ihnen.

Räume: Struktureller Aufbau

Wichtige Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

1. topologischer Raum (offene Mengen, Grenzwertprozesse, Differenzierbarkeit, ...)
2. lineare Struktur ($\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$)
3. Metrik (Abstandmessung, Iterationsverfahren)
4. Skalarprodukt (Winkelmessen, Orthogonalität)
5. Vollständigkeit (jede Cauchy–Folge konvergiert, Existenzbeweise für Lösungen)
6. Kompaktheit (Bolzano–Weierstraß) (Hilfsmittel zur Rettung vieler Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ beim Übergang zu ∞ dim. Räumen)

Struktureller Aufbau (Pfeile bedeuten Implikationen)



Wesentlich für das Verständnis der Strukturen sind Beispiele

1. an und für sich (Existenznachweis)
2. solche, die einen Begriff vom anderen abgrenzen

§ 1 Topologische und metrische Räume

Grundbegriffe

Topologie	**Metrik**
Sei X eine Menge	
Topologie auf $X \overset{\text{def}}{\iff}$ Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X ($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ Potenzmenge) mit (T1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$ (T2) $O_i \in \mathcal{T} \implies \bigcup_i O_i \in \mathcal{T}$ (beliebige Vereinigung) (T3) $O_i \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^{N} O_i \in \mathcal{T}$ (endliche Durchschn.)	$d : X \times X \to [0,\infty)$ heißt *Metrik (Abstand)* falls (M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit) (M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie) (M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungl.)
Das Paar $(X,\mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum.* Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen.*	Das Paar (X,d) heißt *metrischer Raum.* d heißt *Quasimetrik*, falls (M1) ersetzt wird durch (M1') $d(x,x) = 0$
	Definition: $K(x_0,\varepsilon) := \{x \in X;\ d(x_0,x) \underset{(=)}{<} \varepsilon\}$ heißt *offene (abgeschlossene) Kugel* $M \subset X$ heißt *offen* $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x \in M\ \exists\, \varepsilon > 0 :$ $K(x,\varepsilon) \subset M$. $\emptyset, X$ sind offen.
abgeschlossene Menge $\overset{\text{def}}{\iff}$ Komplement einer off. Menge bzgl. X.	M heißt *abgeschlossen* $\overset{\text{def}}{\iff} \complement$ M ist offen. **Sätzchen:** In einem (quasi)metrischen Raum wird durch $\mathcal{T} = \{\emptyset, X,\ M \subset X \text{ mit } M \text{ offen}\}$ eine Topologie (die durch die Metrik induzierte) definiert. (Bew. als Übung)
Ein System $\mathcal{O}$ von offenen Mengen aus $(X,\mathcal{T})$ heißt *Basis der Topologie* von X, wenn jede nicht leere offene Menge von X Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{O}$ ist.	Bsp. In (X,d) bilden die offenen Kugeln eine Basis der Topologie.

Erste Beispiele:

1) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (Menge aller Teilmengen von X, Potenzmenge) $\implies$ *diskrete Topologie*	1) $X = \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ euklidische Metrik
2) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \implies$ *gröbste (indiskrete) Topologie*	2) $X = \mathbb{R}^2, d(x,y) = \lvert x_1 - y_1 \rvert$ Quasimetrik

Bemerkung: Daß $\emptyset$ als offene Menge definiert ist, wird verständlich, wenn man sich klar macht, daß die Verneinung von “M ist offen” laut Definition bedeutet:
$\exists\, x \in M : \nexists$ offene Menge U mit $U \subset M$.
Da $\emptyset$ diese Eigenschaft nicht erfüllt ($\nexists\, x \in \emptyset$), macht es Sinn, $\emptyset$ als offen zu definieren.

Definitionen

top. Raum $(X, \mathcal{T})$		**metr. Raum** (X, d)
$\exists\, V \in \mathcal{T} : x_0 \in V \subset U$	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ U heißt *Umgebung von* x_0 $(U \in \mathcal{U}(x_0))$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	$\exists\, \varepsilon > 0 : K(x_0, \varepsilon) \subset U$
$\forall\, U \in \mathcal{U}(x_0)\ \exists\, V \in \mathcal{V} :$ $V \subset U$	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}(x_0)$ heißt *Umgebungsbasis von* x_0 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	$\forall\, U \in \mathcal{U}(x_0)\ \exists\, V \in \mathcal{V} :$ $V \subset U$
$M \in \mathcal{U}(x_0)$	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x_0 heißt *innerer Punkt von* $M \subset X$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	$M \in \mathcal{U}(x_0)$
$\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \exists\, y \in U \cap M,$ $y \neq x_0$	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x_0 \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M (HP) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in K(x_0, \varepsilon) \cap M,$ $y \neq x_0$

Existenz von HPn?

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat keine HPe, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ hat welche.

Interessant ist folgende Äquivalenz im metrischen Raum (X, d) (vgl. Analysis):

$$\boxed{x_0 \in X \text{ ist HP von } M \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ Folge } \{x_n\} \subset M,\ x_n \neq x_0\ \forall\, n : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0}$$

Es gilt dazu kein Äquivalent im topologischen Raum (vgl. späteres Gegenbeispiel).

Bemerkung: Hier, wie im Folgenden, gelten sämtliche Definitionen, die in topologischen Räumen getroffen werden, wörtlich auch im metrischen Fall, wenn man die dort getroffenen Definitionen für Umgebung, offene Menge usw. zu Grunde legt.

Offene Mengen können auch durch Umgebungen charakterisiert werden. Im topologischen wie im metrischen Fall gilt:

$$M \subset X \text{ offen} \quad \Longleftrightarrow \quad M \in \mathcal{U}(x) \; \forall x \in M$$

„$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus der Definition von Umgebung.

„$\Longleftarrow$“ $\forall x \in M \; \exists V_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in V_x \subset M \;\Longrightarrow M = \bigcup\limits_{x \in M} x = \bigcup\limits_{V_x \subset M} V_x \overset{(T2)}{\in} \mathcal{T}.$

Bezeichnungen:

$\overset{\circ}{M}$ = Menge der inneren Pkte. von M = offener Kern von M = Inneres von M.

$\overline{M} := M \cup$ {Menge aller HPe von M} = Abschluß von M = abgeschlossene Hülle von M

Mit diesem Vokabular definiert man in beiden Fällen

$$M \textit{ dicht in } X \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{M} = X$$

$$M \textit{ nirgends dicht in } X \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\overline{M})^0 = \emptyset$$

$\overset{\text{in top. Räumen}}{\Longleftrightarrow}$ $\qquad\qquad$ $\overset{\text{in metr. Räumen}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall K_1 \in \mathcal{T}, K_1 \neq \emptyset, \exists K_2 \in \mathcal{T}$,
$\emptyset \neq K_2 \subset K_1 : K_2 \cap M = \emptyset$

$\forall$ Kugel $K_1 \subset X \; \exists$
Kugel $K_2 \subset K_1 : K_2 \cap M = \emptyset$

Beweis:

Vor.: $(\overline{M})^0 = \emptyset$: Sei $K_1 \neq \emptyset, K_1 \in \mathcal{T}$ beliebig.
Ann.: $\forall K_2 \subset K_1, K_2 \in \mathcal{T}$ ist $K_2 \cap M \neq \emptyset$. Also gilt auch:
Für bel. $x \in K_1$ gilt $\forall K_2 \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}, K_2 \subset K_1$ ist $K_2 \cap M \neq \emptyset$,
d.h. $x \in \overline{M}$, also, da $x \in K_1$ beliebig, ist $K_1 \subset \overline{M}$. **W!** zu $(\overline{M})^0 = \emptyset$,
also $\exists K_2 \subset K_1 : K_2 \cap M = \emptyset$.

Vor.: $(\overline{M})^0 \neq \emptyset : \Longrightarrow \; \exists K_1 \in \mathcal{T}$, nämlich $K_1 = (\overline{M})^0$, mit $K_1 \cap (\overline{M})^0 = K_1 \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \; \forall K_2 \in \mathcal{T}, K_2 \neq \emptyset, K_2 \subset K_1$ ist $K_2 \cap (\overline{M})^0 = K_2 \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \; K_2 \cap (\overline{M}) = K_2 \;\Longrightarrow K_2 \cap M \neq \emptyset$, denn
$\overline{x} \in K_2 \in \mathcal{T} \;\Longrightarrow\; \exists U \in \mathcal{U}(\overline{x}), U \subset K_2$ und
$\overline{x} \in \overline{M} \;\Longrightarrow\; \exists y \in U \cap M, y \neq \overline{x} \;\Longrightarrow\; K_2 \cap M \neq \emptyset.$
Das ist die Verneinung der Eigenschaft.

Der Beweis für den metrischen Fall verläuft analog. ■

Beispiele: $M =$ Gerade in $\mathbb{R}^2 \implies (\overline{M})^0 = \emptyset$.
$M = \mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} \implies (\overline{\mathbb{N}})^0 = \emptyset$.
$M = \mathbb{Q} \implies \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = (\overline{\mathbb{Q}})^0$.

Es gelten (für $(X, \mathcal{T})$ und (X, d)) folgende Äquivalenzen (als Übung):

$$\boxed{\begin{array}{lcccl} M \text{ abgeschlossen} & \iff & M = \overline{M} & \iff & \complement \text{M offen} \\ M \text{ offen} & \iff & M = \overset{\circ}{M} & \iff & \complement \text{M abgeschlossen} \end{array}}$$

Man kann dabei einen beliebigen Doppelpfeil als Definition betrachten, dann stellen die anderen Doppelpfeile Aussagen dar.

Für beliebige Indexmengen Λ und Teilmengen $A_i \subset X$ gelten die Gleichungen

$$\complement\Big(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i\Big) = \Big(\bigcap_{i\in\Lambda} \complement A_i\Big) \quad \text{und} \quad \complement\Big(\bigcap_{i\in\Lambda} A_i\Big) = \bigcup_{i\in\Lambda} \complement A_i.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen zeigt man sofort, daß $(T_1) - (T_3)$ äquivalent sind zu den folgenden Eigenschaften für abgeschlossene Mengen A_i:

(A1) $\emptyset$, X abgeschlossen

(A2) $A_i \subset X$ abgeschlossen $\implies \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ abgeschlossen (endliche Vereinigungen).

(A3) $A_i \subset X$ abgeschlossen $\implies \bigcap\limits_{i} A_i$ abgeschlossen (beliebige Durchschnitte).

Mittels dieser 3 Eigenschaften kann man also auch eine Topologie mittels abgeschlossener Mengen definieren.

Weiter zeigt man leicht:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A_i \supset M \\ A_i \text{ abg.}}} A_i \qquad \text{und} \qquad \overset{\circ}{M} = \bigcup_{\substack{O_i \subset M \\ O_i \text{ offen}}} O_i$$

Wir erklären weiter

top. Raum **metr. Raum**

Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ *konvergiert gegen ein* $x_0 \in X$ $(x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$

$\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $x_n \in U \quad \forall\, n \geq n_0$

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $d(x_0, x_n) < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

Sätzchen:

1. In (X,d) ist der Grenzwert eindeutig,
2. in $(X,\mathcal{T})$ nicht notwendig.

Beweis:

1. indirekt: Annahme: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $x \neq y$, dann gilt $\forall\, n:$

$$d(x,y) \;\leq\; d(x,x_n) + d(x_n,y) \;\xrightarrow{n\to\infty}\; 0 \quad\Longrightarrow\quad x = y \;\; \mathbf{W!}$$

2. $X = \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = |x_1 - y_1|$ ist eine Quasimetrik, die eine Topologie erzeugt, in der der Grenzwert nicht eindeutig ist. ■

Fazit:

1. Eine Metrik ist eine stärkere Struktur als eine Topologie,
2. im allgemeinen Fall muß man die Eindeutigkeit des Grenzwertes durch ein Axiom erzwingen.

Definition:
Ein toplologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ erfüllt das *Hausdorff'sche Trennungsaxiom*, wenn gilt

(H) $\forall\, x,y \in X, \quad x \neq y \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \ \wedge \ V \in \mathcal{U}(y) \ : \ U \cap V = \emptyset.$

Man erkennt sofort

a) $(X,\mathcal{T})$ genügt (H) $\Longrightarrow$ Grenzwert eindeutig.

b) (X,d) erfüllt (H).

Aus den im Folgenden aufgeführten Definitionen und Äquivalenzen für Stetigkeit im topologischen Raum gelten natürlich wörtlich auch im metrischen Raum. Sie werden deshalb nicht gesondert aufgeführt.
Man beachte jedoch im metrischen Fall die Bemerkung zur Äquivalenz von
„ f stetig in x_0 “

Stetigkeit

$(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$
top. Räume

$(X,d_1),(Y,d_2)$
metr. Räume

$f:\ X\to Y$ heißt
stetig in $x_0\in X$

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\forall\, V\in\mathcal{U}(f(x_0))\\ \exists\, U\in\mathcal{U}(x_0)\ :\ f(U)\subset V\end{array} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{def}"] \arrow[d, Leftrightarrow] & f:\ X\to Y \text{ heißt } \textit{stetig in } x_0\in X \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{def}"] & \begin{array}{l}\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\ :\\ d_1(x_0,x)<\delta\implies\\ d_2(f(x_0),f(x))<\varepsilon\end{array} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\begin{array}{l}V\in\mathcal{U}(f(x_0))\implies\\ f^{-1}(V)\in\mathcal{U}(x_0)\end{array} & & \begin{array}{l}\forall\,\{x_n\}\subset X:\\ \lim x_n=x_0\implies\\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)\end{array}
\end{tikzcd}$$

(hierzu gibt es kein Äquivalent in top. Räumen. Die Eigenschaft „folgenstetig“, die im top. Raum definiert werden kann, ist schwächer als die Stetigkeit)

$$\begin{tikzcd}
f \text{ stetig in allen } x\in X \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{def}"] \arrow[d, Leftrightarrow] & f \text{ stetig in } X \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{def}"] & f \text{ stetig in allen } x\in X \\
V\in\mathcal{T}_2\implies f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_1 \arrow[d, Leftrightarrow] & & \\
V \text{ abg.}\implies f^{-1}(V) \text{ abg.} & &
\end{tikzcd}$$

Beweis der Äquivalenz für “f stetig in x_0”:

„$\Downarrow$“: Aus $f(U)\subset V\implies U\subset f^{-1}(V)\implies f^{-1}(V)\in\mathcal{U}(x_0)$.
„$\Uparrow$“: Zu V wähle $U=f^{-1}(V)\implies f(U)=f(f^{-1}(V))\subset V$.

Beweise der Äquivalenzen für “f stetig in X”:

2. Äquivalenz: V durchlaufe alle offenen Mengen von Y. Dann durchläuft $\complement V$ alle abgeschlossenen Mengen von Y. $f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(\complement V)$ sind Komplementärmengen in X, d.h. $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\complement V) = \emptyset \wedge f^{-1}(V) \cup f^{-1}(\complement V) = X \Longrightarrow$
$f^{-1}(V)$ ist offen genau dann, wenn $f^{-1}(\complement V)$ abgeschlossen.
Dies bedeutet die Äquivalenz.

Beachte: Das Bild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion muß nicht offen sein. Beispiel: $O = (0, \pi) \subset R,\ f(x) = \sin x,\ f(O) = [-1, 1]$.

Wir erklären weiter:

Homöomorphismus: $f : X \to Y$, f bijektiv, f, f^{-1} stetig.

Isometrie: $f : X \xrightarrow{\text{bijektiv}} Y : d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))\ \forall\, x, y.$

Jede Isometrie ist auch ein Homöomorphismus.

Relativtopologie auf einer Teilmenge (*Spurtopologie*)

$$(X, \mathcal{T}) \text{ top. Raum, } M \subset X \quad \Longrightarrow \quad (M, \mathcal{T}') \text{ ist top. Raum mit } \mathcal{T}' = \{M \cap U;\ U \in \mathcal{T}\}$$

Vergleich von Topologien:

$$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \text{ Topologien auf } X,\ \text{„}\mathcal{T}_1 \textit{ feiner als } \mathcal{T}_2\text{“} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$$

(d.h. $\mathcal{T}_1$ enthält mehr offene Mengen als $\mathcal{T}_2$)

Topologien müssen nicht vergleichbar sein.
Beispiel: $X = \{x, y\},\ \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{x\}\},\ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{y\}\}$

Anwendungshinweise:
Die Stetigkeit einer Funktion ist nicht (nur) eine Eigenschaft der Funktion, sondern auch eine Eigenschaft der Struktur von Bild- und Urbildraum.

$\exists$ Beispiele (später), wo dasselbe f bzgl. einer Topologie stetig ist, und unstetig bzgl. einer anderen.

Erzeugte Topologie

Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge). Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$ mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ (vgl. Übungen).

Produkttopologie: Seien $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ top. Räume.
Auf dem Produktraum $X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$ wird eine Topologie erzeugt durch

$$\mathcal{S} \ = \ \{M := M_1 \times M_2\,;\ M_i \in \mathcal{T}_i,\ i = 1, 2\}$$

Beachte: $\mathcal{S}$ enthält noch nicht alle offenen Mengen.

Beispiel: $X = \mathbb{R}^2$, $M_i =$ offene Intervalle, $\Longrightarrow$ $\mathcal{S} =$ Menge der offenen Quader, die offenen Kugeln sind nicht in $\mathcal{S}$ enthalten.

Übung: Sind (X_i, d_i), $i = 1, 2$ metr. Räume $\Longrightarrow$ $(X_1 \times X_2, \max(d_1, d_2))$ ist ein metr. Raum, dessen Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Beispiele metrischer Räume

Metriken im $\mathbb{R}^n$: Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1.1}$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \tag{1.2}$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| \tag{1.3}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ beschränkt}\}$, $f, g \in B(\Omega)$

$$d_C(f,g) = \sup_{t \in \Omega} |f(t) - g(t)| \tag{1.4}$$

ist eine Metrik. *Konvergenz bzgl.* d_C *bedeutet gleichmäßige Konvergenz.*

$$\begin{aligned} C(\Omega) &:= \{f \in B(\Omega);\ f \text{ stetig}\}, \\ C^\ell(\Omega) &:= \{f \in B(\Omega);\ D^s f \in C(\Omega) \quad \forall \text{ Multiindizes } s : |s| \le \ell\} \end{aligned}$$

sind metrische Unterräume. Dabei heißt

$$\begin{aligned} s &:= (s_1, \ldots, s_n), \qquad s_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \textit{Multiindex}, \\ |s| &= \sum s_i \quad \text{seine } \textit{Ordnung.} \\ \partial^s f(x) &= \frac{\partial^{s_1+s_2+\ldots s_n}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} f(x) \quad \text{Ableitung } n\text{-ter Ordnung}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Bezeichnung in der Literatur ist nicht immer einheitlich. Wird von $C(\Omega)$ bzw. $C^\ell(\Omega)$ als metrischen (oder normierten) Räumen gesprochen, beschränkt man sich immer auf beschränkte Funktionen. Andernfalls gäbe es, im Widerspruch zur Definition, Elementepaare, für die kein Abstand erklärt wäre.

Für den Raum $C^\ell(\Omega)$ wird auch durch

$$d_{C^\ell}(f,g) = \sup_{\substack{|s| \le \ell \\ t \in \Omega}} |\partial^s f(t) - \partial^s g(t)| \tag{1.5}$$

eine Metrik erklärt (Übung).

Durch (1.4) und (1.5) werden verschiedene Topologien auf $C^\ell(\Omega)$ definiert.

Aufgabe

$$\begin{array}{ccccl} (C^1[a,b], d_C) & \longrightarrow & (C[a,b], d_C) & & \text{ist unstetig.} \\ f & \longrightarrow & f' & & \\ (C^1[a,b], d_{C^1}) & \longrightarrow & (C[a,b], d_C) & & \text{ist stetig.} \\ f & \longrightarrow & f' & & \end{array}$$

Bemerkung: Wird vom $C^\ell(\Omega)$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, als metrischem Raum gesprochen, so meint man im allgemeinen die Metrik d_{C^ℓ}.

Ein Satz, der für die Struktur von $C[a,b]$ wichtig ist, ist der

Approximationssatz von Weierstraß:
Die Menge aller Polynome ist dicht in $C[a,b]$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall f \in C[a,b] \; \exists$ Polynom p_n, sodaß

$$d_C(f, p_n) \; < \; \varepsilon\,.$$

(Beweis in jedem Lehrbuch über Approximationstheorie)

Definition:
Zwei *Metriken* auf demselben Raum heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie erzeugen.

Übung:

Man zeige, daß die Metriken (1.1) bis (1.3) paarweise äquivalent sind.

(Das ist der Fall, wenn die offenen Mengen jeweils die gleichen sind.)

Der Raum $\boldsymbol{\mathcal{S} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R},}$ $\boldsymbol{f}$ meßbar und endlich $\}$

(Gemeint sind hier Äquivalenzklassen von Funktionen: Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, werden nicht unterschieden). $\mathcal{S}$ wird metrisiert durch

$$d_S(x,y) \; := \; \int\limits_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, dt.$$

d_S ist eine Metrik (Übung: Beachte $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ ist für $\lambda \geq 0$ monoton wachsend).

Definition:
$\{x_n\} \subset \mathcal{S}$ konvergiert stochastisch gegen $x_0 \in \mathcal{S} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\varepsilon)) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$;

dabei ist μ das Lebesgue-Maß der Menge $E_n(\varepsilon) = \{t;\, |x_n(t) - x_0(t)| \geq \varepsilon\}$.

Sätzchen:
In $\mathcal{S}$ sind äquivalent:

$$x_n \xrightarrow{\text{stoch}} x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_S(x_n, x_0) = 0$$

Beweis:

„$\Longleftarrow$“

$$\begin{aligned} d_S(x_n,x_0) &= \int\limits_a^b \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dt \ \geq \int\limits_{E_n(\delta)} \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dt \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \int\limits_{E_n(\delta)} dt \ = \ \frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(E_n(\delta)) \quad (\frac{x}{1+x} \ \nearrow \ \text{für } x > 0). \end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$“

$$\begin{aligned} d_S(x_n,x_0) &= \int\limits_a^b \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dt \\ &= \int\limits_{(a,b)\setminus E_n(\delta)} \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dt + \int\limits_{E_n(\delta)} \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dt \\ &\leq \int\limits_{(a,b)\setminus E_n(\delta)} |x_n(t)-x_0(t)|\,dt + \int\limits_{E_n(\delta)} 1\,dt \quad \text{(durch Abschätzen des Integranten)} \\ &\leq (b-a)\cdot\delta + \mu(E_n(\delta))\,. \end{aligned}$$

■

Beachte:
Als Voraussetzungen braucht man
(i) $E_n(\delta)$ meßbar und (ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \dfrac{x_n(t)-x_0(t)}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\,dx$.
Letzteres gilt nach dem Satz von Lebesgue (majorisierte Konvergenz).

Satz von Lebesgue:
Seien f_n, g integrierbar, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ f.ü. und $|f_n| \leq g$ f.ü., so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

$\mathcal{S}$ ist ein Beispiel für einen metrischen, nicht normierbaren Raum (vgl. § 4).

Ein Mehrfachbeispiel

1. Es zeigt Zusammenhänge zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz von stetigen Funktionen,
2. es definiert und vergleicht verschiedene Topologien auf derselben Menge,
3. es zeigt, daß man den Konvergenzbegriff der punktweisen Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen nicht durch eine Metrik erzeugen kann, d.h. es gibt topologische Räume, die nicht metrisierbar sind. Dazu zeigen wir, daß die in jedem metrischen Raum gültige Äquivalenz

   $$„\ \overline{x} \in X \text{ ist HP von } M \subset X \iff \exists\,\{x_n\} \subset M,\ x_n \neq \overline{x}\ \forall n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}\ “$$

   in einem topologischen Raum i. allg. falsch ist.

Sei $X = C[0,1]$. Dann wird durch die Metrik d_∞ die Topologie $\mathcal{T}_\infty$ erklärt.

$$d_\infty(x,y) \;=\; \max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Konvergenz bzgl. dieser Metrik bedeutet gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.

Wir erklären eine weitere Topologie $\mathcal{T}$ wie folgt:

$$\forall\, z \in X \ \wedge\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \wedge\ \forall \text{ endlichen Teilmengen } D \subset [0,1] \text{ sei}$$
$$V(z,D,\varepsilon) \;:=\; \{x \in X :\ |x(t) - z(t)| < \varepsilon\ \ \forall\, t \in D\}\,.$$

Sei $\mathcal{S}$ die Gesamtheit dieser Mengen und $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie (man nehme $\emptyset, X$, beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{S}$ und endliche Durchschnitte dazu). Dann gilt (Beweis als Übung):

1. $\mathcal{T}$ ist echt gröber als $\mathcal{T}_\infty$ (Hinweis: Zeige $V \in \mathcal{S} \;\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}\; V \in \mathcal{T}_\infty$)
2. In $(X,\mathcal{T})$ konvergiert eine Folge $\{x_n\}$ genau dann gegen ein x_0, wenn für jedes $t \in [0,1]$ die Folge $\{x_n(t)\}$ gegen $x_0(t)$ konvergiert (punktweise Konvergenz).
3. Die Menge

   $$M := \{x \in C[0,1];\ 0 \le x(t) \le 1\ \ \forall\, t \in [0,1],\ \wedge\exists \text{ endlich viele, disjunkte Intervalle}$$
   $$I_1, \ldots, I_k \subset [0,1] \text{ mit } x(t) = 1\ \ \forall\, t \in \bigcup I_j \text{ und } \sum |I_j| \ge 1/2\}$$

   besitzt die Funktion $f \equiv 0$ als Häufungspunkt, aber $\nexists$ Folge $\{x_n\} \subset M$, die in $(X,\mathcal{T})$ gegen f konvergiert (vgl. 1)).

Hinweis zu 3): Für eine punktweise konvergente Nullfolge $\{x_n\} \subset M$ würde (Satz von Lebesgue) folgen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,dt \;=\; 0.$$

§ 2 Eigenschaften metrischer Räume

Vorbemerkung: Metrische Räume müssen keine lineare Struktur (Addition, Subtraktion, Multiplikation mit Skalaren) besitzen. Ist eine lineare Struktur in einem metrischen Raum erklärt, so spricht man von einem linearen metrischen Raum.

Definition 2.1
Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge (CF) einen Grenzwert in X besitzt:

$$\{x_n\} \subset X \text{ ist CF} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \; d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \;\forall\, n, m \geq \overline{n}$$

Beispiele vollständiger Räume: $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ und $(\mathbb{R}^n, d_2)$ sind vollständig. (Analysis)

Übung: $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, ist nicht vollständig.

Beachte: Vollständigkeit ist nicht nur eine Eigenschaft des Raumes (der Menge der Elemente), sondern auch der Struktur (der Metrik).

Satz 2.2

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge $\Longrightarrow$ $B(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R},\; f \text{ beschränkt}\}$ ist vollständig bzgl. $d_\infty(f, g) := \sup\limits_{t \in \Omega} |f(t) - g(t)|$.
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Longrightarrow$ $C^\ell(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R};\; \partial^s f \text{ stetig } \forall\, |s| \leq \ell\}$ ist vollständig bzgl. $d_{C^\ell}(f, g) := \sup\limits_{|s| \leq \ell} |\partial^s f(t) - \partial^s g(t)|$.

Beweis:
1) $\{x_n\}$ CF in $B(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} && \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; d_\infty(x_n, x_m) < \varepsilon \;\; \forall\, n, m \geq n_0 \\
&\Longrightarrow && |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon \;\; \forall\, n, m \geq n_0 \,\forall\, t \in \Omega \\
&\Longrightarrow && \{x_n(t)\} \text{ist CF} \;\; \forall\, t \in \Omega \\
&\overset{\mathbb{R}\text{ vollst.}}{\Longrightarrow} && \exists\, x(t) := \lim_{n \to \infty} x_n(t) \;\; \forall\, t \\
& && \text{und } |x(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon \;\; \forall\, n \geq n_0 \,\forall\, t \in \Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad |x(t)| &\leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| \\
&\leq \quad \varepsilon \quad + \sup_{\Omega} |x_n(t)| \;\Longrightarrow\; x \text{ beschr., also } x \in B(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

2) $\ell = 0 : C(\Omega) \subset B(\Omega) \overset{a)}{\Longrightarrow}$ Eine CF hat einen Grenzwert in $B(\Omega)$. Der Grenzwert einer auf einem Kompaktum gleichmäßig konvergenten stetigen Funktionenfolge ist stetig, also $\in C(\Omega)$.
Entsprechend schließt man für $\ell > 0$ unter Benutzung des Satzes über die gliedweise Differenzierbarkeit von Funktionenfolgen. ■

Ohne Beweis: (vgl. Wloka)

Der Raum $(\mathcal{S}, d_S)$ (vgl. S. 16) ist vollständig.

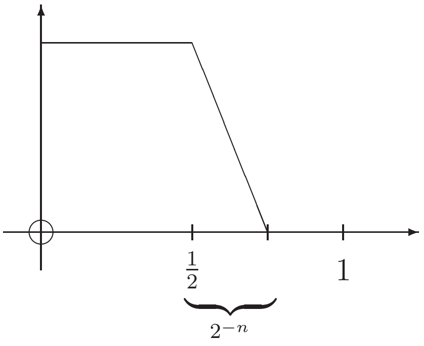
Nicht vollständig sind z.B.

a) $(\mathbb{Q}, d_\infty)$ (z.Bsp. $\pi \notin \mathbb{Q}$.)

b) $C[a,b]$ mit $d_1(f,g) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)|\,dt$.

Beweis b)
Die Folge

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2^n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + 2^{-n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} + 2^{-n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



ist eine CF, denn für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_1(x_{n+p}, x_n) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+2^{-n}} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\,dt < 2^{-n}.$$

Angenommen: $\{x_n\}$ konvergiert in $(C[0,1], d_1)$ gegen ein $x_0 \in C[0,1]$, dann gilt mit der (unstetigen) Hilfsfunktion

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 |x_0(t) - \tilde{x}(t)|\,dt &\leq \int\limits_0^1 |x_0(t) - x_n(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |x_n(t) - \tilde{x}(t)|\,dt \\ &\leq d_1(x_0, x_n) + 2^{-n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 |x_0(t) - \tilde{x}(t)|\,dt \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} |x_0(t) - 1|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x_0(t)|\,dt \;=\; 0$$

Ist aber x_0 stetig, so können nicht beide Integrale verschwinden. ■

Was tut man mit unvollständigen Räumen? Man denke etwa an Iterationsverfahren, die Cauchy-Folgen liefern!

Vervollständigen!

Satz 2.3 Vervollständigung

Sei (X, d) ein (nicht notwendig vollständiger) metrischer Raum.

1. Auf der Menge aller Cauchyfolgen von X wird durch

$$\text{„}\{x_j\} \cong \{y_j\} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \{d(x_j, y_j)\} \text{ ist eine Nullfolge“}$$

   eine Äquivalenzrelation definiert.

2. Der Raum $\widetilde{X}$ aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen ist metrisch bzgl.

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \;=\; \tilde{d}(\{x_j\}, \{y_j\}) \;:=\; \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j).$$

3. Durch $J : X \to \widetilde{X},\ x \to \tilde{x} := \{x\}_{j\in\mathbb{N}}$ wird X dicht und isometrisch in $\widetilde{X}$ eingebettet.

4. $\widetilde{X}$ ist vollständig.

Beweis:

1. Zeige Reflexivität, Symmetrie, Transitivität von „ $\cong$ “(Übung).

2. Zeige: Sind $\tilde{x} = \{x_j\},\ \tilde{y} = \{y_j\}$ CFn, so existiert $\lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, y_j)$ immer.
   $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten von $\tilde{x}, \tilde{y}$.
   $\tilde{d}$ ist eine Metrik auf $\widetilde{X}$ (Übung).

3. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$, zeige: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, a \in X : \ \tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{x}) < \varepsilon$ (dh. X dicht in $\widetilde{X}$, Übung).
   Die Isometrie der Einbettung, $\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$, ist offensichtlich.

4. Sei $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine CF aus $\widetilde{X}$, d.h. jedes $x^k = \{x_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ entspricht einer CF in X.

   Wir konstruieren einen Grenzwert für $\{x^k\}$.

   Wähle zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein j_k: $d(x_i^k, x_j^k) \le \frac{1}{k}$ für $i, j \ge j_k$ (geht, da CF).

Wir zeigen: $x^\infty := \{x^\ell_{j_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ ist CF, also $\in \tilde{X}$.

$$\begin{aligned} d\left(x^k_{j_k}, x^\ell_{j_\ell}\right) &\le d\left(x^k_{j_k}, x^k_j\right) + d\left(x^k_j, x^\ell_j\right) + d\left(x^\ell_j, x^\ell_{j_\ell}\right) \qquad \text{für } j \ge j_k, j_\ell \\ &\le \frac{1}{k} + d\left(x^k_j, x^\ell_j\right) + \frac{1}{\ell} \\ \xrightarrow{j\to\infty} &\le \frac{1}{k} + \tilde{d}\left(x^k, x^\ell\right) + \frac{1}{\ell} \quad \xrightarrow{k,\ell\to\infty} 0, \text{ also CF.} \end{aligned}$$

Zeige: x^∞ ist der Grenzwert von $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} \tilde{d}\left(x^\ell, x^\infty\right) &= \lim_{k\to\infty} d\left(x^\ell_k, x^k_{j_k}\right) \\ &\le \lim_{k\to\infty} \left[d\left(x^\ell_k, x^\ell_{j_\ell}\right) + d\left(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}\right)\right] \\ &\le \frac{1}{\ell} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} d\left(x^\ell_{j_\ell}, x^k_{j_k}\right)}_{\text{vgl. oben}} \xrightarrow{\ell,k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

■

Bemerkungen:

1. Daß X dicht in $\widetilde{X}$ liegt, besagt, daß $\widetilde{X}$ der kleinste vollständige Raum ist, der X enthält. Er heißt

   Vervollständigung oder *vollständige Hülle von* X .

   Man kann zeigen, daß die Vervollständigung *bis auf Isometrie eindeutig ist* (vgl. Wloka oder Heuser).

2. Der Satz garantiert zwar die Existenz von Grenzelementen, sagt aber nicht aus wie sie dargestellt werden können (vgl. hierzu etwa Beispiel b) auf S. 20). Dies muß in jedem Fall extra geklärt werden. Unser Beispiel b) führt auf Lebesgue-integrierbare Funktion (vgl. den Abschnitt über Banachräume).

Das wichtigste numerische Handwerkszeug in **vollständigen, metrischen** Räumen ist der

Satz 2.4 Kontraktionssatz, Fixpunktsatz von Banach

Sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum

$$\begin{aligned} f : X &\to X \quad \text{eine kontrahierende Abbildung, d.h.} \\ \exists\, L < 1 : \ d(f(x), f(y)) &\le L\, d(x,y)\ \forall\, x, y \in X. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

1. $\exists$! Fixpunkt $x^* \in X :\ x^* = f(x^*)$
2. $x^* = \lim x_n$, wo $x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$; $x_0 \in X$ beliebig
3. Fehlerabschätzung $d(x_n, x^*) \le \frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1)$

Bemerkungen:

1. Beachte, daß X keine lineare Struktur besitzen muß,
2. daß der Grenzwert im metrischen Raum eindeutig ist,
3. daß jeder Teilraum eines metrischen Raumes wieder ein metrischer Raum ist. Die Vollständigkeit überträgt sich nicht notwendigerweise auf den Teilraum.

Beweis:

$$\begin{array}{rrcl} & d(x_n, x_{n+1}) & = & d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \;\le\; L\, d(x_{n-1}, x_n) \\ \Longrightarrow & d(x_n, x_{n+1}) & \le & L^n\, d(x_1, x_0) \\ \Longrightarrow & d(x_n, x_{n+p}) & \le & d(x_n, x_{n+1}) \,+\, \ldots \,+\, d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ & & \le & (L^n + \ldots + L^{n+p-1})\, d(x_0, x_1) \\ (*) & & \le & L^n\, \frac{1-L^p}{1-L}\, d(x_0, x_1) \;\overset{L<1}{\Longrightarrow}\; \{x_n\} \text{ ist CF} \;\overset{\text{vollst.}}{\Longrightarrow}\; \exists\, x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} d(x^*, f(x^*)) & \le & d(x^*, x_n) \,+\, d(f(x_{n-1}), f(x^*)) \\ & \le & d(x^*, x_n) \,+\, L\, d(x_{n-1}, x^*) \;\xrightarrow{n\to\infty}\; 0 \;\Longrightarrow\; x^* = f(x^*). \end{array}$$

Die Fehlerabschätzung folgt aus $(*)$ für $p \to \infty$ und die Eindeutigkeit aus

$$d(x^*, y^*) \;=\; d(f(x^*), f(y^*)) \;\le\; L\, d(x^*, y^*)$$

wo $L < 1$. (Gemäß S. 12 erfüllt (X, d) das Trennungsaxiom, was den Eindeutigkeitsbeweis überflüssig macht.) ■

Bemerkungen:

1. Die Vollständigkeit des metrischen Raumes ist unentbehrlich. Das Cauchysche Konvergenz-Kriterium ist, abgesehen von Sonderfällen in halbgeordneten Räumen, das einzige, daß nicht auf den Grenzwert, der ja nicht bekannt ist, Bezug nimmt. Der Grenzwert muß durch die Struktur des Raumes gesichert werden.
2. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft muß man oft eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset X$ statt des ganzen Raumes wählen. Beachte, daß (M, d) ebenfalls ein metrischer Raum ist.
   Abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums sind wieder vollständig.
3. Aufgaben:
   (a) Ist f^n stetig auf X und kontrahierend für ein n, so existiert ebenfalls genau ein Fixpunkt.
   (b) Man formuliere den Fixpunktsatz für normierte Räume.

Anwendungsbeispiele: (in linearen metrischen Räumen)

1. Sei $X = \mathbb{R}$, $f \in C^1[a,b]$, $|f'(x)| \leq L < 1$ auf $\mathbb{R}$
   $\Longrightarrow \exists !$ Lösung von $x = f(x)$. Sie ist approximativ berechenbar.
2. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme (vgl. Numerik I)
3. AWAn bei gewöhnlichen Differentialgleichungen: Picard'sches Iterationsverfahren.
   Man schreibt die AWA $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_0$ um in eine äquivalente Integralgleichung (Übung).

   $$y(x) \;=\; y(a) + \int\limits_a^x f(s, y(s))\, ds \qquad \text{(Volterra-Integralgleichung)}$$

   Ein Fixpunkt dieser Integralgleichung ist eine Lösung der AWA (Aufgabe).
4. Nichtlineare Integralgleichungen

   Für ein $u \in C[a,b]$

   $$\begin{aligned} \text{und}\quad K : [a,b] \times [a,b] \times [-H,+H] &\xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{R} \\ (t,s,x) &\longrightarrow K(t,s,x) \end{aligned}$$

   bestimme man eine Lösung $x \in C[a,b]$ von

   $$(*) \quad x(t) \;=\; \lambda \int\limits_a^b K(t,s,x(s))\, ds + u(t) \qquad \text{(Fredholm-Integralgleichung).}$$

   Bemerkung: RWAn für gewöhnliche Differentialgleichungen können in solche Integralgleichungen umgeschrieben werden.

   Wir zeigen: Im vollständigen metrischen Raum

   $$(M, d_C) = (\{g \in C[a,b];\ d_C(g, \underline{o}) \leq H\}, d_C),$$

   $$d_C(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \qquad \underline{o} = \text{Nullfunktion}, \quad H > 0.$$

   Ist

   $$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \leq L|x-y| \ \ \forall x, y \text{ mit } |x|, |y| \leq H,$$

   $$m := \max_{t,s,x} |K(t,s,x)|,\ |u(t)| \leq \frac{H}{2} \ \ \forall\, t \in [a,b], \text{ und } \ |\lambda| < \min\Big(\frac{H}{2m(b-a)}, \frac{1}{L(b-a)}\Big),$$

   so hat $(*)$ eine Lösung in X.

(a) Selbstabbildung:

$$\text{Mit} \quad [F(x)](t) \;:=\; \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))\,ds + u(t)$$

gilt

$$\begin{aligned} d_C(F(x),\underline{o}) &\le |\lambda| \max_t \int_a^b |K(s,t,x(s))|\,ds + \max_t |u(t)| \\ &\le |\lambda|\; m\,(b-a) + \frac{H}{2} \le H. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $F(x)(t)$ folgt direkt aus den Voraussetzungen.

(b) F ist kontrahierend auf M:

$$\begin{aligned} d_C(F(x),F(y)) &= \max_t \left| \lambda \int_a^b [K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))]\,ds \right| \\ &\le \underbrace{|\lambda|(b-a)\cdot L}_{} \cdot \max_s |x(s)-y(s)| \\ &= \qquad \alpha \qquad \cdot d(x,y) \qquad \text{und } \alpha < 1. \end{aligned}$$

Damit liefert der Banach'sche Fixpunktsatz die Existenz einer Lösung der Integralgleichung.

Bemerkungen:

1. Inwieweit das Iterationsverfahren hier praktikabel ist, hängt davon ab, ob man die Integrale geschlossen auswerten kann.
2. Betrachte die Integralgleichung als Eigenwertaufgabe. Was besagt dann unser Ergebnis über die Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen? Vergleich mit Matrixeigenwertaufgaben?
3. Weitere Beispiele findet man z.B im Buch von Ljusternik/Sobolev.

Wir haben einen metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum dicht eingebettet. Die meisten Räume, die für die Numerik wichtig sind, sind separabel.

Definition 2.5
Ein metrischer Raum (X,d) heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare Teilmenge $S \subset X$ besitzt mit $\overline{S} = X$.

Beispiele:

$(\mathbb{R}, d_\infty)$, denn $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ und die rationalen Zahlen sind abzählbar. Entsprechend: $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist separabel, da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar.

$(C[a,b], d_C)$ ist separabel, denn die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar und die ist dicht in $C[a,b]$ (vgl. den Approximationssatz von Weierstraß).

$(C^\ell[a,b], d_{C^\ell})$ ist separabel (ohne Beweis).

Bemerkung:
Die Separabilität macht in vielen Fällen die Verwendung des Auswahlaxioms (Zorn'sches Lemma) überflüssig (vgl. § 8 Existenz linearer Funktionale, Sätze von Hahn, Banach). Die Abzählbarkeit ermöglicht die Anwendung von Induktionsbeweisen zum Beweis von Eigenschaften, die dann leicht auf den ganzen Raum übertragen werden können.

„Dicht“ ist eine Eigenschaft über die „Fülle“ einer Menge. Gewissermaßen das Gegenteil (das andere Extrem) wird beschrieben durch

Definition 2.6
Sei (X,d) metrischer Raum und $M \subset X$

M heißt *nirgendwo dicht* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\overline{M})^0 = \emptyset$ ($\nexists$ inneren Punkte)

$M \subset X$ heißt *mager* (von *1. Kategorie*) $\overset{\text{def}}{\iff}$ M ist abzählbare Vereinigung von nirgendwo dichten Mengen

M heißt von *2. Kategorie* $\overset{\text{def}}{\iff}$ M ist nicht mager.

Von fundamentaler Bedeutung (vgl. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz von Banach-Steinhaus usw.) ist der

Baire'sche Kategoriensatz
(X,d) vollständig $\Longrightarrow$ (X,d) von 2. Kategorie.

Zu seiner Vorbereitung zeigen wir (als Verallgemeinerung des Dedekindschen Schnitts) den

Satz 2.7 Cantor'scher Durchschnittssatz, Schachtelsatz
Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum und $\{K[x_n, r_n]\}$, $r_n > 0$, eine abfallende Folge abgeschlossener Kugeln d.h. $K[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset K[x_n, r_n]\ \forall\, n$, $r_n \to 0$.

$$\Longrightarrow \quad \exists\,!\ x_0 \in K[x_n, r_n]\ \forall\, n = 1,2,\ldots \qquad \left(\text{d.h. } x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K[x_n, r_n]\right)$$

Beweis: (Idee: Die Kugelmittelpunkte bilden eine CF mit eindeutigem Grenzwert x_0)

$$\begin{aligned} K[x_{n+p}, r_{n+p}] \subset K[x_n, r_n] \ \ \forall p \quad &\Longrightarrow \quad d(x_{n+p}, x_n) \ \le \ r_n \ \xrightarrow{n\to\infty} \ 0, \\ &\Longrightarrow \quad \{x_n\} \text{ ist CF,} \\ &\overset{\text{vollst.}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_0 \ = \ \lim_{n\to\infty} x_n\,. \end{aligned}$$

Aus $\quad d(x_0, x_n) \le d(x_0, x_{n+p}) + \underbrace{d(x_{n+p}, x_n)}_{\le r_n} \quad$ und $\quad d(x_0, x_{n+p}) \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad$ folgt

$$d(x_0, x_n) \le r_n, \quad \text{also } x_0 \in K[x_n, r_n] \ \ \forall\, n.$$

Annahme:
$\exists\, y \in K[x_n, r_n] \ \ \forall\, n, \ \ x_0 \ne y$, dann folgt

$$d(x_0, y) \ \le \ d(x_0, x_n) + d(x_n, y) \ \le \ 2r_n \ \xrightarrow{n\to\infty} \ 0 \ \ \textbf{W!} \ \blacksquare$$

Wir beweisen den Kategoriensatz von Baire in der folgenden Form

Satz 2.8 Kategoriensatz von Baire
Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $M_i \subset X, \ i \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Teilmengen, so gilt:

$X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i, \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens ein M_k enthält eine abgeschlossene Kugel (also auch eine offene Kugel) $\Longrightarrow \ \ \exists\, M_k$ mit $(M_k)^0 \ne \emptyset$.

Der Satz besagt insbesondere

Ein vollständiger metrischer Raum ist von 2. Kategorie (nicht mager).

Denn sind $A_i, \ i \in X$ nirgendwo dicht, so gilt $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, A_k$ mit $(\overline{A_k})^0 \ne \emptyset$, also X nicht mager.

Beweis: (indirekt) Annahme: Kein M_i enthalte eine abgeschlossene Kugel.
Wir zeigen zuerst zwei Hilfsaussagen:

1. (X, d) vollständig, $x_0 \in X$ und $0 < r_1 < r_0 \ \Longrightarrow \ K[x_0, r_1] \subset K(x_0, r_0)$,

   denn jedes $\overline{x} \in K[x_0, r_1]$ ist HP von X , also Grenzwert einer CF, gehört also zu X . Da $d(\overline{x}, x_0) \le r_1 < r_0 \ \Longrightarrow \ \overline{x} \in K(x_0, r_0) = \{x \in X;\ d(x, x_0) < r_0\}$.

   Beachte: Die Vollständigkeit ist notwendig. Gegenbeispiel: $(\mathbb{Q}, d_\infty)$.

2. $\overline{M} \subset X$ enthalte keine abgeschlossene Kugel $\neq \emptyset \implies$

   zu $K[x_0, r_0] \neq \emptyset \; \exists\, K[x_1, r_1] \neq \emptyset,\; r_1 < \frac{r_0}{2},\; K[x_1, r_1] \subset K(x_0, r_0)$ und $K[x_1, r_1] \subset \complement M$,

   denn $K[x_0, \frac{r_0}{2}] \not\subset M \implies \exists\, x_1 \in K[x_0, \frac{r_0}{2}] \cap \complement M$, $\complement M$ ist offen $\implies \exists\, K[x_1, r_1] \neq \emptyset,\; r_1 < \frac{r_0}{2},\; K[x_1, r_1] \subset \complement M$ (vgl. 1.) und $K[x_1, r_1] \subset K[x_0, r_0]$, denn aus $x \in K[x_1, r_1] \implies d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r_0$.

Die letzte Aussage wenden wir für jedes M_i an $\implies$

zu $K[x_0, r_0] \neq \emptyset \; \exists\, K[x_1, r_1] \neq \emptyset,\; r_1 < \frac{r_0}{2},\; K[x_1, r_1] \subset K(x_0, r_0) \wedge K[x_1, r_1] \subset \complement M_1$,

zu $K[x_1, r_1] \neq \emptyset \; \exists\, K[x_2, r_2] \neq \emptyset,\; r_2 < \frac{r_1}{2},\; K[x_2, r_2] \subset K(x_1, r_1) \wedge K[x_2, r_2] \subset \complement M_2$,

...

$\implies \{x_n\}, \{r_n\}, \left(r_n \leq \frac{r_0}{2^n}\right)$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.7.

$\implies \exists\, \tilde{x} \in K[x_n, r_n] \; \forall n$ und $\tilde{x} \notin M_n \; \forall n \implies \tilde{x} \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$. **W!** ■

§ 3 Lineare Räume, lineare topologische Räume, lineare halbgeordnete Räume, lokalkonvexe Räume

Lineare Räume und ihre Eigenschaften sind (sollten) aus den Grundvorlesungen bekannt (sein).

Definition 3.1

1. Eine Menge M mit einer Relation "$\leq$" heißt *halbgeordnet* falls gilt:

$$\begin{aligned} &a \leq a \quad \forall\, a \in M && \text{(Reflexivität)}, \\ &a \leq b,\ b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c && \text{(Transitivität)}, \\ &a \leq b,\ b \leq a \ \Rightarrow\ a = b && \text{(Antisymmetrie)}. \end{aligned}$$

2. Eine Menge M heißt bzgl. obiger Relation *total geordnet* oder *linear geordnet* falls gilt:
   $\forall\, a, b \in M$ ist $a \leq b$ oder $b \leq a$ (alle Elemente sind vergleichbar).

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ ist halbgeordnet durch: $a \leq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a_i \leq b_i,\ (i = 1, \ldots, n)$ (komponentenweise Halbordnung).
2. $C[a,b]$ wird halbgeordnet durch: $f \leq g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.
   Offensichtlich gibt es in beiden Beispielen "nicht vergleichbare" Elemente.
3. $\mathbb{R}$ ist total geordnet.

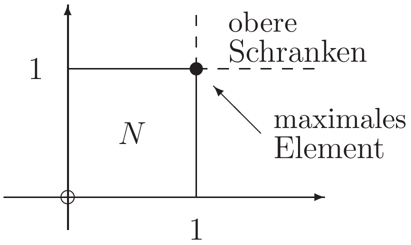
Definition 3.2
Sei M eine halbgeordnete Menge und $\emptyset \neq N \subset M$.

$k \in M$ heißt *obere Schranke* von $N \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a \leq k\ \forall\, a \in N$

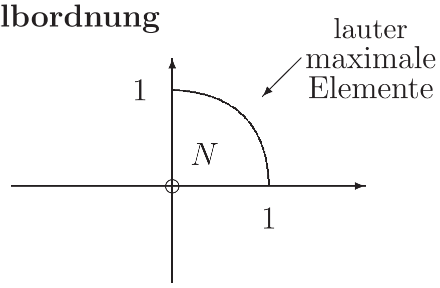
$m \in N$ heißt *maximales Element* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \nexists\, a \in N:\ a > m$

(dabei $a > m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \geq m \wedge a \neq m$)

Beispiele im $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Halbordnung



obere Schranken sind **nicht** eindeutig,



maximale Elemente auch nicht.

Satz 3.3 a) IndexZorn'sches Lemma
Ist M halbgeordnet derart, daß jede totalgeordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, so besitzt M ein maximales Element.

Äquivalente Aussagen sind (vgl. Natanson, I.P.; Theorie der Funktionen einer Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin)

Satz 3.3 b) Auswahlaxiom
Für jede Familie nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion, die jeder dieser Mengen eines ihrer Elemente zuordnet.

Satz 3.3 c) Wohlordnungssatz
Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eine geordnete Menge}\\ \text{heißt wohlgeordnet}\end{array}\right\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{jede nichtleere Teilmenge, also insbesondere}\\ \text{die Menge selbst, hat ein erstes Element}\end{array}\right.$$

Bemerkung: Für $(0,1)$ ist "$\leq$" wohl nicht die richtige Wohlordnung.

Definition 3.4
Ein linearer Raum heißt *halbgeordnet*, wenn er

1. eine lineare Struktur besitzt,
2. halbgeordnet ist,
3. beide Strukturen, wie folgt, verträglich sind:

$$\begin{array}{lcl} x_i \leq y_i,\ i=1,2 & \Longrightarrow & x_1+x_2 \leq y_1+y_2 \\ 0 \leq x,\ \alpha > 0 & \Longrightarrow & 0 \leq \alpha\, x\,. \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{llcl} C[a,b] \text{ mit} & (x+y)(t) & = & x(t)+y(t) \\ & (\alpha\, x) & = & \alpha\cdot x(t) \\ & x \,\le\, y & \Longleftrightarrow & x(t) \,\le\, y(t) \quad \forall\, t\in[a,b] \end{array}$$

Bemerkung: In halbgeordneten linearen Räumen kann man Einschließungsaussagen für Lösungen von Operatorgleichungen beweisen (Fehlerabschätzungen).

Vgl. etwa: Collatz, Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Springer–Verlag.

Definition 3.5
Ein linearer Raum über einem Zahlkörper $\mathbb{K}$ (bei uns $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) mit einer Topologie, in der die linearen Strukturen stetig sind, heißt *linearer topologischer Raum*, bzw. *topologischer Vektorraum* (Abk. top. VR).

dabei heißt (vgl. § 1)

$$\left\{\begin{array}{lll} X\times X & \to & X \\ (x,y) & \to & x+y \quad \text{stetig in } (x_0,y_0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, V\in\mathcal{U}(x_0+y_0)\ \exists\, U\in\mathcal{U}(x_0)\ \wedge\ U'\in\mathcal{U}(y_0): \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad U+U' := \{x+y;\ x\in U,\ y\in U'\}\subset V \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{K}\times X & \to & X \\ (x,y) & \to & \alpha\cdot x \quad \text{stetig in } (\alpha_0,x_0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, V\in\mathcal{U}(\alpha_0 x_0)\ \exists\, \Omega\in\mathcal{U}(\alpha_0)\ \wedge\ U\in\mathcal{U}(x_0): \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Omega\cdot U \,=\, \{\alpha\, x;\ \alpha\in\Omega,\ x\in U\}\subset V\,. \end{array}\right.$$

Anwendungen
In einem top. VR gelten die Äquivalenzen

(3.1) $$\alpha\, U\in\mathcal{U}(0)\ \forall\,\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha\ne 0 \quad\Longleftrightarrow\quad U\in\mathcal{U}(0),$$

(3.2) $$x_0+U\in\mathcal{U}(x_0)\ \forall\, x_0\in X \quad\Longleftrightarrow\quad U\in\mathcal{U}(0),$$

Seien X, Y topologische Vektorräume, $f: X \overset{\text{lin}}{\longrightarrow} Y$, dann gilt:

(3.3) $$f \text{ stetig in } x_0\ \forall\, x_0\in X \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ stetig in } 0.$$

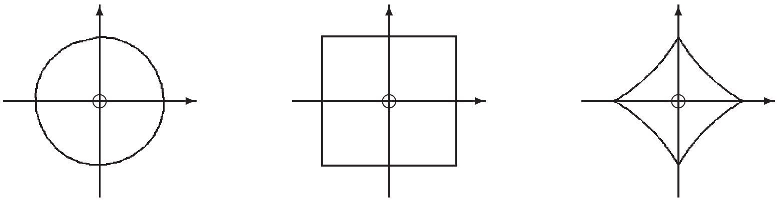
Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: Wegen (3.2) folgt aus der Existenz einer Umgebungsbasis für 0 die Existenz einer Umgebungsbasis $\forall\, x_0\in X$ und umgekehrt. Deshalb versteht man unter der Umgebungsbasis eines top.VR üblicherweise eine Nullumgebungsbasis.

Definition 3.6
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. VR und $M \subset X$.

1. M heißt *konvex* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, x, y \in M,\ \ \alpha \in [0,1]$ gilt $\alpha\, x + (1-\alpha)\, y \in M$.
2. M heißt *kreisförmig* (*balanced*, *equilibriert*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in M,\ |\alpha| \le 1 \ \Rightarrow\ \alpha\, x \in M$.
3. M heißt *absorbierend* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, x \in X\ \exists\, \alpha > 0 :\ \alpha\, x \in M$.

Beispiele kreisförmiger und absorbierender Mengen in $\mathbb{R}^2$:



Eine erste Bedeutung dieser Begriffe liefert

Satz 3.7
Sei X ein top. VR, dann gilt:

1. jede Nullumgebung ist absorbierend,
2. jede Nullumgebung enthält eine kreisförmige, offene Nullumgebung.

Beweis: Übungsaufgabe

Bedeutung des Satzes:
Ist $\mathcal{V}$ eine Umgebungsbasis (der Null) eines topologischen VR, so existiert auch eine Umgebungsbasis $\mathcal{V}^*$ aus kreisförmigen absorbierenden Mengen.

Definition 3.8
Ein top.VR heißt *lokalkonvex*, wenn es zu jeder offenen Nullumgebung U eine offene, konvexe Nullumgebung N gibt mit $N \subset U$.

Bemerkungen:

1. Die Topologien bzgl. der die Distributionen (vgl. später) stetig sind, sind lokalkonvexe Topologien.
2. Der Konvergenzbegriff der punktweisen Konvergenz von Funktionen (vgl. Mehrfachbeispiel aus § 2) stammt aus einer lokalkonvexen (nicht metrisierbaren) Topologie.

3. Lokalkonvexe Topologien können durch Familien von Halbnormen erzeugt (sogar charakterisiert) werden (vgl. dazu die Sätze 3.11 und 3.13).

Definition 3.9
Sei X ein linearer Raum. Eine Abbildung

$$p \;:\; X \;\rightarrow\; [0,\infty)$$

heißt *Halbnorm*, falls gilt: $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\;\; x, y \in X:$

(N2) $\quad p(\alpha\, x) \;=\; |\alpha|\, p(x),$

(N3) $\quad p(x+y) \;\leq\; p(x) + p(y).$

p heißt *Norm*, falls zusätzlich gilt:

(N1) $\quad p(x) \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \;=\; 0.$

Beachte: $p(0) = 0$ gilt nach (N2) und

$$0 = p(x-x) \leq p(x) + p(-x) \overset{(N2)}{=} 2p(x) \;\Longrightarrow\; p(x) \geq 0 \;\forall\, x\,.$$

Beispiele für Halbnormen:

$$\begin{aligned}
X &= C^1[a,b], \quad p(x) \;=\; \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)|,\\
X &= C[a,b], \quad p(x) \;=\; |x(\overline{t})| \text{ für ein festes } \overline{t} \in [a,b],\\
X &= \mathbb{R}^2, \quad x \;=\; (x_1, x_2)^T, \quad p(x) \;=\; |x_1|,\\
\text{oder} \qquad X &= C[a,b], \quad p(x) \;=\; \sup_{a<\alpha\leq t\leq\beta<b} |x(t)|.
\end{aligned}$$

Durch Halbnormen kann man mittels Quasimetriken $(d(x,y) = p(x-y))$ Topologien erklären bzgl. derer der Grenzwert nicht eindeutig sein muß.

Diese Eindeutigkeit muß durch zusätzlich Forderungen gewährleistet werden (vgl. dazu den Satz 3.11).

Beachte: Aus Definition 3.9 (N2), (N3) folgt sofort (kleine Übung):

(3.4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Seien } p_i \text{ Halbnormen und } \varepsilon_i > 0, \text{ so gilt:}\\ \text{Die Mengen } \{x \in X;\; p_i(x) < \varepsilon_i\} \text{ und endliche Durchschnitte solcher}\\ \text{Mengen (verschiedene } p_i \text{ und verschiedene } \varepsilon_i) \text{ sind absorbierend,}\\ \text{kreisförmig und konvex.} \end{array} \right.$

Diese Eigenschaften sind für die Halbnorm charakterisierend, wie folgender Satz zeigt. (Beweis als Übung)

Satz 3.10
Sei X ein linearer Raum und $M \subset X$ kreisförmig, absorbierend und konvex. Dann wird durch

$$p_M(x) \;:=\; \inf\{\rho \in \mathbb{R};\;\; \rho > 0,\;\; x \in \rho\, M\} \qquad \textit{Minkowski Funktional} \tag{3.5}$$

eine Halbnorm auf X definiert, und es gilt

$$\kappa M \subset \{x \in X;\, p_M(x) < 1\} \subset M\;\forall\, 0 < \kappa < 1 \;\text{ und }\; M \subset \{x \in X;\, p_M(x) \le 1\} \tag{3.6}$$

Das Minkowski Funktional p_{M_α} von $M_\alpha := \alpha\, M,\;\; \alpha > 0$ erfüllt

$$p_{M_\alpha}(x) \;=\; \frac{1}{\alpha}\, p_M(x). \tag{3.7}$$

Bemerkungen:

1. Dieser Satz und (3.4) besagen, daß eine Halbnorm einerseits und eine kreisförmige, absorbierende, konvexe Menge andererseits zwei Seiten derselben Medaille sind.
2. Gelegentlich wird das Minkowski-Funktional auch ohne die Voraussetzung kreisförmig definiert. Dann gilt jedoch (N2) aus Definition 3.9 nicht.

Satz 3.11 Konstruktion einer lokalkonvexen Topologie
Sei X ein linearer Raum, I eine beliebige Indexmenge und $P = \{p_i; i \in I\}$ eine Familie von Halbnormen.

$$\left\{\begin{aligned} &\forall\, x_0 \;\wedge\; \forall \text{ endliche Teilmenge } \{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\} \subset P \text{ und für jedes} \\ &n\text{-tupel positiver Zahlen } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{ definiere} \\ &U_{x_0} \;:=\; U(p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, x_0) \\ &\qquad\;\; = \; \{x \in X;\;\; p_{i_k}(x - x_0) < \varepsilon_k,\;\; k = 1, \dots, n\}. \end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

Dann gilt:

1. $\mathcal{T} = \emptyset \cup \{M \subset X;\;\; \forall\, x_0 \in M \quad \exists\, U_{x_0} \subset M\}$ ist eine lokal konvexe Topologie, die Menge aller U_{x_0} bilden eine Umgebungsbasis für $\mathcal{U}(x_0)$ und die U_{x_0} sind offen.
2. Genügt P der Trennungseigenschaft
$$\forall\, x_0 \in X, \quad x_0 \neq 0 \quad \exists\, p_{i_0} \in P \;:\; p_{i_0}(x_0) \neq 0,$$
so ist $\mathcal{T}$ Hausdorff'sch (separiert).
3. $(X, \mathcal{T})$ ist ein linearer topologischer Raum und jede Halbnorm aus P ist stetig.
4. $x_n \;\xrightarrow[\mathcal{T}]{n\to\infty}\; x_0 \iff \forall\, p \in P$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - x_0) = 0.$

Beweis:

1. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie, denn

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ laut Definition, $X \in \mathcal{T}$ trivial.

(T2) Sei $x_0 \in V := \bigcup\limits_{i \in I, M_i \in \mathcal{T}} M_i$

$\Longrightarrow \exists\, i_0 \in I \,:\, x_0 \in M_{i_0} \Longrightarrow \exists\, U_{x_0} \subset M_{i_0} \subset V \Longrightarrow V \in \mathcal{T}.$

(T3) $M_i \in \mathcal{T}, i = 1, \ldots, m,\; x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i$

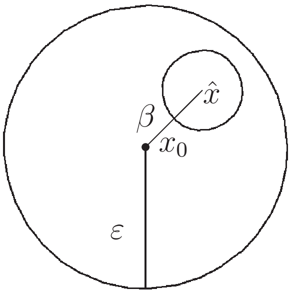
$\Longrightarrow \exists\, U_{x_0}^i \subset M_i,\; i = 1, \ldots, m$

$\Longrightarrow x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_{x_0}^i =: \widetilde{U}_{x_0} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i \in \mathcal{T},$

denn $\widetilde{U}_{x_0}$ ist von der Gestalt (3.8).

$\mathcal{T}$ ist lokalkonvex.

(3.9) $U(p, \varepsilon, x_0)$ ist offen (d.h. $\in \mathcal{T}$) und konvex;



a) U_{x_0} ist offen, denn $\hat{x} \in U(p, \varepsilon, x_0) \Longrightarrow p(x_0 - \hat{x}) =: \beta < \varepsilon$,

für $0 < \gamma < \varepsilon - \beta \Longrightarrow U(p, \gamma, \hat{x}) \subset U(p, \varepsilon, x_0)$, da

$x \in U(p, \gamma, \hat{x}) \Rightarrow p(x - x_0) \leq \underbrace{p(x - \hat{x})}_{< \varepsilon - \beta} + \underbrace{p(\hat{x} - x_0)}_{= \beta} < \varepsilon\,.$

Dann folgt auch

$$(3.10) \qquad U(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, x_0) = \bigcap_{k=1}^{n} U(p_{i_k}, \varepsilon_k, x_0) \in \mathcal{T} \quad \text{nach (T3).}$$

b) U_{x_0} ist konvex: Jedes $U(p_{i_n}, \varepsilon_k, x_0)$ ist konvex, denn sei $x_1, x_2 \in U_{x_0} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U(p_{i_k}, \varepsilon_k, x_0)$ und $x = \alpha\, x_1 + (1 - \alpha)\, x_2$, so gilt für jedes $U(p_{i_k}, \varepsilon_k, x_0)$

$$\begin{aligned} p_{i_k}(x - x_0) &\leq p_{i_k}(\alpha\, x_1 + (1 - \alpha) x_2 - (\alpha\, x_0 + (1 - \alpha)\, x_0) \\ &\leq |\alpha|\, p_{i_k}(x_1 - x_0) + |1 - \alpha|\, p_{i_k}(x_2 - x_0) \\ &\leq \varepsilon_k\,, \end{aligned}$$

also $x \in U(p_{i_k}, \varepsilon_k, x_0)\; \forall\, k = 1, ..., n$, also $x \in U_{x_0}$.

Aus (3.10) folgt die Aussage über die Umgebungsbasis.

2. $\mathcal{T}$ genügt der Bedingung

(H) $\qquad \forall\, x, y \in X,\; x \neq y \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x), \quad V \in \mathcal{U}(y) \,:\, U \cap V = \emptyset,$

denn $x - y \neq 0 \implies \exists\, p \in P \,:\; p(x-y) =: \alpha > 0$
$\implies U = \left\{\tilde{x} \in X;\; p(x-\tilde{x}) < \frac{\alpha}{2}\right\}, \quad V = \left\{\tilde{x} \in X;\; p(y-\tilde{x}) < \frac{\alpha}{2}\right\}$
erfüllen die Bedingung, denn

$$\tilde{x} \in U \cap V \implies 0 < \alpha = p(x-y) \leq p(x-\tilde{x}) + p(\tilde{x}-y) < \alpha. \qquad \textbf{W!}$$

3. $(X, \mathcal{T})$ ist top.VR, d.h. Addition und Skalarmultiplikation sind stetig.

Beispiel Addition: $x_0, y_0 \in X,\; z_0 = x_0 + y_0$

Zeige:

$$\forall\, V \in \mathcal{U}(z_0) \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x_0) \,\wedge\, U' \in \mathcal{U}(y_0) \,:\; U + U' \subset V.$$

Zu

$$V \in \mathcal{U}(z_0) \quad \exists\, U_{z_0} = \{z \in X;\; p_{i_k}(z - z_0) < \varepsilon_k,\; k = 1, \ldots, n\} \subset V.$$

Konstruiere:

$$\left.\begin{aligned} U \;&=\; U_{x_0} = \left\{x \in X;\; p_{i_k}(x - x_0) < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, n\right\} \\ U' \;&=\; U_{y_0} = \left\{x \in X;\; p_{i_k}(x - y_0) < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, n\right\} \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgt mit der Dreiecksungleichung $U + U' \subset V$.

Multiplikation
Sei $z_0 = \lambda_0 x_0$ und $V \in \mathcal{U}(\lambda_0 x_0) \implies \exists V_{x_0} = V(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, z_0) \subset V$.

Zeige: Zu V_{x_0} $\exists \alpha > 0$ sodaß für
$\Omega = \{\lambda;\, |\lambda - \lambda_0| < \alpha\}$ und $U = \{x \in X;\, p_{i_k}(x - x_0) < \frac{\varepsilon_k}{2(|\lambda_{x_0}| + \alpha)}, k = 1, ..., n\}$
gilt:
$\Omega\, U \subset V$, d.h. $p_{i_k}(\lambda\, x - \lambda_0\, x_0) < \varepsilon_k,\; k = 1, ...n,$ für $\lambda \in \Omega,\; x \in U$.

Beweis: Sei $U' = \{u' \in X;\, p_{i_k}(u') < \frac{\varepsilon}{2}\}$. U' ist absorbierend $\implies$

$\exists\, \alpha > 0 :\; \alpha\, x_0 \in U'$, d.h. $p_{i_k}(\alpha\, x_0) = \alpha p_{i_k}(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mit diesem α definiere U und beachte
$|\lambda| - |\lambda_0| \leq |\lambda - \lambda_0| < \alpha \implies |\lambda| < -|\lambda_0| + \alpha$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{i_k}(\lambda\, x - \lambda_0\, x_0) &= p_{i_k}(\lambda(x - x_0) + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \\ &= p_{i_k}((\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0)) \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| p_{i_k}(x_0) + |\lambda| p_{i_k}(x - x_0) \\ &\leq \alpha p_{i_k}(x_0) + (|\lambda| + \alpha) p_{i_k}(x - x_0) < \varepsilon \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Halbnormen folgt aus $|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0)$ (Dreiecksungleichung rückwärts).

4. Übung. ■

Satz 3.12 Charakterisierung lokalkonvexer Topologien
Ist $(X,\mathcal{T})$ lokal konvex $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$ ist die Topologie, welche durch die Minkowski-Funktionale der kreisförmigen, absorbierenden, konvexen, offenen Mengen erzeugt wird.

Beweis:
„ $\Longleftarrow$ “ wurde gerade gezeigt.
„ $\Longrightarrow$ “: Beweisidee:
Man zeigt: Die konvexen, absorbierenden, kreisförmigen, offenen Umgebungen der Null liefern sowohl eine Basis von $\mathcal{T}$ (vgl. dazu Satz 3.7 und Definition 3.8), als auch eine Basis der Topologie die durch die zugehörigen Minkowski-Funktionale erzeugt wird. Wesentlich hierfür ist Satz 3.10, sowie die anschließende Bemerkung. Dazu zeigt man insbesondere:
Ist A eine offene, konvexe, kreisförmige, absorbierende Nullumgebung in $\mathcal{T}$, so gilt

$$\overline{A} = \{x \in A;\ p_A(x) \leq 1\} \quad \text{bzw. falls A offen ist} \quad A = \{x \in A;\ p_A(x) < 1\}$$

(vgl. z. B. Heuser Satz 42.2). Dies bedeutet insbesondere, daß die offenen, konvexen, kreisförmigen, absorbierenden Nullumgebungen durch ihre Minkowskifunktionale reproduziert werden.

Bemerkung: Satz 3.12 zeigt, daß lokalkonvexe Topologien durch Halbnormen charakterisiert werden können.

Beispiele für lokalkonvexe Räume:

1. Jeder normierte Raum ist lokalkonvex.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X = C(\Omega)$, $P := \{p_t :\ p_t(x) = |x(t)|,\ t \in \Omega\}$

   $\Longrightarrow$ $(X,\mathcal{T})$ ist separiert, lokalkonvex und der zugehörige Konvergenzbegriff ist die punktweise Konvergenz (vgl. das Mehrfachbeispiel).

   Beachte: Das Beispiel zeigt auch: Es gibt nicht metrisierbare, lokalkonvexe topologische Räume.

3. $X = C(\mathbb{R})$, $P := \{p_j;\ p_j(x) = \max\limits_{|t|\leq j} |x(t)|,\ j \in \mathbb{N}\}$

   $\Longrightarrow$ $(X,\mathcal{T})$ hat als Konvergenzbegriff die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Satz 3.13
Sei X ein linearer Raum. Dann definiert eine **abzählbare** Folge von Halbnormen $P = \{p_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ mit der Trennungseigenschaft aus Satz 3.11b) eine Metrik

$$d(x,y) \ = \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(x-y)}{1+p_\nu(x-y)}.$$

Die von dieser Metrik erzeugte Topologie $\mathcal{T}_d$ stimmt mit der lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}_p$, die von der Familie P erzeugt wird, überein.

Beweis: Übung.

Folgerungen:

1. Die punktweise Konvergenz (vgl. Beispiel 2) kann nicht durch eine Metrik erzeugt werden (vgl. das Mehrfachbeispiel). Die Menge P der Halbnormen ist nicht abzählbar.
2. Der Konvergenzbegriff aus Beispiel 3 kann durch eine Metrik erzeugt werden.

Beispiel 4:

Der Raum $\mathcal{D}_K(\Omega)$

Definition 3.14
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ω habe die Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$.
Ist f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf Ω, so heißt

$$\begin{aligned} \text{supp } f \ &= \ \text{Tr } f \ := \ \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}^{\Omega} \\ &\textit{Träger} \text{ (support, carrier) von } f, \end{aligned}$$

d.h. Tr f ist die kleinste, abgeschlossene Menge **des topologischen Raumes Ω**, welche die Punkte enthält, auf denen f nicht verschwindet.
Weiter sei $K \subset \Omega$ kompakt und $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} C_0^k(\Omega) \quad &:= \quad \{f \in C^k(\Omega);\ \text{Tr } f \subset \Omega,\ \text{Tr } f \text{ kompakt}\}, \\ C_{0,K}^k(\Omega) \quad &:= \quad \{f \in C^k(\Omega);\ \text{Tr } f \subseteq K,\ \text{Tr } f \text{ kompakt}\}, \\ \mathcal{D}_K(\Omega) \quad &:= \quad \Big(C_{0,K}^{\infty}(\Omega),\ \mathcal{T}\Big), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{T}$ erzeugt wird durch die abzählbare Familie $p_{K,m}$ von Halbnormen auf Ω

$$(3.11) \qquad p_{K,m}(f) \ = \ \sup_{\substack{|s| \leq m \\ t \in K}} |\partial^s f(t)|, \quad m \in \mathbb{N}_0,\ s \text{ Multiindex}.$$

Beachte: Jede Menge der Art $\{f \in \mathcal{D}_K(\Omega);\, p_{K,m}(f) < \varepsilon\}$ für $m \in \mathbb{N}$ ist offen (vgl. (3.9)).

Beispiele

1. $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = -x^2$ für $x < 0$ und $= 0$ sonst $\Longrightarrow$ supp $f = (-1,0]$, $f \notin C_0^k(\Omega)\,\forall\, k \in \mathbb{N}_0$.
2. $\Omega = (-3,3)$,
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lrl} (x+2)^2, & -2 & < x \le -1, \\ -x^2+2, & -1 & \le x \le 1, \\ (x-2)^2, & 1 & \le x < 2, \\ 0, & & \text{sonst.} \end{array} \right\} \Longrightarrow f \in C_0^1(-3,3), \ \operatorname{supp} f = [-2,2].$$
3. Klassisches Beispiel für ein $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Beweis als Übung)
$$f(x) \;=\; \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{für} \quad |x| \;=\; |(x_1,\dots,x_n)^T| \;=\; \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} \;<\; 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| \;\ge\; 1. \end{cases}$$

Aus den vorigen Sätzen erhält man

Satz 3.15 Eigenschaften von $\mathcal{D}_K(\Omega)$

1. $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist ein lokalkonvexer, separierter, metrischer, topologischer Vektorraum.
2. Für eine positive Nullfolge $\{\varepsilon_i\}$ und für $m \in \mathbb{N}_0$ sei
$$U(p_{K,m}, \varepsilon_i, 0) =: V(p_{K,m}, \varepsilon_i) := \{\varphi \in C_{0,K}^\infty(\Omega);\ p_{K,m}(\varphi) < \varepsilon_i,\}.$$
Dann ist
$$\mathcal{V} := \{V(p_{K,m}, \varepsilon_i);\ m \in \mathbb{N}_0,\, i \in \mathbb{N}\}$$
eine abzählbare (Null-) Umgebungsbasis.
3. $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}_K(\Omega)]{n\to\infty} \varphi_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \partial^\nu \varphi_n = \partial^\nu \varphi_0$ gleichmäßig auf K $\forall$ Multiindizes ν.
4. Sind $K_1, K_2 \subset \Omega$ zwei Kompakta mit $K_1 \subset K_2$, so ist
$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}_{K_1}(\Omega)} \;=\; \text{Spurtopologie von } \mathcal{T}_{\mathcal{D}_{K_2}(\Omega)} \text{ auf } C_{0,K}^\infty(\Omega).$$
5. $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist vollständig.

Beweis:

1. folgt aus den Sätzen 3.11 und 3.13,
2. liegt an der Eigenschaft: Für $m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ m_1 \geq m_2$ gilt:

$$V(p_{K,m_1}, \varepsilon_i) \ \cap \ V(p_{K,m_2}, \varepsilon_j) \ \supset \ V(p_{K,m_1}, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)),$$

3. aus Satz 3.11, 4),
4. folgt wegen $V(p_{K_2,m}, \varepsilon) \cap \mathcal{D}_{K_1}(\Omega) = V(p_{K_1,m}, \varepsilon)$.
5. Übungsaufgabe. ■

Als letztes Beispiel konstruieren wir auf $C_0^\infty(\Omega)$ die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$, bzgl. der die Distributionen (vgl. § 7) stetig sind.

Beispiel 5:

Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$

Die Topologie für $C_0^\infty(\Omega)$

Wir bezeichnen im Folgenden immer mit Ω eine nichtleere, offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und mit K eine kompakte Mengen des $\mathbb{R}^n$.
Offensichtlich ist

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} C_{0,K}^\infty(\Omega) \tag{3.12}$$

ein linearer Vektorraum bezüglich der üblichen Addition und der Multiplikation mit Skalaren. Auf diesem Raum soll eine $\mathcal{T}$ so konstruiert werden, daß folgende **Verträglichkeitseigenschaft** gilt:

Wenn eine Folge $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ konvergiert, so soll sie auch bzgl. der Topologie in $C_0^\infty(\Omega)$ konvergieren.

Dies gilt, wenn $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ wird und ist erreichbar, wenn man für eine Umgebungsbasis $\mathcal{V}$ der Null (für die zu konstruierende Topologie) folgende, leicht einsehbare Bedingungen verlangt (vgl. Sätze 3.10, 3.11, 3.12):

Zu $\mathcal{V}$ gehören alle $V \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

(α) jedes $V \in \mathcal{V}$ ist absorbierend, kreisförmig und konvex.
(β) $\forall\, K \subset \Omega$ kompakt $\wedge$ $\forall\, V \in \mathcal{V}$ ist $V \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Zur Vorbereitung benötigen wir einige Hilfsmittel.

Definition 3.16
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Folge von kompakten Mengen $K_i \subset \Omega$ heißt *kompakte Ausschöpfung von* Ω falls

1. $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$,
2. $\forall\, K \subset \Omega$ kompakt $\quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \; K \subset K_n$.

Lemma 3.17
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es eine kompakte Ausschöpfung $\{K_i\}$ mit

$$K_i \;\subset\; K_{i+1} \;\; \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Beweis: Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ wähle $K_i = \overline{K(0,i)}$, $i \in \mathbb{N}$.
Sei also $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Dann folgt

1. $\mathbb{Q}^n$ abzählbar $\implies$ $\Omega \cap \mathbb{Q}^n$ abzählbar $\implies$ $\Omega \cap \mathbb{Q}^n = \{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $q_j \in \mathbb{Q}^n$.
   $\xRightarrow{\Omega \text{ offen}} \; \forall\, q_j \;\exists\, \varepsilon_j = d(q_j, \delta\,\Omega) > 0 : \; K(q_j, \varepsilon_j) \subset \Omega \implies K\left(q_j, \frac{2\varepsilon_j}{3}\right) =: C_j,$
   $C_j \subset \Omega$, und $\overline{C}_j$ ist kompakt.

   Dabei sei d die Euklidische Metrik und $d(q_j, \delta\,\Omega)$ bezeichne den Abstand des Punktes q_j vom Rand $\delta\,\Omega$ von Ω. $\delta\,\Omega$ ist abgeschlossen.
   Zu $q_j \;\exists\, r > 0 : \; A := \overline{K(q_j, r)} \cap \delta\,\Omega \neq \emptyset$. A ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Der Abstand $d(q_j, \delta\,\Omega) = d(q_j, A)$ existiert, da d als stetige Funktion auf dem Kompaktum $q_j \times A$ ihr Minimum annimmt.)

   Es ist $C := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j = \Omega$. $C \subset \Omega$ ist trivial.

   Sei $x \in \Omega \implies \exists\, \varepsilon > 0 \;:\; K(x, \varepsilon) \subset \Omega$

   $$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Q}^n \text{ dicht in } \mathbb{R}^n \implies \exists\, q_j \in \mathbb{Q}^n \;:\; d(x, q_j) \;<\; \dfrac{\varepsilon}{3}, \\ \text{bekannt ist } d(q_j, \delta\,\Omega) \;=\; \varepsilon_j \;\geq\; \frac{2\varepsilon}{3} \end{array}\right\} \implies d(x, q_j) \;\leq\; \tfrac{\varepsilon_j}{2} \;<\; \tfrac{2\varepsilon_j}{3}\,,$$

   also $x \in K\left(q_j, \frac{2\varepsilon}{3}\right) \subset C_j$.

   Wir haben also $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{j} K\left(q_j, \frac{2\varepsilon_j}{3}\right) = \bigcup\limits_{j} C_j \subset \Omega\,.$

   Setze $K_1 := \overline{C_1}$ und $K_i := K_{i-1} \cup \overline{C_i}$, $i \geq 2\,.$

2. nach 1) ist $K \subset \bigcup\limits_{j} K\left(q_j, \frac{2\varepsilon_j}{3}\right)$, K ist kompakt $\implies$ $\exists$ endliche Überdeckung

$$K \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{n} K\left(q_{j_i}, \frac{2\varepsilon_{j_i}}{3}\right) \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{n} \overline{K\left(q_{j_i}, \frac{2\varepsilon_{j_i}}{3}\right)} \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{n} K_{j_i} \;=\; K_{\max j_i}\,.$$

■

Definition 3.18
Eine Menge E eines topologischen Vektorraumes X heißt *beschränkt,* wenn zu jeder Nullumgebung U ein $k > 0$ existiert mit $E \subset kU$.

Weiter benötigen wir den Begriff der Cauchy-Folge.

Definition 3.19
Eine Folge $\{x_n\}$ in einem topologischen Vektorraum heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jeder Nullumgebung U ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $x_n - x_m \in U \;\; \forall\, n, m \geq N$.

und zeigen

Satz 3.20
Jede Cauchy-Folge $\{x_n\}$ in einem topologischen Vektorraum ist beschränkt.

Beweis

Zu jeder kreisförmigen, absorbierenden Nullumgebung W existiert eine kreisförmige, absorbierende Nullumgebung V mit $V + V \subset W$. Solche Umgebungen existieren, da die Addition im Nullpunkt $(0 + 0 = 0)$ stetig ist und da jede Nullumgebung eine kreisförmige absorbierende Nullumgebung enthält.
Laut Definition der Cauchy-Folge $\exists\, N \in \mathbb{N} :\; x_n \in\; x_N + V \;\forall\, n \geq N$.
V und W sind absorbierend

$$\overset{V\text{ abs.}}{\Longrightarrow} \qquad \exists\, s > 0 :\; x_N \in sV, \;\; \text{Œ}\; s > 1.$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n \in sV + V \subset\; sV + sV \subset sW \;\; \forall\, n \geq N.$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n \in\; sW \;\forall\, n \geq\; N.$$

$$\overset{W\text{ abs.}}{\Longrightarrow} \qquad \exists\, t > 0 :\; x_n \in tW \;\; \text{für } n = 1, \ldots, N, \;\; \text{Œ}\; t \geq s.$$

$$\Longrightarrow \qquad x_n \in tW \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\{x_n\}$ beschränkt. ■

Im folgenden Satz definieren wir die Topologie und beweisen einige ihrer Eigenschaften. Dazu beachten wir, daß auf $C_0^\infty(\Omega)$ durch

$$(3.14) \qquad \|f\|_m = \sup_{t \in \Omega,\, |\nu| \leq m} |\partial^\nu f(t)|, \;\; m \in \mathbb{N}, \;\; \nu \text{ ein Multiindex}$$

Normen erklärt werden, und

$$f \in \mathcal{D}_k(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_m = p_{K,m}(f.)$$

Satz 3.21 Topologie von $\boldsymbol{\mathcal{D}(\Omega)}$
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{V}$ die Familie **aller** Teilmengen $V \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

(α) jedes V ist absorbierend, kreisförmig, konvex,
(β) für jedes kompakte $K \subset \Omega \wedge \forall V$ gilt: $V \cap C_{0,K}^\infty(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0)$.

$\Longrightarrow$

1. Dann wird $C_0^\infty(\Omega)$ mittels der von $\mathcal{V}$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}$ gemäß Satz 3.11 zu einem lokalkonvexen, topologischen Vektorraum mit Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}$.

   Bezeichnung: $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \mathcal{T})$.

2. Für alle Kompakta $K \subset \Omega$ gilt

   $$\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \;=\; \text{Spurtopologie von } \mathcal{D}(\Omega) \text{ auf } C_{0,K}^\infty(\Omega) \qquad (=: \mathcal{T}_{Sp\,\mathcal{D}(\Omega)})$$

3. $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein kompaktes $K \subset \Omega$ sodaß $E \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ beschränkt ist,

4. $\{\varphi_n\}$ ist Cauchy-Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ $\Longleftrightarrow$ $\{\varphi_n\}$ ist Cauchy-Folge in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ für ein kompaktes $K \subset \Omega$ und $\{\varphi_n\}$ konvergiert in $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

5. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist vollständig.

6. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \Longleftrightarrow$ (i) $\exists\, K \subset \Omega,\ K$ kompakt: $\operatorname{Tr} f_n \subset K\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,
   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \partial^\nu f_n = 0$ gleichmäßig auf K $\forall$ Multiindizes ν

   d.h. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}_K(\Omega)} 0.$

   Eine Nullfolge aus $\mathcal{D}(\Omega)$ heißt *Schwarz'sche Nullfolge.*

Bemerkung:

Die Bezeichnungen $C_0^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ (bzw. nur $\mathcal{D}$, falls $\Omega = \mathbb{R}^n$,) werden oft synonym benutzt. Eigentlich bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge der Elemente, bzw. den linearen Raum, und $\mathcal{D}(\Omega)$ den topologischen Raum. Das gleiche gilt für $C_{0,K}^\infty(\Omega)$ bzw. $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Beweis 1):
Wir zeigen zunächst
(a_1) $\mathcal{V} \neq \emptyset$ und
(a_2) $\gamma V \in \mathcal{V}\ \ \forall V \in \mathcal{V},\ \gamma > 0.$

Beweis (a_1): $\forall \varepsilon > 0$ ist $V_\varepsilon := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega);\ \|\varphi\|_n < \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$, absorbierend, kreisförmig, konvex und $\neq \emptyset$, vgl. (3.4), erfüllt also (α).

Für $\varphi \in V_\varepsilon \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ ist $\|\varphi\|_m = p_{K,m}(\varphi)$, woraus folgt

$$V_\epsilon \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C_{0,K}^\infty(\Omega);\ p_{K,m}(\varphi) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0), \quad \Longrightarrow \quad (\beta).$$

Also ist $\mathcal{V} \neq \emptyset$.

Beweis (a_2): Offensichtlich ist γV absorbierend, kreisförmig und konvex $\Longrightarrow$ (α). Da

$$V \cap C_{0,K}^\infty(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0) \quad \text{und} \quad \gamma C_{0,K}^\infty(\Omega) = C_{0,K}^\infty(\Omega),$$

folgt

$$\gamma V \cap C_{0,K}^\infty(\Omega) = \gamma(V \cap C_{0,K}^\infty(\Omega)) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0), \quad \text{nach (3.1), also } (\beta).$$

Bemerkung: Die offenen Mengen, die durch die Normen $\|.\|_m$ erzeugt werden, sind also alle in $\mathcal{V}$ enthalten. (vgl. dazu Bemerkung 2) am Schluß des Paragraphen.)

Konstruktion der Topologie:
Nun definiert jedes $V \in \mathcal{V}$ eine Halbnorm p_V (Minkowski Funktional). Die Familie $P = \{p_V; V \in \mathcal{V}\}$ dieser Halbnormen erzeugt gemäß Satz 3.11 einen lokalkonvexen, topologischen Vektorraum und die Mengen

$$\begin{aligned} U_{x_0} &:= U(p_{j_1}, \ldots, p_{j_n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, x_0) \\ &= \{x \in X;\ p_{j_k}(x - x_0) < \varepsilon_k,\ k = 1, \ldots, n\} = \bigcap_{k=1}^n U(p_{j_k}, \varepsilon_k, x_0), \ \ p_{j_k} \in P, \end{aligned}$$

sind absorbierend, kreisförmig und konvex und bilden für $x_0 = 0$ eine Nullumgebungsbasis.
$\mathcal{V}$ ist Umgebungsbasis, wenn zu jedem $U_0 = \bigcap_{k=1}^n U(p_{j_k}, \varepsilon_k, 0)$, $p_{j_k} \in P$, ein $V \in \mathcal{V}$ exisitiert mit $V \subset U_0$.
Nun gilt für das Minkowski Funktional p_V zu $V \in \mathcal{V}$ (vgl. (3.6))

$$\kappa V \subset \{x \in X;\ p_V(x) < 1\} \subset V \quad \forall\, 0 < \kappa < 1,$$

bzw.

$$(*) \qquad \varepsilon\kappa V \subset \{x \in X;\ p_V(x) < \varepsilon\} \subset \varepsilon V \quad \forall\, 0 < \kappa < 1,\ \varepsilon > 0,$$

d.h. in jedem $\{x \in X;\ p_V(x) < \varepsilon\}$ ist gemäß (a_1) ein Element aus $\mathcal{V}$ enthalten. Zeigt man das auch für endliche Durchschnitte solcher Mengen, so hat man die Basiseigenschaft von $\mathcal{V}$ gezeigt. Aus $(*)$ folgt

$$\varepsilon_1\kappa_1 V_1 \cap \varepsilon_2\kappa_2 V_2 \subset \{x \in X;\ p_{V_1}(x) < \varepsilon_1,\ p_{V_2}(x) < \varepsilon_2\} \subset \varepsilon_1 V_1 \cap \varepsilon_2 V_2.$$

Zeigt man nun noch

$$(a_3) \qquad V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V} \ \ \forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}, \qquad \text{(allgemeiner: endliche Durchschnitte)}$$

so folgt hieraus laut der Definition der Umgebung U_0 mit (a_2): $U_0 \in \mathcal{V}$.

Beweis (a_3): Es gilt für $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ gemäß (β)

$$V_1 \cap V_2 \cap C^\infty_{0,K} = \underbrace{(V_1 \cap C^\infty_{0,K})}_{\in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0)} \cap \underbrace{(V_2 \cap C^\infty_{0,K})}_{\in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0)} \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0), \quad \text{also}$$

$$V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0).$$

Beweis 2:)
Sei U eine offene Menge $\in \mathcal{D}_K(\Omega)$.
$\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K(\Omega))}$ wird erzeugt durch die offenen Mengen $\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega);\ \|\varphi - x_0\|_m < \varepsilon\}$, $\forall\, x_0 \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $m = 0, 1, \ldots$ und $\|\varphi - x_0\|_m = p_{K,m}(\varphi - x_0)$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$.
Nun sind die $\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \|\varphi - x_0\|_m < \varepsilon\}$ offene Mengen in $\mathcal{T}$. (vgl. (a_1) aus Beweisteil 1)).
Weiter ist

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega);\ \|\varphi - x_0\|_m < \varepsilon\} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \|\varphi - x_0\|_m < \varepsilon\} \cap C^\infty_{0,K}(\Omega),$$

entsteht also durch Schnittbildung. Deshalb erhält man auch jedes $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ durch Schnittbildung.

Sei andererseits $V \in \mathcal{T}$ eine offene Menge und $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \cap V$ beliebig.
Dann zeigen wir:
$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \cap V$ ist die Menge $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap V$ eine Umgebung von φ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$, ist also Umgebung aller ihrer Elemente, also offen in $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Laut Definition von $\mathcal{T}$: $\exists\, W \in \mathcal{V}$: $\varphi + W \subset V$,

(denn aus $\varphi \in V \in \mathcal{T} \implies V - \varphi \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(0)$, (nach (3.2) offene Umgebung aller ihrer Punkte) $\implies \exists\, W \in \mathcal{V}$ mit $W \subset \mathcal{V}$ (Erzeugendensystem)).

$$\begin{aligned} &\overset{(\beta)}{\Longrightarrow} & W \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0) \\ &\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} & \varphi + W \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(\varphi) \\ &\Longrightarrow & (\varphi + W) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \subset V \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(\varphi), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Beweis 3):
„ $\Longleftarrow$ “ folgt aus der Spurtopologie, denn $\forall\, V \in \mathcal{V}$ ist $V \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K}(0)$.
E beschränkt in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ d.h. $\forall\, V \in \mathcal{D}_K(\Omega)\ \exists\, m > 0$: $E \subset m(V \cap \mathcal{D}_K(\Omega)) \subset mV$
$\implies$ E beschränkt in $\mathcal{D}(\Omega)$.

„ $\Longrightarrow$ “ beweisen wir indirekt.
Es genügt, folgende Behauptung nachzuweisen

$(**)$ $\quad E$ beschränkt in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \exists$ kompaktes $K \subset \Omega : \mathrm{Tr}E \subset K$, daß dann E beschränkt ist in $\mathcal{D}_K(\Omega)$, folgt aus der Spurtopologie.

Zum Beweis benötigen wir folgende Hilfsaussage

Lemma 3.22

1. F sei ein lokalkonvexer Raum mit einer Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}_F$ von offenen, konvexen Mengen,
2. $G \subset F$ sei ein abgeschlossener Unterraum mit der Spurtopologie. $(\implies \mathcal{V}_G = \mathcal{V}_F \cap G)$
3. $V_G \subset G$ sei eine kreisförmige, konvexe Nullumgebung.
4. $x \in F \setminus G$.

$\implies$

$\exists$ eine kreisförmige, konvexe Nullumgebung W in $F:$ $W \cap G = V_G$ und $x \notin W$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{lll} G \text{ abgeschlossen in } F & \implies & \exists\, V_F^1 \in \mathcal{V}_F:\ (x+;V_F^1) \cap G = \emptyset \\ \text{Spurtopologie} & \implies & \exists\, V_F^2 \in \mathcal{V}_F:\ V_F^2 \cap G \subset V_G. \end{array}\right\}$$

$\implies$ $V_F =: V_F^1 \cap V_F^2$ ist kreisförmig, konvex und erfüllt

(i) $V_F:\ (x + V_F^1) \cap G = \emptyset,$ $\qquad (V_F^1 \subset V_F)$

(ii) $V_F \cap G \subset V_G.$ $\qquad (V_F^2 \subset V_F)$

Die kreisförmige, konvexe Hülle (absolut konvexe Hülle)

$$W := \Gamma(V_G \cup V_F) = \{\alpha v_G + \beta v_F;\ v_G \in V_G,\ v_F \in V_F,\ |\alpha| + |\beta| \leq 1\}$$

erfüllt $V_G \in W,\ V_F \in W$ und

(iii) $V_G = W \cap G$ und $x \notin W,$

denn $V_G \subset W \cap G,$ laut Definition von $W.$
Sei $w \in W \cap G.$
$w = \alpha v_G + \beta v_F;\ w \in G,\ \alpha v_G \in V_G \subset G$ (da V_G kreisförmig) $\implies \beta v_F \in G$.
Da $\beta v_F \in V_F$ (V_F kreisförmig), folgt $\beta v_F \in V_F \cap G \overset{\text{(ii)}}{\subset} V_G$, also $w \in V_G.$

Annahme: $x \in W \implies x = y + z,\ y = x - z \in x + V_F$ da V_F kreisförmig
$\implies y \in G \cap (x + V_F)$ **W!** wegen (i).

Wir zeigen nun $(**)$ indirekt. Annahme: $\nexists K \subset \Omega:\ E \subset \mathcal{D}_K(\Omega).$
Sei $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ eine kompakte Überdeckung. OE $E \cap \mathcal{D}_{K_i}(\Omega) \neq \emptyset,\ K_i \subset K_{i+1},$

> sonst wählt man eine unendliche Teilfolge $\{\mathcal{D}_{K_{i_n}}(\Omega)\} \subset \{\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)\}$ mit dieser Eigenschaft. Dann ist $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{i_n}$ auch eine kompakte Überdeckung.

Sei $\mathcal{D}_{K_0}(\Omega) := \emptyset$. Dann folgt

$$E \not\subset \mathcal{D}_{K_0}(\Omega) \implies \exists f_1 \in E \setminus \mathcal{D}_{K_1}(\Omega) \text{ mit } f_1 \notin \mathcal{D}_{K_0}(\Omega),$$

$$E \not\subset \mathcal{D}_{K_1}(\Omega) \implies \exists f_2 \in E \setminus \mathcal{D}_{K_2}(\Omega) \text{ mit } f_2 \notin \mathcal{D}_{K_1}(\Omega),$$

$$E \not\subset \mathcal{D}_{K_2}(\Omega) \implies \exists f_3 \in E \setminus \mathcal{D}_{K_3}(\Omega) \text{ mit } f_3 \notin \mathcal{D}_{K_2}(\Omega), \text{ also auch } x_3 \notin \mathcal{D}_{K_1}(\Omega) \cup \mathcal{D}_{K_0}(\Omega).$$

$$\text{usw.} \qquad \implies$$

$\exists$ eine Folge $\{f_n\}$, $f_n \in E \cap \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$, $f_n \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}_{K_j}(\Omega)$.

Ausgehend von einer kreiförmigen, konvexen Nullumgebung $V_1 \in \mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ liefert die Anwendung von Lemma 3.22 ($\forall\, n > 1$) auf

$F = \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$, $G = \mathcal{D}_{K_{n-1}}(\Omega)$, $x = \frac{1}{n} f_n \in \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$, $W = V_n$,

eine Folge von kreisförmigen, konvexen Nullumgebungen $V_n \subset \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ mit

$(*) \qquad V_{n-1} = V_n \cap \mathcal{D}_{K_{n-1}}(\Omega),$
$(**) \qquad \dfrac{1}{n} f_n \notin V_n.$

Nun ist für ein beliebiges $n:\ f_n \notin \mathcal{D}_{K_i}(\Omega) \ \forall\, i < n$ also $\underline{\dfrac{1}{n} f_n \notin V_i \ \forall\, i \le n.}$

Aus $(*)$ folgt $\forall\, j \ge n:\ \ V_j \cap \mathcal{D}_{K_{n-1}}(\Omega) = V_{n-1}$.
Wäre $\dfrac{1}{n} f_n \in V_j$ für ein $j > n$, so folgte wegen $f_n \in \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$
$\dfrac{1}{n} f_n \in V_j \cap \mathcal{D}_{K_n}(\Omega) = V_n$, ein **W** zu $(**)$, also $\underline{\dfrac{1}{n} f_n \notin V_j \ \forall\, j > n.}$
Insgesamt also $f_n \notin nV_i \ \forall\, i$.

Nun ist $V := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j$ eine kreisförmige, konvexe Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$V \cap \mathcal{D}_{K_i}(\Omega) = V_i \text{ und für beliebige } n:\ f_n \notin nV_j \ \forall\, j, \text{ also } f_n \notin nV,$$

d.h. $\{f_n\}$ und damit E sind nicht beschränkt in $\mathcal{D}(\Omega)$. **W!**.

Beweis 4):
„ $\Longleftarrow$ “ folgt aus 2) (Spurtopologie),
denn $\{\varphi_n\}$ ist CF in $\mathcal{D}_K(\Omega)$, dieser Raum ist vollständig (Satz 3.15), also konvergiert $\{\varphi_n\}$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ gegen einen Grenzwert φ^*, der auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt, also konvergiert die Folge auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ und ist dort natürlich auch CF.
„ $\Longrightarrow$ “

Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, liegt also in einem $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dieser Raum ist vollständig (vgl. vorhergehender Satz). Die Folge konvergiert also.

Beweis 5): folgt aus Beweis 4), da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ vollständig ist.

Beweis 6): folgt ebenfalls aus 4), da jede konvergente Folge Cauchy-Folge ist, also in einem $\mathcal{D}_K(\Omega)$ und dort wird die Konvergenz durch Satz 3.15 beschrieben. ■

Bemerkungen:

1. Die Distributionen über Ω sind stetige, lineare Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ (vgl. § 7).
2. Wird $C^{\infty}_{0,K}(\Omega)$ normiert durch die abzählbare Menge der Normen (3.14), der so entstehende topologische Raum wird üblicherweise mit $\mathcal{E}(\Omega)$ bezeichnet, so ist in diesem Raum die Folge $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n})$, φ gemäß Beispiel 3 vor Satz 3.15, konvergent.
   Im Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ ist sie divergent. Die Träger fließen auseinander.

   Dieses Beispiel zeigt, daß zwei verschiedene Topologien auf einem Oberraum dieselbe Spurtopologie auf einem Unterraum induzieren können (vgl. Beweis 1) des obigen Satzes).

§ 4 Normierte Räume

Ein linearer Raum, der eine Metrik besitzt, wird zu einem normierten Raum, wenn die lineare und die metrische Struktur verträglich sind, d.h. wenn die Metrik zusätzlich erfüllt die

$$\begin{array}{llcll} \text{Translationsinvarianz} & d(x+z,y+z) & = & d(x,y), & \forall\, x,y,z \in X\,, \\ \text{Homogenität} & d(\alpha\, x,\alpha\, y) & = & |\alpha| d(x,y), & \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x,y \in X\,. \end{array}$$

Dann wird durch

$$(4.1) \qquad \|x\| \ := \ d(x,0), \quad x \in X \ \text{eine Norm definiert}\,.$$

Wir erinnern an die Definitionen von Normen und Halbnormen.

Definition 4.1
Sei X ein linearer Raum. Eine Abbildung $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls

(N1) $\|x\| \ \geq\ 0, \quad \|x\| \ =\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ =\ 0.$

(N2) $\|\alpha\, x\| \ =\ |\alpha|\, \|x\|.$

(N3) $\|x+y\| \ \leq\ \|x\| + \|y\|.$

Eine *Halbnorm* liegt vor, wenn statt (N1) nur gilt

(N1') $\|x\| \ \geq\ 0, \quad \forall\, x \in X.$

(N2), (N3) unverändert (vgl. Definition 3.9).

Ein *normierter Raum ist ein linearer Raum mit einer Norm.*

Ein vollständiger, normierter Raum heißt Banachraum.

Man sieht sofort, daß (4.1) die Eigenschaften (N1)–(N3) erfüllt.

Beachte: Eine Metrik verlangt keine lineare Struktur.
Jeder normierte Raum $(X, \|\ \|)$ ist auch ein metrischer Raum mittels

$$d(x,y) \ = \ \|x-y\|\,,$$

und da jede Norm auch eine Halbnorm ist, ist $(X, \|\ \|)$ auch lokal konvex.

Damit übertragen sich alle Aussagen für metrische Räume auch auf normierte Räume, insbesondere z.B. die Vervollständigung.

Aber: Nicht jeder metrische Raum läßt sich normieren.

Beispiel: Die Metrik von $\mathcal{S} : d_S(x,y) = \int\limits_a^b \dfrac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\, dt$ verletzt (N2).

Beispiele für Banachräume (vgl. (1.1)–(1.4)):

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m} |x_i| \,, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \,, \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \end{aligned}$$

$$C^n(K),\ K \subset \mathbb{R}^n,\ \text{kompakt, mit } \|x\| \ = \ \sup_{\substack{x\in K \\ |s|\le n}} |\partial^s f(x)| \,.$$

Definition 4.2
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f \in C(K)$. Für $0 < \alpha \le 1$ heißt

$$\text{höl}_\alpha(f,K) := \sup_{\substack{x,y\in K \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \quad \textit{Hölder-Konstante} \text{ von } f, \quad \left(|x| = \sqrt{\sum x_i^2}\right) ,$$

$$\text{höl}_1(f,K) \qquad \textit{Lipschitzkonstante} \text{ von } f \,.$$

Ist $\text{höl}_\alpha(f,K) < \infty$, so heißt f *Hölderstetig* (*Lipschitzstetig* falls $\alpha = 1$).

Sätzchen 4.3
Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist der Hölder-Raum

$$C^{m,\alpha}(K) \ := \ \left\{ f \in C^m(K);\ \text{höl}_\alpha(\partial^s f, K) < \infty \ \forall\, |s| = m \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_{K,\alpha} \ := \ \max_{|s|\le m} \sup_{t\in K} |\partial^s x(t)| + \max_{|s|=m} \sup_{\substack{t,\tau\in K \\ t\neq\tau}} : \frac{|\partial^s x(t) - \partial^s x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}$$

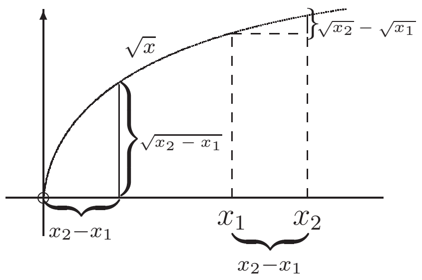
ein Banachraum.

(Beachte: Nur die höchsten Ableitungen sollen hölderstetig sein.)

Beweis (als Übung): Hinweise: Zeige
a) $\|x\|_{K,\alpha}$ ist eine Norm,
b) verwende: $C^m(K)$ ist vollständig. ■

Bemerkung: Es genügt $\text{höl}_\alpha(\partial^s f, K) < \infty$ für $|t-\tau| \le \varepsilon < 1$ zu fordern, für $|t-\tau| \ge \varepsilon$ ist der Ausdruck beschränkt, da $|\partial^s f|$ beschränkt ist.

Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ ist hölderstetig auf $[0,b]$, mit $\alpha = \frac{1}{2}$.



$x_1, x_2 > 0$ Œ $x_2 > x_1$ dann gilt

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \;\leq\; \sqrt{x_2 - x_1} \quad \text{(quadrieren)},$$

speziell $x_1 = 0 \implies \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2 - x_1}\,.$

Hölderstetige Funktionen spielen eine große Rolle in der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen!

Bevor wir weitere Beispiele normierter Räume untersuchen, betrachten wir einige

Eigenschaften normierter Räume

Satz 4.4
$(X, \|\ \|)$ normierter Raum,
$\implies$ $(x, y) \to x + y$ und $(\alpha, x) \to \alpha \cdot x$ und $x \to \|x\|$ sind stetige Abbildungen.

Beweis: (eigentlich überflüssig nach Satz 3.11,3)
Man benutze die Stetigkeitsdefinition in metrischen Räumen und beachte die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\|(x_1 + y_1) - (x_0 + y_0)\| &\leq \|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\| && \implies \text{Addition stetig,}\\
\|\alpha_1 x_1 - \alpha_0 x_0\| &\leq \|(\alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_0) + (\alpha_1 x_0 - \alpha_0 x_0)\| &&\\
&\leq |\alpha_1|\,\|(x_1 - x_0)\| + \|x_0\|\,|\alpha_1 - \alpha_0| && \implies \text{Skalarmultiplikation ist stetig,}\\
\big|\|x_1\| - \|x_0\|\big| &\leq \|x_1 - x_0\| && \implies \text{Norm ist stetig.}
\end{aligned}$$

■

Definition 4.5

Seien $(X_i, \| \|_i)$, $i = 1,2$ normierte Räume.

1. $A : X_1 \to X_2$ heißt *Isomorphismus* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$$\begin{cases} A \text{ ist linear : } & A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2\,, \\ \text{bijektiv } (1-1, \text{auf}) & \end{cases}$$
bzw. *isometrischer Isomorphismus* falls zusätzlich $\|Ax\|_2 = \|x\|_1$.

2. $(X_i, \| \|_i)$ heißen *normisomorph* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists$ isometrischen Isomorphismus $A : X_1 \to X_2$.

3. $(X_i, \| \|_i)$ heißen *toplinear isomorph* (topologisch isomorph) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists$ stetigen Isomorphismus $A : X_1 \to X_2$ und A^{-1} stetig.

Bemerkungen zu 1) und 3): In der englischsprachigen Literatur bedeutet „ A linear“ üblicherweise „ A ist homogen: $A(\alpha x) = \alpha A x$ und linear: $A(x+y) = Ax + Ay$ “ (**nicht** stetig). In der östlichen Literatur ist oft ein linearer Operator per Definition auch stetig. Dies rührt wohl daher, daß diese Aussage in endlich dimensionalen Räumen richtig ist (vgl. Folgerung 1 d) von Satz 4.13).
Manche Autoren (z.B. Alt, Werner) schließen in den Begriff *Isomorphie* die Stetigkeit der Inversen mit ein.
Man vergewissere sich also in jedem Buch, was gemeint ist.

Satz 4.6

$(X_i, \| \|_i)$, $i = 1,2$ toplinear isomorph $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} \exists\, A : X_1 \overset{\text{lin}}{\longrightarrow} X_2,\ 1-1 \text{ auf (Isomorphismus)}, \\ \exists\, m, M > 0 :\ m \le \dfrac{\|x\|_1}{\|Ax\|_2} \le M \ \forall x \in X_1,\ x \neq 0\,. \end{cases}$$

Beweis:

„ $\Longleftarrow$ “ A, A^{-1} sind stetig wegen $\|Ax\|_2 \le \frac{1}{m}\|x\|_1 \ \forall x \in X_1$
und mit $Ax = y$: $\|A^{-1}y\|_1 \le M\|y\|_2$
(z.B. Folgendefinition der Stetigkeit oder ε, δ Definitionen).

„ $\Longrightarrow$ “ A stetig in $x = 0$ $\Longrightarrow$ zu $\varepsilon = 1$ $\exists\, \delta > 0 :$ $\|\tilde{x}\|_1 = \delta$ $\Longrightarrow$ $\|A\tilde{x}\|_2 \le 1$,

$$\Longrightarrow \frac{\|A\tilde{x}\|_2}{\|\tilde{x}\|_1} \le \frac{1}{\delta} \qquad \text{Trick: Setze für beliebige } x \neq 0,\quad \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_1} \cdot \delta$$

$$\Longrightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \frac{\|A\tilde{x}\|_2}{\|\tilde{x}\|_1} \le \frac{1}{\delta} \quad (\text{setze } m := \delta);$$

für die andere Ungleichung benutze man, daß A^{-1} stetig ist. ■

Beachte: Satz 4.6 besagt auch, daß ein toplinearer Isomorphismus A die Grenzwertbegriffe invariant läßt, d.h.

$$x_n \underset{\| \|_1}{\longrightarrow} x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad Ax_n \underset{\| \|_2}{\longrightarrow} Ax_0 .$$

Folgerung 1

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ist } (X, \| \|_1) \text{ ein Banachraum (BR)} \\ (X, \| \|_1) \text{ toplinear isomorph zu } (Y, \| \|_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (Y, \| \|_2) \text{ ist auch BR.}$$

Ist speziell $X = Y$, so erhält man:

Folgerung 2

Sind $\| \|_i,\ i = 1, 2,$ Normen auf X , so sind äquivalent

1. $\exists\, m, M > 0 : \ \forall\, x \in X,\ x \neq 0 \quad m \leq \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq M$,
2. $X \overset{id}{\longrightarrow} X$ ist toplinearer Isomorphismus zwischen $(X, \| \|_1)$ und $(X, \| \|_2)$,
3. $(X, \| \|_1)$ und $(X, \| \|_2)$ haben dieselbe Topologie.

Beweis:

1. $\Longleftrightarrow$ 2. Nach Satz 4.6 mit $A = id$.

2. $\Longleftrightarrow$ 3. Benutze für id die Stetigkeitsdefinition: Urbilder offener Mengen sind offen.

Definition 4.7

Auf einem linearen Raum sind *2 Normen äquivalent* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
Es gilt 1. oder 2. oder 3. in Folgerung 2.

Beispiele:

1. (a) $X = C[a, b],\ p_i \in C[a, b],\ p_i(x) > 0\ \forall\, x \in [a, b],\ i = 1, 2.$.
   Dann sind äquivalent $\|x\|_i = \max\limits_{t \in [a,b]} p_i(t) \cdot |x(t)|,\ i = 1, 2$ (Übung: Benutze Folgerung 2,2.)

   Anwendung: Beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf mit Hilfe des Kontraktionssatzes zur Erreichung eines größeren Existenzintervalls für die Lösung einer AWA gewöhnlicher Differentialgleichungen.

   (b) Auf $C[a, b]$ sind nicht äquivalent

   $\|f\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |f(t)|$ und $\|f\|_{L_2} = \int\limits_a^b f(t)\, dt$ (vgl. Einleitung) oder

   $\| \|_\infty$ und $\|x\|_{L_1} = \int\limits_a^b |x(t)|\, dt$ (Gegenbeispiel: S 20).

2. Sind $(X, \| \, \|_x)$, $(Y, \| \, \|_y)$ normiert, so sind auf $X \times Y$ äquivalent:

$$\sup\left(\|x\|_x,\ \|y\|_y\right),$$

$$\|x\|_x + \|y\|_y,$$

$$\text{für } p \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[p]{\|x\|_x^p + \|x\|_y^p} \quad \text{(zum Normnachweis, vgl. später), (Übung).}$$

Analog zu Satz 2.3 (Vervollständigung) gilt

Satz 4.8
Jeder normierte Raum $(X, \| \, \|)$ läßt sich in einen bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmten Banachraum $(\widetilde{X}, \| \, \|)$ – die *vollständige Hülle* von $(X, \| \, \|)$ – einbetten.

Der Beweis von Satz 2.3 kann abgeschrieben werden.

Definition 4.9
Ein linearer Teilraum eines normierten Raumes $(X, \| \, \|)$ ist ein linearer Teilraum des linearen Raumes X, versehen mit der durch $\| \, \|$ induzierten Norm.

Unmittelbar einsichtig ist:

Sätzchen 4.10

1. Ist $(X, \| \, \|)$ ein BR $\Longrightarrow$ jeder abgeschlossene Teilraum von $(X, \| \, \|)$ ist BR.
2. Ein vollständiger Teilraum eines normierten Raumes ist (in diesem) abgeschlossen.

Folgen und Reihen in normierten Räumen

Definition 4.11
In $(X, \| \, \|)$ sei $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in X,$ eine unendliche Reihe.

S heißt *konvergent* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Die Folge der Teilsummen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ ist konvergent.

S heißt *absolut konvergent* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergent.

Satz 4.12
Sei $(X, \| \, \|)$ ein BR $\Longrightarrow$
Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und jede Umordnung konvergiert ebenfalls zur selben Summe.

Beweis: Konvergente Folgen im Banachraum sind Cauchyfolgen und

$$\|S_{n+p} - S_n\| \;=\; \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|.$$

Die Umordnungseigenschaft folgt aus dem entsprechenden Satz über reelle Zahlenfolgen. ■

Endlichdimensionale normierte Räume

Zentral ist

Satz 4.13
Sei $(E_n, \|\;\|)$ ein normierter Raum mit $\dim E_n = n < \infty$
$\Longrightarrow (E_n, \|\;\|)$ ist toplinear isomorph zum $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) mit $\|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}$.

Beweis Idee: Benutze Satz 4.6 und zeige (Œ für $\mathbb{R}^n$ als Bildraum)

$$\exists\, A:\; E_n \;\overset{\text{lin}}{\longrightarrow}\; \mathbb{R}^n,\;\; 1-1, \text{auf}, \;\; \wedge \exists\, m, M > 0:\; m \leq \frac{\|x\|}{\|Ax\|_2} \leq M\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \dim\, E_n \;=\; n \quad &\Longrightarrow \quad \exists\,\text{Basis}\, b_i,\;\; i = 1, \ldots, n,\;\; b_i \in E_n \\ &\Longrightarrow \quad \forall\, x \in E_n \quad \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R},\;\; i = 1, \ldots, n\;:\; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, b_i\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} A \;:\; E_n \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^n \qquad\qquad \text{linear},\;\; 1-1,\;\; \text{auf} \\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, b_i \;&\longrightarrow\; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T\,. \end{aligned}$$

Zeige $\exists\, m, M > 0$:

$$\begin{aligned} & m \;\leq\; \frac{\left\|\sum\limits_i \alpha_i\, b_i\right\|}{\left(\sum |\alpha_i|^2\right)^{1/2}} \;\leq\; M \\ \Longleftrightarrow\quad & m \;\leq\; \left\| \sum_i \frac{\alpha_i}{(\sum\limits_j |\alpha_j|^2)^{1/2}} \cdot b_i \right\| \;\leq\; M \\ \Longleftrightarrow\quad & m \;\leq\; \left\|\sum_i \beta_i\, b_i\right\| \;\leq\; M \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \;=\; 1\,. \end{aligned}$$

Nun ist $\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \|\sum\limits_i \beta_i\, b_i\|$ eine reellwertige, stetige Funktion (Satz 4.4) auf der kompakten Einheitsphäre des $\mathbb{R}^n$, nimmt also dort ihr Maximum M und ihr Minimum m an.

Es ist $m > 0$, denn

$$\begin{aligned} \sum \beta_i\, b_i \;=\; 0 \quad &\Longrightarrow \quad \beta_i \;=\; 0 \quad \forall\, i \quad \text{(lineare Unabhängigkeit)} \\ &\Longrightarrow \quad \mathbf{W} \text{ zu } \sum \beta_i^2 \;=\; 1\,. \end{aligned}$$ ■

Folgerungen

1. für endlich dimensionale Räume:
   - a) $(X, \|\;\|_x)$, $(Y, \|\;\|_y)$, $\dim X = \dim Y < \infty \Longrightarrow X$ toplinear isomorph zu Y.
   - b) $(X, \|\;\|)$, $\dim X = n \Longrightarrow$
     - α) In X (speziell auch in $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) sind alle Normen äquivalent.
     - β) $(X, \|\;\|)$ ist ein Banachraum.
     - γ) In $(X, \|\;\|)$ ist die Einheitsphäre kompakt.
   - c) $(Y, \|\;\|)$, $X \subset Y$ Teilraum, $\dim X < \infty \Longrightarrow X$ ist BR und daher auch abgeschlossen.
   - d) $(X, \|\;\|_x) \xrightarrow{\text{A lin}} (Y, \|\;\|_y)$, $\dim X < \infty \Longrightarrow A$ stetig.
2. für unendlich dimensionale Räume:

   Ist in Y die Einheitsphäre nicht kompakt $\Longrightarrow \dim Y = \infty$.

Beweis:

1. a) topologisch lineare Isomorphismen sind transitiv.
   - b) α) $\forall$ beliebigen Normen $\|\;\|_b$ ist $(\mathbb{R}^n, \|\;\|_b)$ topologisch linear isomorph zu $(\mathbb{R}^n, \|\;\|_2)$.
     - β, γ) denn in $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) gilt dies. Kompaktheit (Überdeckungseigenschaft) ist eine topologische Eigenschaft.
   - c) klar
   - d) A ist folgenstetig, denn in X gilt mit einer Basis $\{b_1, ..., b_n\} \subset X$:

     $$x := \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i \;\longrightarrow\; y := \sum_{i=1}^{n} y_i\, b_i \;\xRightarrow{\text{b, }\alpha)}\; x_i \;\longrightarrow\; y_i \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

     Stetigkeit der Rechenoperationen „ $+$ “ und „ $\cdot$ “ liefern

     $$Ax \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\, A\, b_i \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} y_i\, A\, b_i \;=\; A\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\, b_i\right) \;=\; A\, y\,.$$

2. Umkehrung von b), γ) . ■

Diese Aussagen geben schon einen Hinweis auf die Bedeutung der Kompaktheit.

Ohne Beweis erwähnen wir eine Verschärfung von Folgerung 1. c) :

Satz 4.14

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } (X,\|\ \|) \text{ ein normierter Raum}\\ G\subset X \text{ ein abgeschlossener Unterraum}\\ E\subset X \text{ ein endlich dimensionaler Teilraum}\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad G\oplus E \text{ abgeschlossen in } X\,.$$

Dabei heißt $Z=G\oplus E$ *direkte Summe* von G und E, wenn jedes Element $z\in Z$ eine eindeutige Darstellung $z=p_1(z)+p_2(z)$ besitzt wobei die *Projektionen* $p_1: G\longrightarrow Z$ und $p_2: E\longrightarrow Z$ lineare Abbildungen sind. (vgl. z.B. Wloka §8.4)

Wir beweisen nun eine Anwendung von Satz 4.13 auf Approximationsprobleme

Satz 4.15 Existenz der besten Approximation, Minimallösung

In $(X,\|\ \|)$ sei E ein endlich dimensionaler Teilraum $(\dim E=l)$.

$$\Longrightarrow\quad \forall x\in X\ \exists y^*\in E:\ \|x-y^*\|=\inf_{y\in E}\|x-y\|$$

Anwendungsbeispiel: Approximation von $f\in C[a,b]$ durch Polynome vom Grad $l-1$ $\Bigl($beachte: $\dim\Bigl\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\,x^i;\ a_i\in \mathbb{K}\Bigr\}=n+1\Bigr)$.

Beweis: Sei $x\in X\setminus E$.

$$\begin{array}{llcl}
 & \exists\,\{x_n\}\subset E: \quad \|x-x_n\| & \xrightarrow{n\to\infty} & \delta\ :=\ \inf\limits_{y\in E}\|x-y\|,\\
\Longrightarrow & \text{Zu } K>0\ \exists\,\overline{n}\in\mathbb{N}: \quad \|x-x_n\| & \le & \delta+K\ \ \forall n\ge\overline{n},\\
\Longrightarrow & (\Delta-\text{Ungleichung}) \qquad \|x_n\| & \le & \|x\|+\delta+K\ \ \forall n\ge\overline{n}.
\end{array}$$

Nach Satz 4.13 $\exists$ toplinearer Isomorphismus

$$A:E\to\mathbb{R}^\ell:\ m\|y\|\le\|A\,y\|\le M\|y\|\ \ \forall y\in E, \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow\quad \|Ax_n\|\le M\|x_n\|\le M(\|x\|+\delta+K)\quad\Longrightarrow\quad \{Ax_n\}\subset\mathbb{R}^n \text{ ist beschränkt.}$$

$$\xRightarrow{\text{Bolzano-Weierstraß}}\ \exists \text{ konvergente Teilfolge}\quad \{A\,x_{n_k}\}\ \xrightarrow{k\to\infty}\ y_0,\quad x_0\ :=\ A^{-1}\,y_0,$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\qquad \|x_{n_k}-x_0\|\ \le\ \tfrac{1}{m}\,\|A\,x_{n_k}-y_0\|\ \xrightarrow{k\to\infty}\ 0,$$

$$\Longrightarrow\qquad \|x-x_0\|\ \le\ \underbrace{\|x-x_{n_k}\|}_{\xrightarrow{k\to\infty}\delta}+\underbrace{\|x_{n_k}-x_0\|}_{\xrightarrow{k\to\infty}0}\ \xrightarrow{k\to\infty}\ \delta,$$

$$\text{also}\quad \|x-x_0\|\ =\ \delta,\qquad \text{setze}\quad y^*\ =\ x_0.$$

■

Bemerkung: Die beste Approximation braucht nicht eindeutig bestimmt zu sein!

Aufgabe

1. Ist der normierte Raum $(X, \| \|)$ strikt konvex, d.h. in der Dreiecksungleichung $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ gilt das „$=$" genau dann, wenn $x = py$ mit einem $p > 0$ oder wenn $x = 0$ oder $y = 0$), so besitzt die Approximationsaufgabe genau eine Lösung.

2. Im Fall $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$, $E = \mathbb{R}^1$ zeige man an einem Beispiel, daß die Minimallösung nicht eindeutig ist.

3. Im Fall $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $E = \mathbb{R}^1$ zeige man, daß die Minimallösung eindeutig ist.

Fazit: Auch topologisch äquivalente Normen haben unterschiedlichen praktischen Nutzen.

Bemerkung: Im besonders wichtigen Fall $X = C[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ ist der Raum $(X, \| \|)$ nicht strikt konvex.

Normierte Produkträume

Als offensichtliche Anwendung der vorigen Sätze erhalten wir

Satz 4.16 (normierte Produkträume)
Seien $(X_i, \| \|_i)$, $i = 1, \ldots, n$ endlich viele, normierte Räume und
$X = X_1 \times \ldots \times X_n := \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in X_i\}$ das kartesische Produkt.

$\Longrightarrow$

1. Durch
$$\left.\begin{array}{lcl}(x+y)_i & := & x_i + y_i \\ (\alpha\, x)_i & := & \alpha\, x_i\end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, n$$
wird X zu einem linearen Raum.

2. Durch jede der untereinander äquivalenten Normen
$$\|x\|_\infty \ := \ \max \|x_i\|_i, \quad \|x\|_p \ := \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$
wird X zu einem normierten Raum.

3. $(X, \| \|_p)$ ist BR $\Longleftrightarrow$ alle $(X_i, \| \|_i)$ sind BRe.

Der Normbeweis für $\| \|_p$ wird in (4.7) nachgetragen.

Normierte Quotientenräume

Ist $(X, \| \,\|)$ ein normierter (oder halbnormierter) Raum, $Y \subset X$ ein Teilraum.

$\Longrightarrow$ $x_1 \sim x_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_1 - x_2 \in Y$ ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch).

X kann in *Äquivalenzklassen* eingeteilt werden

$$\begin{aligned} \hat{x} &:= \{y \in X;\, y \sim x\} \;=\; \{y \in X;\, y - x \in Y\} \;=\; \{y \in X,\, y \in x + Y\} \\ &= x + Y, \qquad x \text{ heißt Vertreter der Äquivalenzklasse } \hat{x}\,. \end{aligned}$$

Dann wird der *Quotientenraum* X/Y definiert durch

$$X/Y \;:=\; \{\hat{x};\, x \in X\}. \qquad \text{(Raum der Äquivalenzklassen)}$$

Er hat folgende, natürliche, lineare Struktur:

$$\left.\begin{array}{lll} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 := x_1 + Y + x_2 + Y & = x_1 + x_2 + Y & = \widehat{x_1 + x_2} \\ \alpha\,\hat{x} \quad := \alpha\, x + Y & & = \widehat{\alpha\, x} \\ \text{und das Nullelement} & & \\ \hat{0} \quad\;\; := 0 + Y & & = Y \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad X/Y \text{ ist linearer Raum.}$$

Satz 4.17
Sei (X, p) ein halbnormierter Raum und Y ein abgeschlossener, halbnormierter Teilraum von (X, p), so gilt

1. X/Y wird normiert durch

$$\|\hat{x}\|_Q \;:=\; \inf_{y \in Y} p(x + y) \;=\; \inf_{z \in \hat{x}} p(z).$$

2. Ist X vollständig, so ist X/Y ein Banachraum,

   d.h. die Vollständigkeit ist erblich bei Quotientenbildung.

Bemerkung: In X muß der Grenzwert nicht eindeutig sein, wohl aber in $X \setminus N$.

Beweis 1:

(N1) $\|\hat{x}\|_Q = 0 \Longrightarrow \inf\limits_{y \in Y} p(x+y) = 0 \Longrightarrow \exists$ Folge $\{y_n\} \subset Y : -y_n \to +x$

$\Longrightarrow x$ ist HP von $Y \xRightarrow{Y \text{ abgeschlossen}} x \in Y \Longrightarrow \hat{x} = \hat{0}$ (Rest klar).

Beachte :Nur die Halbnormeigenschaft wurde benutzt.

(N2) Die Homogenität folgt aus (N2) für X weil $\alpha Y = Y$.

(N3)
$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1 + \hat{x}_2\|_Q &= \|\widehat{x_1 + x_2}\|_Q \quad \text{(laut Definition der Addition)} \\ &= \inf_{y_i \in Y} p(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\ &\le \inf_{y_i \in Y} \big(p(x_1 + y_1) + p(x_2 + y_2)\big) \\ &= \inf_{y_1 \in Y} p(x_1 + y_1) + \inf_{y_2 \in Y} p(x_2 + y_2) \\ &= \|\hat{x}_1\|_Q + \|\hat{x}_2\|_Q . \end{aligned}$$

■

Beweis 2:
Beweisidee:

1. Sei $\{\hat{x}_n\}$ CF in X/Y.

   Konstruiere CF $\{x_n\} \subset X,\ x_n \in \hat{x}_n$,

   X vollständig $\Longrightarrow x_n \to x_0$,

   zeige $\hat{x}_0 = \lim \hat{x}_n$.

2. **technische Schwierigkeit:** Die $\| \ \|_Q$-Definition impliziert nicht, daß $\|\hat{x}\|_Q$ für ein $x \in \hat{x}$ angenommen wird, daraus folgt die Schwierigkeit:

$$\|\hat{x}_{i+p} - \hat{x}_i\|_Q < \varepsilon \quad \overset{\text{i.allg.}}{\not\Longrightarrow} \quad \exists\, x_{i+p} \in \hat{x}_{i+p},\ x_i \in \hat{x}_i \text{ mit } p(x_{i+p} - x_i) < \varepsilon ,$$

   d.h. durch Auswahl von Vertretern können die Konvergenzeigenschaften der CF verloren gehen, da die Vertreter ja in einem Raum variieren können. Frage: Wie können bei gegebenem $\|\hat{x} - \hat{y}\|_Q$ Vertreter x, y so gewählt werden, daß $p(x-y)$ nicht zu groß wird?

Idee: Arbeite mit hinreichend stark "konvergenten" Teilfolgen
$$\{\hat{t}_k\} = \{\hat{x}_{n_k}\} \subset \{\hat{x}_n\} \text{ z.B. } \|\hat{t}_{k+1} - \hat{t}_k\|_Q < 2^{-k} .$$
Zu ihnen kann man Vertreterfolgen wählen, die immer noch Cauchy-Folgen sind.

Beweis: Konstruktion der Unterfolge $\{t_k\} \subset X$:

Sei $t_1 \in \hat{t}_1$ gegeben. Dann gilt für ein $\tilde{t}_2 \in \hat{t}_2$

$$\|\hat{t}_2 - \hat{t}_1\|_Q = \inf_{y \in Y} p(\tilde{t}_2 - t_1 + y),$$

und laut Definition des Infimums existiert ein $y \in Y$, sodaß mit $t_2 := \tilde{t}_2 + y$ gilt

$$\inf_{y \in Y} p(\tilde{t}_2 - t_1 + y) < p(t_2 - t_1) < 2\ \|\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1\|_Q.$$

Allgemein: Sei $t_k \in \hat{t}_k$ festgelegt. Dann existiert ein $y \in Y$, sodaß mit $t_{k+1} := \tilde{t}_{k+1}+y$ gilt

$$\|\hat{t}_{k+1}-\hat{t}_k\|_Q = \inf_{y\in Y} p(\tilde{t}_{k+1}-t_k+y) < p(\tilde{t}_{k+1}-t_k+y) = p(t_{k+1}-t_k) < 2\,\|\hat{t}_{k+1}-\hat{t}_k\|_Q < 2\cdot 2^{-k}.$$

Mit der so bestimmten Folge $\{t_k\}$ gilt

$$\begin{aligned} p(t_{k+p}-t_k) &= p\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(t_{k+p-i}-t_{k+p-1-i})\Big) \le \sum_{i=0}^{p-1} p(t_{k+p-i}-t_{k+p-i-1}) \\ &\le \sum_{i=0}^{p-1} 2\cdot 2^{-(k+p-i-1)} = 2\cdot 2^{-k}\underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} 2^{1-p+i}}_{\le 2} \le 4\cdot 2^{-k}, \text{ also CF}. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$ da X vollständig, und wegen

$$\|\hat{t}_k-\hat{t}_0\|_Q = \inf_{y\in Y} p(t_k-t_0+y) \le p(t_k-t_0) \text{ ist } \underline{\hat{t}_0 = \lim_{k\to\infty}\hat{t}_k}\,.$$

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_n = \hat{t}_0$, denn mit $\hat{t}_k = \hat{x}_{n_k}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\|\hat{x}_n-\hat{t}_0\|_Q \le \lim_{n\to\infty}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 0\\ \text{da CF}}}{\|\hat{x}_n-\hat{x}_{n_k}\|_Q} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0\\ \text{da } \hat{t}_k\to\hat{t}_0}}{\|\hat{x}_{n_k}-\hat{t}_0\|_Q}\Big) = 0,$$

also konvergiert auch die Gesamtfolge gegen $\hat{t}_0$. ■

Anwendung:
Ist (X,p) halbnormiert, so gilt:

$$N = p^{-1}(0) := \{y\in X;\ p(y)=0\}$$

ist ein abgeschlossener, linearer Teilraum (Beweis als leichte Übung).

$$X/N := \Big\{\hat{x}\subset X;\ \hat{x} = \big\{y\in X;\ y = x+z,\ p(z)=0\big\}\Big\}$$

ist ein normierter Raum mit $\|\hat{x}\|_Q := p(x)$,
denn

1. $x_1, x_2 \in \hat{x} \Longrightarrow$ $x_1 = x_2 + y \Longrightarrow p(x_1) = p(x_2+y) \le p(x_2)+p(y) \overset{p(y)=0}{=} p(x_2)$,
   $x_2 = x_1 + (-y) \longrightarrow p(x_2) = p(x_1+(-y)) \le p(x_1)+p(y) = p(x_1)$,
   also $p(x_1) = p(x_2)$.

2. mit 1. gilt:

$$\|\hat{x}\|_Q = 0 \;\Rightarrow\; p(x) = 0\ \forall\, x\in\hat{x} \;\Longrightarrow\; \hat{x} = N \;\Longrightarrow\; \hat{x} = \Theta\,,$$

also gilt (N1) und (N2), (N3) sowieso.

Aus 1. folgt auch, daß diese Norm mit der in Satz 4.17 definierten übereinstimmt, denn die Halbnorm hat für alle Vertreter den gleichen Wert.

Idee: Bei der Quotientenbildung „verschwindet“ ein „unbequemer“ Teilraum.

Ist nun (X, p) vollständig $\xRightarrow{\text{Satz 4.17}}$ $(X/p^{-1}(0),)\,)_Q)$ ist BR. Dies findet Anwendung bei der Definition der L^p-Räume.

Die L^p-Räume $1 \le p < \infty$

Satz 4.18
Für eine Lebesgue-meßbare Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ und für $1 \le p < \infty$ ist $(L^p(B), \| \, \|_{L^p})$ ein normierter Raum.

$$\begin{aligned} L^p(B) &:= \Big\{ f : B \to \mathbb{R}; \int\limits_B |f(t)|^p \, dt < \infty \Big\} \\ \|x\|_{L^p} &:= \left(\int\limits_B |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Bemerkung zur Schreibweise: Schlamperei in der Literatur:

In der Schreibweise werden in der Literatur die Räume

$$L^p(B) \qquad \text{und} \qquad L^p(B)/N, \quad N = \|0\|_{L^p}^{-1}$$

nicht unterschieden, ebensowenig wie die

$$\text{Halbnorm } \| \, \|_{L^p} \text{ und die zugehörige Norm } \| \, \|_Q \, .$$

Wird von L^p-Räumen und den „Normen“ $\| \, \|_{L^p}$ gesprochen, so meint man (eigentlich) immer den Quotientenraum und die zugehörige Norm.
Zudem wird, aus Bequemlichkeitsgründen, auch oft $\| \, \|_p$ statt $\| \, \|_{L^p}$ geschrieben.
Darüberhinaus unterdrückt man in der Literatur oft die Indizes an Normen und unterscheidet damit in der Schreibweise z.B. auch nicht zwischen der Norm mit Urbildraum und im Bildraum einer Abbildung.

Argument: Die Bedeutung ist aus dem Zusammenhang ersichtlich!

Beweis: $L^p(B)$ ist ein linearer Raum, denn

$$f \in L^p(B) \implies \int\limits_B |\alpha f|^p \, dx = |\alpha|^p \int\limits_B |f(x)|^p \, dx < \infty \quad \text{also} \quad \alpha f \in L^p(B) \, .$$

$f, g \in L^p(B)$: dann gilt für alle endlichen Funktionswerte (das sind „fast alle“)

$$\begin{aligned} |f(t)+g(t)|^p \le \big(|f(t)| + |g(t)| \big)^p \le \Big(2 \sup \big(|f(t)|, |g(t)| \big) \Big)^p &\le 2^p \sup \big(|f(t)|^p, |g(t)|^p \big) \\ &\le 2^p \big(|f(t)|^p + |g(t)|^p \big) \end{aligned}$$

$\implies$ (durch Integration) $f + g \in L^p$.

Durch

$$\|x\|_p \;:=\; \left(\int\limits_B |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

wird auf $L^p(B)$ eine **Halbnorm** erklärt.

(N1') $\|x\|_p \;\geq\; 0$ ist klar, $\|\Theta\|_p \;=\; 0$ ebenfalls , $\Theta =$ Nullfunktion

(N2) Homogenität trivial

(N3) $$\left(\int\limits_B |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \;\leq\; \left(\int\limits_B |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_B |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

ist die **Minkowski'sche Ungleichung** (Beweis folgt) .

$N = \|\Theta\|_p^{-1} = \{y \in L^p(B); y(t) = 0$ f.ü. in $B\,\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

$\Longrightarrow$ $L^p(B)/N$ ist ein normierter Raum. ■

Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski

Lemma:
Ist $0 < \lambda < 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, so gilt

(4.2) $$a^\lambda\, b^{1-\lambda} \;\leq\; \lambda\, a + (1-\lambda)\, b\,,$$

dabei steht „ = “ genau dann, wenn $a = b$.

Beweis:
Œ sei $0 < a < b$. Nach dem Mittelwertsatz der Differential-Rechnung

$$\begin{aligned} \exists\,\xi:\; a < \xi < b \;\text{ und }\; b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} \;&=\; (1-\lambda)\,\xi^{-\lambda}(b-a) \\ \Longrightarrow\; b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} \;&<\; (1-\lambda)\,a^{-\lambda}(b-a)\,. \end{aligned}$$

Multiplikation mit a^λ liefert (4.2). ■

Folgerung:
Sei $p > 0$, $q > 0$ und $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \;\Longrightarrow$

(4.3) $$\forall\, u, v \in \mathbb{C} \;\text{ gilt }\; |uv| \;\leq\; \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}\,.$$

Beweis:

Benutze (4.2) mit $\lambda = \frac{1}{p},\ 1 - \lambda = \frac{1}{q},\ a = |u|^p,\ b = |v|^q\,.$ ■

Satz 4.19 Die Hölder'sche Ungleichung für Reihen

Seien $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ Zahlenfolgen mit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < \infty,\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q > 0$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu\, \eta_\nu| \ \leq\ \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.4}$$

(Für $p = q = 2$ heißt dies *Schwarz'sche* oder *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* (CSU) oder *Cauchy-Bunjakowski'sche Ungleichung*.

Beweis:

Setze $A_p := \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p\right)^{1/p},\ A_q := \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^q\right)^{1/q}$ wobei Œ $A_p > 0,\ A_q > 0\,.$

Setze $\tilde{\xi}_\nu := \frac{\xi_\nu}{A_p},\ \tilde{\eta}_\nu := \frac{\eta_\nu}{A_q} \xRightarrow{(4.3)} |\tilde{\xi}_\nu\, \tilde{\eta}_\nu| \ \leq\ \frac{|\tilde{\xi}_\nu|^p}{p} + \frac{|\tilde{\eta}_\nu|^q}{q}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{\nu=1}^{n} |\tilde{\xi}_\nu\, \tilde{\eta}_\nu| \ \leq\ \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{n} |\tilde{\xi}_\nu|^p + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{n} |\tilde{\eta}_\nu|^q \ =\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ =\ 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu\, \eta_\nu| \ \leq\ A_p \cdot A_q \xRightarrow{n \to \infty} (4.4)\,.$$

■

Satz 4.20 Die Hölder'sche Ungleichung für Integrale
Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meßbar und
$x \in L^p(B),\ y \in L^q(B),\ p > 0,\ q > 0, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
$\Longrightarrow$

$$(4.5) \qquad \int\limits_B |x(t)y(t)|\,dt \;\le\; \left(\int\limits_B |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_B |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q} ,$$

für $p = q = 2$ heißt dies Schwarz'sche Ungleichung.

Beweis:

Analog zum Vorgehen bei Reihen setzen wir

$$A_p := \left(\int\limits_B |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} ,\ A_q := \left(\int\limits_B |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q} ,\ \tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{A_p} ,\ \tilde{y}(t) = \frac{y(t)}{A_q} ,$$

und erhalten aus (4.3)

$$|\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)| \;\le\; \frac{|\tilde{x}(t)|^p}{p} + \frac{|\tilde{y}(t)|^q}{q} .$$

Hieraus folgt die Integrierbarkeit der linken Seite und Integration liefert analog zu vorhin

$$\int\limits_B |x(t)y(t)|\,dt \;\le\; A_p \cdot A_q .$$

■

Satz 4.21 Die Minkowski'sche Ungleichung für Reihen
Seien $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ Zahlenfolgen mit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < \infty,\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^p < \infty$ für $p \ge 1$
$\Longrightarrow$

$$(4.6) \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p\right)^{1/p} \;\le\; \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^p\right)^{1/p} .$$

Beweis:

Trivial für $p = 1$, sei also $p > 1$. Dann gilt (zunächst für endliche Summen, da die Konvergenz noch nicht gesichert ist)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p \;\le\; \sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|\,|\xi_\nu + \eta_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|\,|\xi_\nu + \eta_\nu|^{p-1} .$$

Anwendung von (4.4) auf beide Summen der rechten Seite und $(p-1)\,q = p$ liefert

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p \;&\le\; \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p\right)^{1/q} \\ &=\; \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Dividiere durch den letzten Faktor der rechten Seite, dann folgt wegen $1-\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$ links $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu + \eta_\nu|^p\right)^{1/p}$ und damit (4.6) mit n statt ∞. Der Grenzübergang $n \to \infty$ sichert die Konvergenz und liefert (4.6). ■

Satz 4.22 Die Minkowski'sche Ungleichung für Integrale
Seien $B \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meßbar und $x, y \in L^p(B)$ mit $p \ge 1$

$\Longrightarrow$

$$\left(\int_B |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \;\le\; \left(\int_B |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_B |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \tag{4.7}$$

Beweis:
Das Integral auf der linken Seite existiert, denn für $t \in B$ gilt

$$|x(t)+y(t)|^p \;\le\; \Big[2\sup\Big(|x(t)|, |y(t)|\Big)\Big]^p \;\le\; 2^p\Big(|x(t)|^p + |y(t)|^p\Big).$$

Da $p = 1$ trivial ist, sei $p > 1$. Wir zerlegen wieder

$$|x+y|^p = |x+y|^{p-1}|x+y| \le |x+y|^{p-1}|x| + |x+y|^{p-1}|y|).$$

Mit $q = \dfrac{p}{p-1}$ liefert (4.5)

$$\begin{aligned}\int |x|\,|x+y|^{p-1}\,dt \;&\le\; \left(\int |x|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int |x+y|^p\,dt\right)^{1/q}, \\ \int |y|\,|x+y|^{p-1}\,dt \;&\le\; \left(\int |y|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int |x+y|^p\,dt\right)^{1/q},\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\int |x+y|^p\,dt \;\le\; \left[\left(\int |x|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int |y|^p\,dt\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int |x+y|^p\,dt\right)^{1/q},$$

woraus wegen $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$ die Behauptung (4.7) folgt. ■

Fortsetzung: L^p-Räume

Satz 4.23
Für $p = \infty$ ist

$$L^\infty(B) := \{f : B \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ B \text{ meßbar}, \exists\, M_f : |f(x)| < M_f \text{ f.ü. in } B\}$$

ein normierter Raum mit

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in B} \operatorname{ess}|x(t)| := \inf_{\substack{A \subset B \\ \mu(A)=0}} \sup_{t \in B \setminus A} |x(t)|\,, \qquad \mu = \text{Lebesgue-Maß}.$$

Beweis: Der Raum ist linear, denn

1.) Die Homogenität ist klar.

2.) Addition: $f, g \in L^\infty(B) \implies |f+g| \le |f| + |g| < M_f + M_g =: M_{f+g}$ f.ü. in B.

$\|x\|_\infty$ ist eine Halbnorm! (Übung, problemlos.)

$N = \|0\|_\infty^{-1} := \{x \in L^\infty(B);\ \exists\, A \subset B : \mu(A) = 0,\ \|x\|_\infty = 0 \text{ auf } B \setminus A\}$ ist ein linearer, abgeschlossener Teilraum.

$\implies$ **$(L^\infty(B)/N, \|\ \|_Q)$ ist ein normierter Raum.**

Übliche Schlamperei: $(L^\infty(B)/N, \|\ \|_Q) \overset{\text{Bezeichnung}}{=} (L^\infty(B), \|\ \|_\infty)$.

Wir erwähnen als leichte Übungsaufgabe:

$B \subset \mathbb{R}^d$ **beschränkt**, meßbar $\implies L^\infty(B) \subset L^p(B) \subset L^1(B),\ 1 < p < \infty$.

Satz 4.24
Die Räume $L^p(B)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar, $1 \le p \le \infty$, sind Banachräume.

Bemerkung: Für $1 \le p < \infty$ ist dies der **Satz von Fischer-Riesz**.

Beweis : $p = \infty$:

Sei $\{f_n\} \subset L^\infty(B)$ eine CF.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, A_n \subset B : \mu(A_n) = 0$ (Nullmenge) und $|f_n(t)| < \infty$ auf $B \setminus A_n$.
2. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen, also ist $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge.
   Auf $B \setminus S$ kann der Beweis von Satz 2.2, 1.) wiederholt werden.

$1 \le p < \infty$:; Satz von Fischer-Riesz.

Sei $\{f_k\} \subset L^p(B)$ eine CF. Da jede CF in einem normierten Raum höchstens einen

HP besitzt, brauchen wir nur zu zeigen, daß eine Teilfolge konvergiert. Wähle $\{f_{k_i}\}$ sodaß

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left\| f_{k_{i+1}} - f_{k_i} \right\|_p \ < \ \infty\,.$$

Wähle etwa $\tilde{k}_i \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\|f_k - f_\ell\|_p \ \leq \ 2^{-i} \text{ für } k,\ell \geq \tilde{k}_i,\ k_i = \max(i,\tilde{k}_i) \quad (\Longrightarrow\ k_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty).$$

Œ bezeichnen wir im folgenden die Teilfolge wieder mit $\{f_k\}$, denn wenn die Teilfolge gegen einen Grenzwert konvergiert, dann auch die Gesamtfolge.

Definiere

$$g_\ell(x) \ := \ \sum_{k=1}^{\ell} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \qquad (\Longrightarrow\ g_\ell \text{ monoton wachsend bzgl. } \ell),$$

und wende an das

Lemma 4.25 Lemma von Fatou
Ist $\{x_n\}$ eine Folge reellwertiger, auf B integrierbarer Funktionen und existiert eine reellwertige, integrierbare Funktion $x(t)$ mit $x(t) \ \leq \ x_n(t)$ f.ü. in B, $\forall\, n$
$\Longrightarrow$

$$\int_B \varliminf_{n\to\infty} x_n(t)\,dt \ \leq \ \varliminf_{n\to\infty} \int_B x_n(t)\,dt\,.$$

Bemerkung: Für eine Folge reeller Zahlen, $\{a_n\}$ wird mit $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{\ell\to\infty} \inf\limits_{n\geq\ell} a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge bezeichnet.

(zum Beweis vgl. Wloka)

Es ist $g_\ell \in L^p(B)$ (linearer Raum). Da $g_\ell \geq 0$ monoton wachsend bzgl. ℓ, folgt $\varliminf\limits_{\ell\to\infty} g_\ell := \lim\limits_{\ell\to\infty} \inf\limits_{n\geq\ell} g_n = \lim\limits_{\ell\to\infty} g_\ell$, also kann man Fatou auf g_ℓ^p anwenden und erhält mit der Dreiecksungleichung

$$\int_B \left(\lim_{\ell\to\infty} g_\ell(t)^p\right) dt \leq \varliminf_{\ell\to\infty} \int_B g_\ell(t)^p\,dt = \varliminf_{\ell\to\infty} \Big(\|g_\ell\|_p\Big)^p \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_{k+1} - f_k\|_p\right)^p < \infty$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\ell\to\infty} g_\ell(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \text{ f.ü. auf } B.$$

Wegen

$$|f_{l+1}(x)| = |f_1(x) + \sum_{k=1}^{\ell} (f_{k+1}(x) - f_k(x))| \leq |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{\ell} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

folgt

$$\exists\, f(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ f.ü. auf } B \quad \text{(d.h. punktweise)}.$$

Bei Konvergenz gilt $\underline{\lim}_{\ell\to\infty} |f_\ell(x) - f_k(x)| = \lim_{\ell\to\infty} |f_\ell(x) - f_k(x)| = |f(x) - f_k(x)|$, also

$$\begin{aligned}
\int\limits_B |f(x) - f_k(x)|^p\,dx = \int\limits_B \underline{\lim}_{\ell\to\infty} |f_\ell(x) - f_k(x)|^p\,dx &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \underline{\lim}_{\ell\to\infty} \int\limits_B |f_\ell(x) - f_k(x)|^p\,dx \\
&= \underline{\lim}_{\ell\to\infty} \|f_\ell - f_k\|_p^p \\
&\leq \left(\sum_{i\geq k} \|f_{i+1} - f_i\|_p\right)^p \xrightarrow{k\to\infty} 0\,,
\end{aligned}$$

also $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$. ■

Als nächstes wollen wir Dichtheits- und damit Separabilitätsaussagen beweisen.

Hinweis:

1. Dichtheitsaussagen betreffen immer die Norm des Raumes, in dem die Menge als dicht nachgewiesen wird.
2. Dichtheitsaussagen sind transitiv, wenn sie bzgl. derselben Norm gezeigt werden. Bsp.: Ist $\bar{A} = B$ bzgl. der Norm in B und $\bar{B} = C$ bzgl. der Norm in C , so muß nicht $\bar{A} = C$ gelten, wenn die Normen in B und C verschieden sind.

Satz 4.26
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, d.h.

$$\forall u \in L^p(\Omega)\ \exists\ \{u_k\} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \|u_k - u\|_{L^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Diese Aussage ist falsch für $p = \infty$.

Beweis:
Wir führen zunächst einige Hilfsmittel auf. Aus den Übungen ist bekannt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| = |(x_1,\dots,x_n)^T| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2} < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

bekannt ist

$$\rho(x) = k\,\varphi(x),\ k > 0 \text{ so, daß} \int \rho(x)\,dx = 1,\ \ \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon}),$$

$$\int \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1, \quad \text{mit Tr und } \rho_\varepsilon = \{|x| \leq \rho_\varepsilon\}.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existiert nach der Hölderschen Ungleichung die Faltung

$$T_\varepsilon f(x) := (\rho_\varepsilon * f)(x)) = \int_\varepsilon (x-y) f(y)\,dx,\ \ T_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

In den Übungen zeigen wir

$$(*) \quad \|T_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p \text{ und } \int |T_\varepsilon f(x) - f(x)|^p \, dx \leq \sup_{s \in \operatorname{Tr} \rho_\varepsilon} \int |f(y) - f(s+y)|^p \, dx$$

also $\|T_\varepsilon f \in f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Aus der Theorie des L-Integrals zitieren wir (zum Beweis vgl. Alt, Lemma 1.16)

Lemma
Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), \;\; 1 \leq p < \infty$ gilt

$$\|f(.+h) - f\|_{f \in L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{|h| \to 0} 0,$$

dabei bezeichnet $f(.+h)$ die Funktion $x \to f(x+h)$.

Aus $(*)$ folgt mit dem Lemmma

$$\|T_\varepsilon f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

d.h. wegen $T_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^n):$ $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ bzgl. $\| \, \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Aufgabe (Übung): Man zeige: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ bzgl. $\| \, \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
Damit ist der Satz für $\Omega = \mathbb{R}^n$ bewiesen.

Sei nun $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.
Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n$ fort durch $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ und definieren

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}, \quad D_\delta = \Omega_\delta \cap K_{\frac{1}{\delta}}(0)$$

$$\text{mit } K_{\frac{1}{\delta}}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq \frac{1}{\delta}\} \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \partial\Omega} \|x - y\|.$$

Für $\varepsilon \leq \delta$ setzen wir

$$T_{\varepsilon\delta} f(x) = \int_{;D_\delta} \rho_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy = (\rho_\varepsilon * (\chi_{D_\delta} f))(x)$$

mit der charakteristischen Funktion $\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Offensichtlich ist $\operatorname{Tr} T_{\varepsilon\delta} f \subset \Omega$, und $T_{\varepsilon\delta} f \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt aus der Definition von $T_{\varepsilon\delta} f$.
Nun ist

$$(T_{\varepsilon\delta} f - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x) \, dy) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) \chi_{\Omega \setminus \delta}(y) f(y) \, dy.$$

Anwendung von $(*)$ auf das 1. Integral und der Hölderschen Ungleichung auf das 2. Integral (beachte $\int \rho_\varepsilon(x) \, dx = 1$) liefert

$$\|T_{\varepsilon\delta} f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \sup_{|h| \leq \varepsilon} \|f(\,.+h) - f\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega) \setminus D_\delta)}.$$

Der 1. Ausdruck auf der rechten Seite strebt $\forall\,\delta$ gegen Null für $\varepsilon \to 0$ nach obigem Lemma, der 2. Ausdruck strebt gegen Null für $\delta \to 0$ (Übung).

Sei $p = \infty$.
Dann ist $(C(\Omega), \|\;\|_\infty)$ ein vollständiger, also abgeschlossener Raum.
Beachte: $(C(\Omega), \|\;\|_\infty)$ enthält nur Funktionen, die bzgl. der Norm beschränkt sind. Die Norm liefert gleichmäßige Konvergenz, eine CF bzgl. dieser Norm hat einen Grenzwert in $B(\Omega)$ (vgl. Satz 2.2), eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen hat einen stetigen Grenzwert.
Deshalb kann kein $f \in L^\infty(\Omega) \setminus C(\Omega)$ durch eine Folge $\{f_k\} \subset C(\Omega)$ bzgl. $\|\;\|_\infty$ approximiert werden. ■

Bemerkung: Für $1 \le p < \infty$ kann man $(C(\Omega), \|\;\|_{L^p})$ als Teilraum von $(L^p(\Omega), \|\;\|_{L^p})$ auffassen (Schlamperei). Nach dem obigen Satz ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, weiter ist $C_0^\infty(\Omega) \subset C(\Omega)$, also $(C(\Omega), \|\;\|_{L^p})$ dicht in $L^p(\Omega)$. $L^p(\Omega)$ ist vollständig. Daraus folgt

$$(\mathbf{L^p(\Omega)}, \|\;\|_{\mathbf{L^p}}) \textbf{ ist bis auf Normisomorphie die vollständige Hülle von } (\mathbf{C(\Omega)}, \|\;\|_{\mathbf{L^p}}). \tag{4.8}$$

Aus dem vorigen Satz erhält man den wichtigen

Satz 4.27
Die Räume $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sind separabel für $1 \le p < \infty$.
Die Aussage ist falsch für $p = \infty$.

Beweis Idee:

1. Die Menge $P_{\mathbb{Q}}$ der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar.
2. Abgeschlossene Kugeln $K_r \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{Q}$ sind abzählbar.
3. Die Menge der Funktionen $\{f;\ f \in P_{\mathbb{Q}}$ für $x \in K_r,\ f \equiv 0$ sonst$\}$ ist abzählbar.

Beweis: $\mathbf{1 \le p < \infty}$. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben .

1. Der vorige Satz liefert:
$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, g_1 \in C_0^\infty(\Omega) :\ \|f - g_1\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$
2. $\exists\, K_r \subset \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}$ mit $\operatorname{Tr} g_1 \subset K_r$. Sei $m := (\int\limits_{K_r} 1\,dx)^{1/p}$.
   Der Satz von Weierstraß gilt auch für Kugeln im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Alt 7.17, sehr hübscher Beweis), d.h.
$$\text{zu } g_1 \ \wedge\ \frac{\varepsilon}{3}\ \exists\ \text{Polynom } g_2 :\ m\|g_1 - g_2\|_{\infty,K_r} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3. zu g_2 $\exists$ Polynom g_3 mit rationalen Koeffizienten: $m\|g_2 - g_3\|_{\infty,K_r} < \frac{\varepsilon}{3}$.

   Seien für $i = 2, 3:$ $\tilde{g}_i := \begin{cases} g_i, & \text{in } K_r, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ dann folgt

$$\Big(\int\limits_{K_r} |g_1 - g_3|^p \, dx\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_1 - \tilde{g}_3|^p \, dx\Big)^{1/p} = \|g_1 - \tilde{g}_3\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq \|g_1 - \tilde{g}_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{g}_2 - \tilde{g}_3\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq m\|g_1 - \tilde{g}_2\|_{\infty,K_r} + \|g_2 - g_3\|_{\infty,K_r} \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Den Rest liefert die Dreiecksungleichung.

Beachte: Im Beweis wurde benutzt, daß $\| \;\|_{\infty,K_r}$ stärker ist als $\| \;\|_{L^p(K_r)}$.

$\mathbf{p = \infty}$. Gegenbeispiel:

Für $B = (0, 1)$ betrachte $\left\{ x_s; x_s(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq s \\ 0, & s < t < 1 \end{cases} \text{ wo } s \in (0, 1) \right\} \subset L^\infty$.

(0,1) ist überabzählbar und $\|x_s - x_{s'}\|_\infty = 1$ für $s \neq s'$!
Eine überabzählbare Teilmenge von Elementen mit endlichem Abstand kann nicht durch eine abzählbare Menge beliebig genau approximiert werden. Ein Raum kann nicht separabel sein, wenn eine Teilmenge des Raumes nicht separabel ist, d.h.

(4.9) **$\mathbf{L^\infty}$ ist nicht separabel!**

Beachte: Dies liegt an der Norm $\| \;\|_\infty$, die keine Integralnorm mehr ist. ■

Die Räume ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$

1. $1 \leq p < \infty$, dann ist

$$\ell^p = \left\{ \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \right\}$$

   ein linearer Raum gemäß

$$\begin{aligned} \{\xi_n\} + \{\eta_n\} &= \{\xi_n + \eta_n\} \in \ell^p, \text{ (Minkowski)} \\ |\alpha| \{\xi_n\} &= \{\alpha \, \xi_n\} . \end{aligned}$$

   Durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right)^{1/p} , \qquad \text{wo } x = \{\xi_\nu\} ,$$

   wird eine Norm definiert. (N3) ist die Minkowski'sche Ungleichung.

2. $p = \infty: \quad \ell^\infty = \left\{ \{\xi_n\};\ \sup\limits_\nu |\xi_\nu| < \infty \right\}$

   ist ein linearer Raum (wie bei 1.) und wird normiert durch

$$\|x\|_\infty \;:=\; \sup_\nu |\xi_\nu|, \quad \text{wo } x = \{\xi_\nu\}\,.$$

   Nachprüfung von (N1)–(N3) über Dreiecksungleichung für Beträge.

Satz 4.28

a) $(\ell^p, \|\ \|_p)$ sind BRe für $1 \le p \le \infty$.

b) Der Raum aller konvergenten Zahlenfolgen $(c, \|\ \|_\infty)$ ist ein BR.

Beweis: Übungsaufgabe.

Idee für a), $1 \le p < \infty$:

Sei $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $x^m = (\xi_\nu^m)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ eine CF.

Zeige: $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \xi_\nu^m = \xi_\nu^0$ und $x^0 = \{\xi_\nu^0\} \in \ell^p$ ist der gesuchte Grenzwert.

Sätzchen 4.29

1. Der Raum $(\ell^p, \|\ \|_p)$ ist separabel für $1 \le p < \infty$.
2. Er ist nicht separabel für $p = \infty$.

Beweis:

1. Benutze rationale Linearkombinationen der „Einheitsvektoren“ $\ell_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ k}}, 0, \ldots)$.

2. Gegenbeispiel: Annahme $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{\xi_\nu^n\}_{\nu\in\mathbb{N}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei dicht in ℓ^∞.

   Konstruiere $x = \{\xi_j\}$ mit $\xi_j = \begin{cases} \xi_j^j + 1, & \text{falls } |\xi_j^j| \le 1 \\ 0, & \text{falls } |\xi_j^j| > 1\,. \end{cases}$

   $\Longrightarrow \quad 1 \le |\xi_j - \xi_j^j| \le \|x - x^n\|_\infty \,\forall\, n \quad \Longrightarrow \quad \nexists$ Folge, die gegen x konvergiert. ■

Anders als bei den L^p-Räumen gilt

Sätzchen 4.30

Für $1 \le p < q < \infty$ gilt $\ell^1 \subseteq \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$.

Beweis:
Für $1 \leq p < q,\ x \in L^p$ schätzen wir ab:

$$1 = \|\frac{x}{\|x\|_p}\|_p^p = \sum_i \Big(\underbrace{\frac{|\xi_i|}{\|x\|_p}}_{\leq 1}\Big)^p \overset{p<q}{\geq} \sum_i \Big(\frac{|\xi_i|^q}{\|x\|_p}\Big)^q = \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_q^p},$$

also $\|x\|_p \geq \|x\|_q$.

Offensichtlich ist

$$\|x\|_q^q = \sum_i |\xi_i|^q \geq (\sup_j |\xi_j|)^q = \|x\|_\infty^q.$$

■

Sobolev-Räume und schwache Ableitungen

Als Hilfsmittel benötigen wir

Lemma 4.31
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^m(\Omega)$, so gilt $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f\, \partial^s \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int_\Omega \varphi\, \partial^s f\, dx \quad \text{für } |s| \leq m$$

Beweis:
Beachte $\mathrm{Tr}(f \cdot \varphi) \subset \mathrm{Tr}\, \varphi$, deshalb kann man, statt über Ω, auch über einen Quader Q mit $\mathrm{Tr}\, \varphi \subset Q$ integrieren. Dann folgt der Beweis aus der wiederholten Anwendung der partiellen Integration. Wem dies zu elementar ist, kann den Integralsatz von Gauß anwenden ■

Wir betrachten nun für

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad m \geq 0, \quad 1 \leq p \leq: \infty$$

$$X = \Big\{ f \in C^m(\Omega);\ \|f\|_X < \infty \Big\} \quad \text{mit} \quad \|f\|_X := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{L^p(\Omega)}$$

Bemerkungen:

1. Man könnte auch die äquivalente Norm $\|f\| = \max\limits_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{L^p(\Omega)}$ nehmen. (vgl. Beispiel 2 nach Definition 4.7)

2. Grundsätzlich versteht man unter $C^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen mit den entsprechenden Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften. Wird die Menge aber in Zusammenhang mit einer Struktur (z. B. Metrik oder Norm) als Raum betrachtet, so versteht man darunter nur die Funktionen, für die die Struktur erklärt ist. So sind etwa im metrischen Raum $(C(\Omega), \|\ \|_\infty)$ nur die beschränkten, stetigen Funktionen gemeint, wogegen in $(C(\Omega), \|\ \|_{L^p})$ auch unbeschränkte stetige Funktionen mit endlicher L^p-Norm zugelassen sind.

Wir wollen die Sobolev-Räume einführen als Vervollständigung der Räume stetig differenzierbarer Funktionen unter L^p- Normen und untersuchen nun $\widetilde{X}$, die Vervollständigung von X (bzgl. $\|\ \|_X$), (vgl. Satz 2.3). Dies macht nur Sinn für $p < \infty$, denn für $p = \infty$ ist $X = (C^m(\Omega), \|\ \|_{L^\infty})$ mit $\|f\|_{L^\infty} = \sum\limits_{|s| \leq m} \sup\limits_{t \in \Omega} |\partial^s f(|t)$ ja bereits vollständig.

Sei also $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ eine CF $\Longrightarrow$ $\{\partial^s f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist CF in $L^p(\Omega)$ $\forall\, s : |s| \leq m$,

$$\xRightarrow{L^p(\Omega) \text{ vollständig}} \quad \forall\, s, |s| \leq m \ \exists!\ f^{(s)} \in L^p(\Omega) : \partial^s f_j \to f^{(s)} \text{ in } L^p(\Omega)\,.$$

Nun gilt $\forall\, f_j$ (vgl. Lemma 4.31)

$$\int\limits_\Omega f_j\, \partial^s \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \varphi\, \partial^s f_j\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |s| \leq m\,,$$

Grenzübergang $\qquad \downarrow {\scriptstyle j \to \infty} \qquad\qquad \downarrow {\scriptstyle j \to \infty}$

$$\int\limits_\Omega f^{(0)}\, \partial^s \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \varphi\, f^{(s)}\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |s| \leq m\,. \tag{4.10}$$

Dieser Grenzübergang darf ausgeführt werden, denn die Hölder'sche Ungleichung (vgl. (4.5)) besagt, daß das Integral eine stetige Abbildung von $L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist:

$$\left| \int\limits_\Omega (f_j - f^{(0)})\, \partial^s \varphi\, dx \right| \;\leq\; \int\limits_\Omega |f_j - f^{(0)}|\, |\partial^s \varphi|\, dx \;\leq\; \|f_j - f^{(0)}\|_{L^p(\Omega)}\ \underbrace{\|\partial^s \varphi\|_{L^q(\Omega)}}_{<\ \infty}\,,$$

entsprechend für das 2. Integral.

Die Gleichung (4.10) gibt Anlaß zu folgender

Definition 4.32 Sobolev Räume
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den *Sobolev-Raum*

$$H^{m,p}(\Omega) \;:=\; \Big\{ f \in L^p(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega);\ \text{für } |s| \leq m \text{ gibt es } f^{(s)} \in L^p(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega) \\ \text{mit } \int\limits_\Omega f\, \partial^s \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \varphi\, f^{(s)}\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}\,.$$

In $H^{m,p}(\Omega)$ erklären wird die Sobolev-Norm

$$\|f\|_{H^{m,p}(\Omega)} \;=\; \begin{cases} \left(\sum_{|s|\leq m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|s|\leq m} \operatorname{ess\,sup} \|D^m(\Omega), & p = \infty \end{cases}$$

Andere Bezeichnungen: $H^{m,p}(\Omega) \;=\; W^m_p(\Omega)$, $\qquad H^m(\Omega) \;:=\; H^{m,2}(\Omega) \;=\; W^m(\Omega)\,.$

Beachte:

1. Die Integrale in obiger Definition existieren auf Grund der Hölderschen Ungleichung für jede Funktion $\in L^p(\Omega)$, aber auch für jede Funktion $\in L^1_{loc}(\Omega)$, (d.h. lokal integrierbar in Ω = integrierbar über jedes Kompaktum in Ω), denn es wird ja nur über Tr φ integriert.
2. Die obige Herleitung gilt nur für $p < \infty$, die Definition erstreckt sich auch auf $p = \infty$.
3. Zu gegebenem f ist $f^{(s)}$ durch die Definition eindeutig bestimmt, denn angenommen $\exists\, f^{(s)}$ und $\tilde{f}^{(s)}$ mit

$$\int\limits_\Omega f\, \partial^s \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega f^{(s)}\, \varphi\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \tilde{f}^{(s)}\, \varphi\, dx,$$

   so liefert die Theorie des Lebesgue-Integrals, daß

$$\int\limits_\Omega \left(\tilde{f}^{(s)} - f^{(s)}\right) \zeta\, dx \;=\; 0 \quad \forall\, \zeta \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}^{(s)} \;=\; f^{(s)} \text{ f.ü. in } \Omega\,.$$

Übungsaufgabe: Man beweise diese Implikationen für $\tilde{f}^{(s)}, f^{(s)} \in C(\Omega)$.

Wir erklären deshalb (vgl. (4.10))

Definition 4.33 schwache Ableitung
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f, f^{(s)} \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Dann heißt $f^{(s)}$ *schwache Ableitung von* f, falls

$$\int\limits_\Omega f\, \partial^s \varphi\, dx = (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \varphi\, f^{(s)}\, dx \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Im Unterschied dazu bezeichnet man die „altgewohnten“ Ableitungen auch als starke Ableitungen. Daß jede starke Ableitung auch schwach ist, besagt Lemma 4.31

Satz 4.34
Die Räume $H^{m,p}(\Omega)$ sind Banachräume $(1 \le p \le \infty)$.

Beweis:
Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^{m,p}(\Omega)$ eine CF $\Longrightarrow$ $\{f_k^{(s)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist CF in $L^p(\Omega)$.

$\xRightarrow{L^p(\Omega)\text{ vollständig}}$ $\exists\, f^{(s)} \in L^p(\Omega)$ mit $\partial^s f_k \to f^{(s)}$ in $L^p(\Omega)$,

und die Regel der partiellen Integration überträgt sich (vgl. (4.10)) von $\partial^s f_k$ auf $f^{(s)}$

$\Longrightarrow$ $f := f^{(0)} \in H^{m,p}(\Omega)$ mit $\partial^s f := f^{(s)}$. ■

Die Überlegungen vor Definition 4.32, die zu (4.10) führen, zeigen, daß für $p < \infty$ gilt: $\overline{(C^m(\Omega), \|\ \|_X)}^{\|\ \|_X} \subset H^{m,p}(\Omega)$. Für $p = \infty$ ist dies offensichtlich, da $(C^m(\Omega), \|\ \|_X)$ vollständig ist. Wir wollen zeigen:

Für $1 \le p < \infty$ sind $\widetilde{X} = \overline{(C^m(\Omega), \|\ \|_X)}^{\|\ \|_X}$ und $H^{m,p}(\Omega)$ bis auf Normisomorphie identisch.

Für die Cauchyfolgen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$ (vgl. Satz 2.3) definieren wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} J \ :\ \widetilde{X} &\longrightarrow H^{m,p}(\Omega) \\ \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} &\longrightarrow J\left(\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{k\in\mathbb{N}} f_k \quad (\lim \text{ in } H^{m,p}(\Omega)) . \end{aligned}$$

Die Abbildung ist injektiv auf Grund der Äquivalenzrelation in $\widetilde{X}$:

$$\{f_k\} \sim \{g_k\} \iff \lim_{k\to\infty} \|f_k - g_k\|_X = 0 .$$

Die Abbildung ist normerhaltend laut Definition der $H^{m,p}$-Norm, denn

$$\|\{f_k\}_k\|_{\widetilde{X}} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_X = \lim_{k\to\infty} \sum_{|s|\le m} \|\partial^s f_k\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{H^{m,p}(\Omega)}$$

(vgl. Satz 2.3 b) und $\|x\| = d(x,0)$ gemäß (4.1)).

Wenn nun noch gezeigt werden kann, daß J surjektiv ist, dann sind $\widetilde{X}$ und $H^{m,p}(\Omega)$ normisomorph. Dies liefert (zum Beweis siehe Alt 1.16, Satz S. 33 (neue Ausgabe)).

Satz 4.35
Ist $f \in H^{m,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, so gibt es $\{f_j\} \subset H^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit

$$\|f - f_j\|_{H^{m,p}(\Omega)} \xrightarrow{j\to\infty} 0\,,$$

d.h.

$$C^\infty(\Omega), \quad \text{und damit auch } C^m(\Omega) \text{ sind dicht in } H^{m,p}(\Omega),$$

$$H^{m,p}(\Omega) \text{ ist die Vervollständigung von } C^m(\Omega) \text{ bzgl. } \sum_{|s|\le m} \|\partial^s f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Bemerkung: Für $p = \infty$ ist Satz 4.35 falsch. In der Übung zeigen wir:
Ist $\Omega := (-1,1)$, so gehört $x(t) = |t|$ zu $H^{1,\infty}(\Omega)$ aber $x \notin \widetilde{X}$. Dabei ist $X = \{f \in C^1(\Omega);\ \|f\|_{C^1} < \infty\}$. Dann ist J nicht surjektiv, d.h. dann ist $J(\widetilde{X})$ ein Teilraum von $H^{1,\infty}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

Allgemein gilt, daß $J(\widetilde{X}) = H^{m,\infty}(\Omega) \cap C^m(\Omega)$ ist. Dies ist nicht verwunderlich, da ja $(C^m(\Omega), \|\ \|_X)$ abgeschlossen ist.

Zur späteren Verwendung definieren wir noch Teilräume von $H^{m,p}(\Omega)$ deren Elemente „in einem schwachen Sinn“ auf dem Rand von Ω verschwinden.

Definition 4.36
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \ge 0$, $1 \le p < \infty$. Dann ist

$$\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega) \ := \ \left\{ f \in H^{m,p}(\Omega);\ \text{es gibt } \{f_k\} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \|f - f_k\|_{H^{m,p}(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \right\}.$$

Andere Bezeichnungen: $\overset{\circ}{H}{}^{m,p} \ = \ H_0^{m,p} \ = \ H_{p,0}^m \ = \ \overset{\circ}{W}{}^{m,p}$

Man kann zeigen, daß $\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{m,p}(\Omega)$ ist (Übung).

§ 5 Unitäre Räume, Hilberträume

Definition 5.1
X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$(\cdot,\cdot):\ X\times X\to\mathbb{K}\quad \text{heißt } \textit{Skalarprodukt} \text{ (positiv definite Linearform), falls}$$

(S1) $(x,x)\geq 0$ und $=0 \iff x=\Theta$ (positiv definit)

(S2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (Symmetrie, konjugiert symmetrisch)

(S3) $(\alpha\, x,y) = \alpha(x,y)$ (Homogenität)

(S4) $(x+z,y) = (x,y)+(z,y)$ (Additivität)

Sind nur (S2)-(S4) erfüllt, heißt $(\cdot,\cdot)$ *Sesquilinearform.*

Eine Sesquilinearform heißt *positiv semidefinit*, falls $(S1')$ $(x,x)\geq 0$ gilt $\forall\, x$,

Eine Sesquilinearform heißt *positiv definit*, falls $(x,x)>0\ \forall\, x\neq 0$, ist also ein Skalarprodukt.

Ist $(\cdot,\cdot)$ Skalarprodukt, so heißt $(X,(\cdot,\cdot))$ *unitärer Raum* (*Prä-Hilbertraum*).

Satz 5.2
Ist $(\cdot,\cdot)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform, so gilt mit $\|x\|:=\sqrt{(x,x)}$:

1. $|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$, *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* (CSU).
   Ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit (Skalarprodukt), so gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn x,y voneinander linear abhängig sind oder $x=\Theta$ oder $y=\Theta$.
2. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, *Dreiecksungleichung*
   d.h. $\|\cdot\|$ ist eine Halbnorm, und eine Norm genau dann, wenn $(\cdot,\cdot)$ positiv definit (also Skalarprodukt) ist.

   Ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit (Skalarprodukt), so gilt

   $$\|x+y\| = \|x\|+\|y\| \iff x=py \text{ mit } p>0 \text{ oder } x=\Theta \text{ oder } y=\Theta\,.$$
3. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ *Parallelogrammgleichung.*

Definition 5.3
Das Paar $(X,(\cdot,\cdot))$ heißt *Hilbertraum* (HR), falls $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist und X bzgl. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ ein Banachraum ist.

D.h. alle Eigenschaften metrischer und normierter Räume gelten auch für unitäre- bzw. Hilberträume.

Beweis von Satz 5.2:

Beweis 1) x oder $y = 0$ sind trivial. Setze also in

$$\begin{aligned} 0 &\le (x+\alpha\, y, x+\alpha\, y) = (x,x) + \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{(x,y)} + |\alpha|^2(y,y) \\ \alpha &= \frac{-1}{\|y\|^2+\varepsilon}\,(x,y),\ \ \varepsilon > 0, \quad \text{so folgt} \\ 0 &\le \|x\|^2 - \frac{2|(x,y)|^2}{\|y\|^2+\varepsilon} + \frac{|(x,y)|^2\,\|y\|^2}{(\|y\|^2+\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

Falls $\|y\| \neq 0$, setze $\varepsilon = 0$, und nach Multiplikation mit $\|y\|^2$ folgt

$$|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|\,. \tag{5.1}$$

Falls $\|y\| = 0$, ist $2|(x,y)|^2 \le \|x\|^2\varepsilon$ und für $\varepsilon \to 0$ erhält man

$$|(x,y)| = 0 = \|x\|\,\|y\|\,.$$

Ist $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt, so gilt die erste Ungleichung genau dann mit "=", wenn $x + \alpha y = 0$, d.h. wenn x, y linear abhängig sind. Dann werden auch die anderen Ungleichungen zu Gleichungen.

Beweis 2) Für $x + y = \Theta$ ist der Beweis trivial. Für $x + y \neq= \Theta$ gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y,x+y) &= (x+y,x) + (x+y,y) \\ &\overset{(5.1)}{\le} \|x+y\|\,\|x\| + \|x+y\|\,\|y\|, \end{aligned} \tag{5.2}$$

woraus die Dreiecksungleichung folgt.
Wann kann in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen stehen? Die Fälle $x = \Theta$ oder $y = \Theta$ sind trivial. Im Falle $x + y = \Theta$ kann in der Dreiecksungleichung das Gleich nur für $x = y = \Theta$ gelten. Seien also $x, y, x + y \neq \Theta$. Dann kann obige Ungleichung nur dann mit „=“ gelten (nach 1.), wenn $x + y = \alpha x = \beta y$ gilt. $\alpha = 1$ scheidet aus, weil dann $y = \Theta$ wäre. Also ist $x = py$. Einsetzen in die Dreiecksungleichung ergibt: $|1+p| \le 1+|p|$. Hier steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn p reell und positiv ist.

Beweis 3) Gemäß (5.2) gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x,y), \quad \text{und mit „}-y\text{“ statt „}y\text{“} \tag{5.3}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\Re(x,y)\,. \tag{5.4}$$

Addition von (5.3) und (5.4) liefert die Parallelogrammgleichung. ■

Satz 5.2, 3) hat folgende Umkehrung:

Satz 5.4
Ist $(X, \| \, \|)$ ein normierter Raum und erfüllt $\| \, \|$ die Parallelogrammgleichung, so wird durch

$$\begin{aligned}(x,y) &:= \tfrac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) && \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}\,,\\ (x,y) &:= \tfrac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big)\,, && \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}\,,\end{aligned}$$

ein Skalarprodukt erklärt und damit $(X, \| \, \|)$ zu einem unitären Raum.

Beachte: 1) Mit diesem Skalarprodukt gilt $(x,x) = \|x\|^2$.
2) Satz 5.4 zeigt, daß das Skalarprodukt stetig ist. (Normen sind stetig.)

Beweis: Hinweis für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Die Definition des Skalarproduktes folgt aus der Subtraktion von (5.3) und (5.4), im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ muß man etwas mehr denken. Daß in beiden Fällen Skalarprodukte erklärt werden, muß natürlich nachgerechnet werden. (vgl. Wloka). ■

Beispiele und Gegenbeispiele:

$$\left.\begin{aligned}&\ell^2 \text{ mit } (x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \overline{\eta_\nu} \text{ wo } x = \{\xi_\nu\},\ y = \{\eta_\nu\}\\ &L^2(\Omega) \text{ mit } (x,y) = \int_\Omega x(t)\overline{y(t)}\,dt\,,\end{aligned}\right\}$$

sind HRe (vgl. die Sätze 4.24 und 4.28).

Finde ein Beispiel dafür, daß für $(C(B), \| \, \|_\infty)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, die Parallelogrammgleichung verletzt ist. Dies bedeutet nach Definition 5.3 und den Sätzen 5.4 und 5.4, daß kein Skalarprodukt existiert, das die $\| \, \|_\infty$ induziert.

Bemerkungen:

Ist X ein reeller Prä-Hilbertraum, so gilt nach der CSU für $x, y \neq 0$:

$$\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \in [-1,1] \quad \Longrightarrow \quad \exists\,!\alpha \in [0,\pi]: \quad \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = \cos\alpha\,.$$

Nach Satz 5.2, 1) gilt:

$$x, y \text{ linear abhängig} \iff \left|\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1 = |\cos\alpha|$$

$$\iff \alpha = 0 \ \vee \ \alpha = \pi$$

Man kennt dies natürlich aus dem Paradebeispiel eines **Hilbertraumes, dem $\mathbb{R}^n$**:

$$\mathbb{R}^n, \qquad (x,y) = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i\,.$$

Dort gilt auch: $\left|\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| = |\cos\alpha| = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} \iff x \perp y\,,\ \ \alpha \in [0,\pi]\,.$

Analog dazu definieren wir:

Definition 5.5 Orthogonalität
Sei X ein Prä-Hilbertraum (unitärer Raum).

$$x, y \in X \text{ heißen } \textit{orthogonal } (x \perp y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x, y) \;=\; 0\,.$$

Zwei Unterräume $Y, Z \subset X$ heißen *orthogonal* $(Z \perp Y)$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (y, z) = 0 \;\forall\, y \in Y,\; z \in Z\,.$$

Offensichtlich gilt für orthogonale Unterräume $Y, Z \subset X$: $Y \cap Z = \{0\}$, $((z, z) = 0)$.
Ist $M \subset X$, so ist $M^{\perp} = \{x \in X;\; x \perp M\}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X (*Orthogonalraum von* M). Das folgt aus der Stetigkeit von $(\cdot, \cdot)$:
$x_i \xrightarrow{i \to \infty} x,\; (x_i, m) = 0 \xRightarrow{(\cdot,\cdot) \text{ stetig}} \lim\limits_{i \to \infty} (x_i, m) = 0.$

Ist $x \perp y$, so gilt: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *Pythagoras* (vgl. (5.3)).

Für unitäre Räume kann man nun eine Verschärfung von Satz 4.15 beweisen.

Satz 5.6 Projektionssatz
Sei X ein unitärer Raum und $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, eine vollständige und konvexe Teilmenge. Dann folgt

1. $\forall\, x \in X\; \exists !\, y^* \in A : \; \|x - y^*\| = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\| \;=:\; \operatorname{dist}(x, A)\,.$

   y^* heißt (*orthogonale) Projektion von* x *auf* A.
2. $\|x - y^*\| = \operatorname{dist}(x, A) \iff \Re(x - y^*, y - y^*) \leq 0 \;\forall\, y \in A\,.$
3. Ist A ein vollständiger Teilraum von X, so gilt:

   $\|x - y^*\| \;=\; \operatorname{dist}(x, A) \iff (x - y^*, y) \;=\; 0 \quad \forall\, y \in A$ (d.h. $x - y^* \perp A$).

Bedeutung: Es gibt genau eine Abbildung $P : X \to A$ mit $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, A)$.
P heißt *orthogonale Projektion* von X auf A.

Bemerkungen:

1) Ist X ein Hilbertraum, so ist jede abgeschlossene Teilmenge auch vollständig. Im Hilbertraum existiert eine **eindeutige**, beste Approximation also in jeder abgeschlossenen und konvexen Teilmenge.
2) Satz ist eine Approximationsaussage. Insbesondere Teil c) ermöglicht eine bequeme Behandlung von Approximationsaufgaben.
(vgl. Bestimmung der Fourier-Koeffizienten, Numerik I oder allgemeiner 1. Verallgemeinerung auf S 86).

Beweis 1):
Für $x \in X\ \exists \{y_k\} \subset A : \|x-y_k\| \searrow \operatorname{dist}(x,A) =: d$ (*Minimalfolge*).
Zeige: $\{x_k\}$ ist CF.

Die Parallelogrammgleichung liefert:

$$\|(x-y_k)-(x-y_\ell)\|^2+\|(x-y_k)+(x-y_\ell)\|^2 \;=\; 2(\|x-y_k\|^2+\|x-y_\ell\|^2)$$

Mit $$\|(x-y_k)+(x-y_\ell)\|^2=\|2x-(y_k+y_l)\|^2=4\Bigg\|x-\underbrace{\frac{y_k+y_\ell}{2}}_{\frac{y_k+y_\ell}{2}\in A,\ (A\ \text{konvex})}\Bigg\|^2\ge 4d^2,$$

folgt

$$\|y_\ell-y_k\|^2\le 2\Big(\|x-y_k\|^2+\|x-y_\ell\|^2\Big)-4d^2\xrightarrow{k,\ell\to\infty}0\quad\text{also CF}\,.$$

A vollständig $\Longrightarrow$ $\exists\, y^* = \lim\limits_{n\to\infty} y_k \in A$, und wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\| = d$ und der Stetigkeit der Norm folgt $\|x-y^*\| = d\,$.

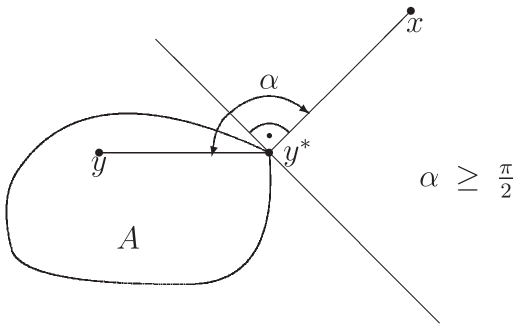
Eindeutigkeit: Sei $\|x-x_1\| = \|x-x_2\| = d \quad \xRightarrow{\text{Parallelogrammgl.}}$

$$\underbrace{\|(x-x_1)-(x-x_2)\|^2}_{\|x_1-x_2\|^2} = -\underbrace{\|(x-x_1)+(x-x_2)\|^2}_{\underbrace{2^2\left\|x-\frac{x_1+x_2}{2}\right\|^2}_{\ge\,4d^2}}+\underbrace{2\Big(\|(x-x_1)\|^2\;+\;\|x-x_2\|^2\Big)}_{4d^2}\le\;0$$

$$\Longrightarrow\quad 0\le\|x_1-x_2\|^2\le 0$$

(Wegen Satz 5.2, 2) kann man die Eindeutigkeit auch wie in Aufgabe 1. S. 58 zeigen.

Beweis 2): Charakterisierung



Im reellen Fall ist das anschaulich nichts anderes als der cos-Satz:

$$\|x-y\|^2=\|x-y^*\|^2+\|y-y^*\|^2-2\|x-y^*\|\;\|y-y^*\|\cos(x-y^*,y-y^*).$$

„$\Longrightarrow$“ Für $y \in A$ und $0 \leq \varepsilon \leq 1$ gilt wegen $(1-\varepsilon)y^* + \varepsilon\, y \in A$ (A konvex)

$$\begin{aligned}
\|x-y^*\|^2 = d^2 &\leq \|x-((1-\varepsilon)y^*+\varepsilon\, y)\|^2 = \|x-y^*+\varepsilon(y^*-y)\|^2\\
&= (x-y^*+\varepsilon(y^*-y), x-y^*+\varepsilon(y^*-y))\\
&= \|x-y^*\|^2+\varepsilon^2\|y^*-y\|^2+2\varepsilon\,\Re(x-y^*,y^*-y)
\end{aligned}$$

bzw. $\quad 0 \leq \varepsilon\|y^*-y\|^2 + 2\,\Re(x-y^*,y^*-y).$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\Re(x-y^*,y-y^*) &\leq \frac{1}{2}\,\varepsilon\|y^*-y\|^2, \quad \text{also für } \varepsilon \to 0\\
\Re(x-y^*,y-y^*) &\leq 0 \qquad \forall\, y \in A\,.
\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“ Für alle $y \in A$ gilt

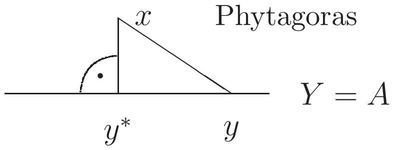
$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|x-y^*+y^*-y\|^2 = (x-y^*+y^*-y, x-y^*+y^*-y)\\
&= \|x-y^*\|^2 + \underbrace{\|y^*-y\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\Re(x-y^*,y^*-y)}_{\geq 0}\\
&\geq \|x-y^*\|^2 = \text{dist } A\,.
\end{aligned}$$

Beweis 3):

Aufgabe: Ausgehend von den Beweisideen für $X = \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R}$ formuliere man den Beweis im allgemeinen Hilbertraum.

„$\Longleftarrow$“ Ist $x - y^* \perp Y$ so muß gelten

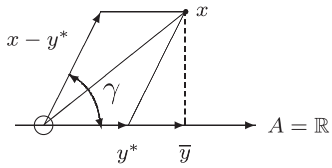
$\|x-y\| > \|x-y^*\| \;\forall\, y \neq y^*$



„$\Longrightarrow$“ indirekt.

Sei $\|x-y^*\| = \text{dist}(x,A)$.

Wenn es ein $y \in A$ gibt mit $(x-y^*,y) \neq 0$ (d.h. $\gamma \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$), dann gibt es eine bessere Approximation für x als y^*, nämlich $\overline{y}$, die senkrechte Projektion von x auf $\text{span}\{y^*\} \subset A = Y$. Zeige mit Pythagoras: $\|x-\overline{y}\| < \|x-y^*\| \;\to\; \mathbf{W}$. ■



Satz 5.7
Ist Y ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes X, so wird durch die

$$\textit{orthogonale Projektion} \quad P: \begin{cases} X \;\to\; Y \\ x \;\to\; y^* \quad (x, y^* \text{ gemäß Satz 5.6}) \end{cases}$$

eine surjektive Abbildung erklärt, welche linear ist und $P^2 = P$ erfüllt, und es gilt

$$X = Y \oplus Y^{\perp}\,, \text{ d.h. } \forall\, x \in X \;\exists!\, y_1 \in Y \wedge \exists!\, y_2 \in Y^{\perp} :\; x = y_1 + y_2\,.$$

Beweis: Übung.

Orthonormalsysteme in Prä-Hilberträumen

Ziel: Verallgemeinerung des Begriffs „orthogonale Basis von Vektorräumen“.

Definition 5.8

Sei $(X,(\cdot,\cdot))$ unitär.

$S \subset X$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (s,s') &= 0\ \forall s,s' \in S,\ s \neq s', \\ \|s\| &= 1\ \forall s \in S. \end{cases}$

$S \subset X$ heißt *vollständiges ONS* (VONS)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall x \in X \ \text{ gilt: } (x,s) = 0 \ \ \forall s \in S \implies x = \Theta.$$

Offensichtlich gilt:

S ist ein VONS $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ ONS, in welchem S echt enthalten ist.

Darstellungsproblem (Approximationsproblem) von Elementen aus X durch S.

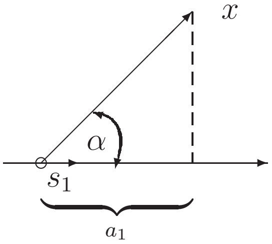
Motivation im $\mathbb{R}^n$:

Sei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ eine Orthonormalbasis $\implies$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \exists!$ Darstellung: $x = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu\, s_\nu$

Anschaulich:

$$\frac{(x,s_1)}{\|x\|_2\,\|s_1\|_2} = \cos\alpha = \frac{a_1}{\|x\|_2} \implies a_1 = (x,s_1).$$



$$\text{Allgemein: } x = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, s_\nu \xrightarrow{\text{ONS: } (x,s_\nu) = a_\nu} x = \sum_{\nu=1}^{n} (x,s_\nu) s_\nu.$$

1. Verallgemeinerung:

Ist $(X,(\cdot,\cdot))$ unitär und $S = \{s_1,\dots,s_n\} \subset X$ ein ONS.
Dann ist $[S] = \operatorname{span}\{s_1,\dots,s_n\}$ ein endlich dimensionaler Unterraum und als solcher vollständig und Satz 5.6, 3. liefert wegen

$$y^* = \sum_i y_i^* s_i,\ \ (y^*,s_j) = y_j^*,\ \ (x - y^*, s_j) = 0\ \ j = 1,...,n$$

Zu gegebenen $x \in X$ ist $y^* = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (x,s_\nu)\cdot s_\nu$ die beste Approximation aus S an X.

Allgemeiner gilt (Fehlerabschätzung):

Satz 5.9 Bessel'sche Ungleichung

Ist $(X, (\cdot,\cdot))$ unitär, $S \subset X$, $S = \{e_k\}_{k\in I}$ ein ONS und I höchstens abzählbar unendlich, so gilt für jedes $x \in X$ und alle $\alpha_k \in \mathbb{K}$:

$$0 \;\le\; \|x\|^2 - \sum_{k\in I} |(x,e_k)|^2 \;=\; \Big\|x - \sum_{k\in I} (x,e_k)\, e_k\Big\|^2 \;=\; \Big(\operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_k\}_{k\in I})\Big)^2$$
$$\le\; \Big\|x - \sum_{k\in I} \alpha_k\, e_k\Big\|^2 .$$

Die Koeffizienten (x, e_k) heißen *verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten.*

Beweis:

Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ist (als Skalarprodukt schreiben und ausmultiplizieren)

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x,e_k)\,\overline{\alpha}_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{(x,e_k)} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x,e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x,e_k) - \alpha_k|^2 ,$$
$$(\text{beachte } z\cdot\overline{z} = |z|^2 \text{ für } z \in \mathbb{C})$$

d.h. der Ausdruck wird minimal für $\alpha_k = (x, e_k)$, $k = 1, \dots, n$.
(Eindeutigkeit der α_k!).
Damit ist für endliche Indexmengen der Beweis geführt. Beachte insbesondere, daß die erste Ungleichung auch besagt, daß $\sum\limits_{k\in I} |(x,e_k)|^2$ durch $\|x\|$ beschränkt ist.
Durch Grenzübergang $n \to \infty$ gilt die Besselungleichung auch für ein abzählbar unendliches I, da Skalarprodukt und Norm stetig sind. ■

Bemerkung 1: Für $X = \mathbb{R}^n$ wird die Bessel'sche Ungleichung zur Gleichung und ist der verallgemeinerte Pythagoras. Im $\mathbb{R}^n$ ist das ONS vollständig.

Vermutung: Die Bessel'sche Ungleichung wird zur Gleichung für VONSe.

Probleme: Wieviele Elemente hat ein VONS höchstens bzw. wieviele Elemente sind an einer Darstellung $x = \sum\limits_{s_\nu\in S} (x, s_\nu) s_\nu$ beteiligt? Ist das überhaupt eine abzählbare Summe?

Bemerkung 2: Ist S überabzählbar, so ist die Besselungleichung richtig, falls gilt:
$\forall\, x \in X \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{N}$ existieren in jedem ONS maximal n Elemente $s_\nu \in S$ mit $|(x, s_\nu)| \ge \frac{\|x\|}{\sqrt{n}}$, $\nu = 1, \dots, n$ (sonst ist die Besselungleichung verletzt).

In Werner wird für den Fall überabzählbarer ONSe der Begriff *bedingt konvergent* eingeführt.

Definition:
Sei $(X, \| \ \|)$ normiert, I eine überabzählbare Indexmenge, $x_i \in X \; \forall \, i \in I$, so heißt die Summe $\sum\limits_{i \in I} x_i$ *bedingt konvergent* gegen $x \in X$, falls

a) $I_0 := \{ i \in I ; \, x_i \neq 0 \}$ höchstens abzählbar ist und

b) $\sum\limits_{i \in I_0} x_i = x$ unabhängig von der Summationsreihenfolge.

Wir werden also im Folgenden voraussetzen: (bzw. nur solche ONSe betrachten)

$\forall \, x \in X$ sind die $s \in S$ mit $(x, s) \neq 0$ abzählbar. $\Longrightarrow$

$\forall \, x \in X$ ist $\sum (x, s_\nu) s_\nu$ eine ∞ Reihe

und $\sum |(x, s_\nu)|^2$ konvergiert in jeder Anordnung.

Den Zusammenhang und die Antwort auf obige Vermutung und Probleme liefert der nächste Satz.

Satz 5.10
Sei S ein ONS in einem unitären Raum X.
Dann sind die folgenden Aussagen 1) - 4) äquivalent:

1. Die Menge $[S]$ der endlichen Linearkombinationen von Elementen aus S ist dicht in X.
2. Jedes $x \in X$ besitzt die (in jeder Anordnung) konvergente Entwicklung
$$x = \sum_{s \in S} (x, s) s \, .$$
3. Es gilt die *Parseval'sche Identität*
$$(x, y) = \sum_{s \in S} (x, s) \, \overline{(y, s)} \qquad \forall \, x, y \in X \, .$$
4. Es gilt die *Parseval'sche Gleichung*
$$\|x\|^2 = \sum_{s \in S} |(x, s)|^2 \, .$$
5. Aus jeder der Aussagen 1) - 4) folgt: S ist ein VONS.
6. Ist S ein VONS und X ein Hilbertraum, so gelten 1) - 4).

Beachte:
1. Wegen Bemerkung 1 zu 5.9 wird in jeder Summe nur über die s mit $(x, s) \neq 0$ summiert, d.h. alle Summen sind unendliche Reihen.
2. Ein Existenzbeweis für ein VONS steht noch aus.

Beweis:

1) $\Longrightarrow$ 2) Sei $x \in X$ und $x_n := \sum\limits_{k=1}^{m_n} \alpha_k\, s_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (laut Voraussetzung) $\xRightarrow{\text{Satz 5.9}}$

$\|x - x_n\| \;\geq\; \left\| x - \sum_{k=1}^{m_n} (x_n, s_k)s_k \right\|$, für $n \to \infty$ folgt 2), da $[S]$ dicht in X .

2) $\Longrightarrow$ 3) Im Folgenden wird nur über die abzählbar vielen Elemente $s \in S$ summiert, für die $(x, s) \neq 0$ oder $(y, s) \neq 0$, die wir durchnummerieren können.

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (x, s_k)s_k, \sum_{\ell=1}^{n} (y, s_\ell)s_\ell \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k,\ell=1}^{n} (x, s_k) \cdot \overline{(y, s_\ell)} \cdot (s_k, s_\ell) \quad \text{(und da } S\text{=ONS)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, s_k)\, \overline{(y, s_k)} = \sum_{s\in S} (x, s)\, \overline{(y, s)}
\end{aligned}$$

3) $\Longrightarrow$ 4) Setze in 3) $y = x$.

4) $\Longrightarrow$ 1) Nach der Bessel'schen Ungleichung ist

$$0 \;\leq\; \left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} (x, s_\nu)s_\nu \right\|^2 \;=\; \|x\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |(x, s_\nu)|^2 \overset{4)}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

für die abzählbar vielen $s_\nu \in S$ mit $(x, s_\nu) \neq 0$.

4) $\Longrightarrow$ 5) Ist $(x, s) = 0 \;\forall\, s \in S \overset{4)}{\Longrightarrow} x = 0$ also S ein VONS (Definition 5.8).

6) $\Longrightarrow$ 1) (Indirekt) Annahme: $Y := \overline{[S]} \neq X$. Y ist abgeschlossen, also vollständig, da X vollständig. Nach Satz 5.7 folgt, wegen $X = Y \oplus Y^\perp$, daß $Y^\perp \neq \{0\}$. Für $x \in Y^\perp,\; x \neq \Theta$, gilt jedoch insbesondere wegen $S \subset Y,\; Y \perp Y^\perp$: $(x, s) = 0 \;\forall\, s \in S$. Da $x \neq \Theta$, kann S kein VONS sein. ■

Der vorige Satz hängt noch in der Luft, da ein Existenzbeweis für VONSe noch aussteht.

Satz 5.11

In jedem unitären Raum gibt es mindestens ein VONS. Genauer zeigen wir:
Ist S_0 ein ONS, so gibt es ein VONS $\hat{S} : S_0 \subset \hat{S}$ (Beweis mit Lemma von Zorn).

Beweis:

Für ein beliebiges $x_0 \in X,\; x_0 \neq 0$ ist $\left\{ \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\} =: S_0$ ein ONS. Die Menge $\mathcal{S} = \{S; S = \text{ONS}, S_0 \subset S\}$ ist halbgeordnet bzgl. „ $\subseteq$ “. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ eine totalgeordnete

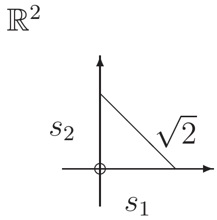
Teilmenge $\Longrightarrow \bigcup\limits_{S\in\mathcal{T}} S$ ist obere Schranke von $\mathcal{T}$.

$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ maximales Element $\hat{S} \in \mathcal{S}$.

$\hat{S}$ ist VONS, denn gäbe es $\hat{x} \in X$, $\hat{x} \neq 0$, $(\hat{x}, s) = 0 \ \forall s \in \hat{S}$, so wäre $\hat{S} \cup \left\{\frac{\hat{x}}{\|x\|}\right\}$ ein ONS. **W** zur Maximalität von $\hat{S}$. ■

Frage: Wieviele Elemente hat ein VONS?
Bisher wurde nur gezeigt, daß an jeder Darstellung $x = \sum\limits_{s\in S} (x, s)s$ nur abzählbar viele Elemente beteiligt sind.

Idee: Wie weit sind 2 Elemente eines ONS voneinander entfernt, und wieviele haben Platz in einem Raum?



$$s_1, s_2 \in S \Longrightarrow \|s_1 - s_2\| = \sqrt{(s_1 - s_2, s_1 - s_2)} = \sqrt{(s_1, s_1) + (s_2, s_2)} = \sqrt{2}.$$

Eindruck: Ganz hübsche Entfernung und

$$K\left(s_1, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cap K\left(s_2, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \emptyset$$

Wieviele solche Kugeln gehen in einen Raum X?

Wenn X separabel ist ($\exists$ eine abzählbar dichte Teilmenge $M \subset X$), dann existieren nur abzählbar viele solche Kugeln, denn in jeder Kugel liegt mindestens ein Element von M.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.12
$(X(\cdot,\cdot))$ unitär, separabel $\Longrightarrow$ jedes VONS ist abzählbar.

Dieser Satz drängt die Frage auf: Braucht man Zorn in einem separablen Raum? Antwort: Nein. Man kann aus einer abzählbar dichten Teilmenge von linear unabhängigen Funktionen ein VONS bauen.

Satz 5.13
$(X, (\cdot,\cdot))$ unitär, separabel $\Longrightarrow$ $\exists$ VONS (Beweis konstruktiv, ohne Zorn).

Beweis:
Orthogonalisierungsverfahren von Erhard-Schmidt auf die abzählbare, dichte Teilmenge anwenden. Vollständigkeitsbeweis mit Satz 5.10, 1). ■

Beispiele:

1. $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \nu\, t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu\, t;\ \nu \in \mathbb{N}\right\}$ ist ein ONS im $L^2[0,2\pi]$ (direkt nachrechnen). Entwicklungen nach diesem ONS sind die klassischen Fourierentwicklungen. S ist sogar ein VONS, denn $< S >$ ist dicht in der Menge $C_{2\pi}$ der 2π-periodischen, stetigen Funktionen bzgl. $\| \|_\infty$, und $C_{2\pi}$ ist dicht in $L^2[0,2\pi]$ bzgl. $\| \|_{L^2[0,2\pi]}$.

2. Die Legendre'schen Polynome sind definiert durch

$$p_n(t) \quad = \quad \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dt^n}\, (t^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

   Die Funktionen $\sqrt{n+\frac{1}{2}}\, p_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$ bilden ein VONS in $L_2[-1,1]$.

3. Weitere orthogonale Polynomsysteme erhält man durch Orthogonalisieren der Funktionen $1, t, t^2, \ldots$ bzgl. eines Skalarproduktes

$$(x,y) \quad = \quad \int\limits_a^b g(t)\, x(t)\, y(t)\, dt, \qquad \text{mit geeignetem } g(t) > 0 \text{ in } (a,b)$$

   (z.B. Jacobi-, Hermite-, Laguerre-Polynome).

Es bleiben noch 2 Fragen offen:

1. Wir wissen: Ist S ein VONS in $X \implies \forall\, x \in X\ \exists\,!$ Darstellung: $x = \sum (x, s_\nu) s_\nu$ mit $\|x\| = \sqrt{\sum |(x,s_\nu)|^2}$. Ist das umkehrbar? D.h. falls $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} |\alpha_\nu|^2 < \infty$, existiert dann auch ein x mit $x = \sum \alpha_\nu\, s_\nu$?

2. Wir kennen schon einen unendlich dimensionalen separablen Hilbertraum: ℓ^2 (vgl. Satz 4.27 und Beispiel nach Satz 5.4). Gibt es noch andere?

Die Antwort liefert

Satz 5.14 Riesz-Fischer
Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein nicht endlich-dimensionaler, separabler Hilbertraum und S ein VONS.

1. Sei $\{\alpha_\nu\}$ eine Zahlenfolge mit $\sum |\alpha_\nu|^2 < \infty$ (d.h. $\{\alpha_\nu\} \in \ell^2$).
   $\implies \quad \exists\,!\, x \in X :\ x = \sum\limits_\nu \alpha_\nu s_\nu,\ \alpha_\nu = (x, s_\nu),\ s_\nu \in S$.

2. X ist normisomorph zu ℓ^2.
   Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ normisomorph zu ℓ^2.

Beweis: Da X separabel, ist S abzählbar.

1. Es ist $\left\|\sum\limits_{\nu=n}^{n+p} \alpha_\nu\, s_\nu\right\|^2 = \sum\limits_{\nu=n}^{n+p} |\alpha_\nu|^2$, d.h. $S_p = \sum\limits_{\nu=1}^{p} \alpha_\nu\, s_\nu$ ist CF.

   $\xrightarrow{X \text{ Hilbertraum}} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\, s_\nu =: x$ konvergiert.

   Für jedes μ gilt

$$(x, s_\mu) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu (s_\nu, s_\mu) \;=\; \alpha_\mu \quad \Longrightarrow \quad \text{Existenz gesichert}\,.$$

   Eindeutigkeit: Sei $(y, s_\nu) = \alpha_\nu = (x, s_\nu)\ \forall \nu$

$$\Longrightarrow \quad (y - x, s_\nu) \;=\; 0 \quad \forall\, \nu \xRightarrow{S=\text{VONS}} y - x \;=\; 0\,.$$

2. Jedes $x \in X$ hat eine Darstellung $x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (x, s_\nu) s_\nu$ (Satz 5.10, 2) und Satz 5.12).

   Sie ist eindeutig, da aus $x = \sum (x, s_\nu) s_\nu = \sum \alpha_\nu\, s_\nu$ folgt $(x, s_\mu) = \alpha_\mu\ \forall\, \mu$.

   $\Longrightarrow$ Die Abbildung

$$\begin{aligned} A \,:\, X &\Longrightarrow \ell^2 \\ x &\Longrightarrow \{(x, s_\nu)\} \end{aligned}$$

   ist definiert (Satz 5.10, 4)), d.h. die Folge konvergiert,

   ist bijektiv (nach Satz 5.14, 1)),

   ist linear und wegen

$$\|x\|_X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Parseval} \\ \text{Satz 5.10, 4)}}}{=} \left(\sum_{s_\nu \in S} |(x, s_\nu)|^2\right)^{1/2} = \|Ax\|_{\ell^2}$$

   auch stetig und isometrisch. ■

Folgerung: Es gibt eigentlich nur einen separablen Hilbertraum!

Beachte: Nicht jedes ONS ist abzählbar:

Beispiel:

Grundraum:

$$M := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) \neq 0 \text{ nur in abzählbar vielen Punkten, } \sum_{x \in [0,1]} f(x)^2 < \infty \right\}$$

Inneres Produkt: $f, g \in M :\ (f, g) = \sum\limits_{\substack{x_i \in [0,1] \\ f(x_i) \neq 0 \,\wedge\, g(x_i) \neq 0}} f(x_i) g(x_i)\,.$

Angabe eines überabzählbaren ONS:

$$\Big\{ f_{\overline{x}} \in M;\ f(\overline{x}) = 1 \text{ für ein } \overline{x} \in [0,1],\ f(x) = 0\ \forall\, x \neq \overline{x} \Big\}.$$

Beachte: Die Voraussetzung der bedingten Konvergenz bei der Darstellung von Elementen ist für dieses ONS gemäß der Definition des Grundraums gesichert.

Die abzählbaren VONSe haben alle Eigenschaften, die einer Basis in einem Vektorraum zukommen. Deshalb nennt man ein abzählbares VONS auch *Orthonormalbasis.*

Allgemeiner erklärt man in einem ∞-dimensionalen normierten Raum (vgl. dazu Satz 5.10, 1)):

Definition 5.15
Sei $(X, \|\,\|)$ normiert. Dann heißt eine Folge $\{e_k\} \subset X$ *Schauder-Basis* von X, falls gilt:

$\forall\, x \in X$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_k \in \mathbb{K}$ sodaß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k \;=\; x\,.$$

Folgerung: (aus Satz 5.10)

Jedes abzählbare ONS, das eine der Eigenschaften 1) - 4) aus Satz 5.10 erfüllt, ist eine Schauderbasis.

Beweis:
Wir brauchen in Satz 5.10, 2) nur die Eindeutigkeit der Koeffizienten zu zeigen.

Sei $x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\, s_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (x, s_\nu) s_\nu$

$$\Longrightarrow \quad (x, s_\mu) \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu (s_\nu, s_\mu) \;=\; \alpha_\mu\,.$$

■

§ 6 Kompaktheit

Satz und Definition 6.1
Sei (X, d) ein **metrischer** Raum und $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

1) A ist *überdeckungskompakt*, d.h. jede Überdeckung von A durch offene Teilmengen enthält eine endliche Überdeckung von A.
2) A ist *folgenkompakt*, d.h. jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert **in** A.
3) (A, d) ist vollständig und A ist *präkompakt*, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0$ besitzt A eine endliche Überdeckung mit offenen ε-Kugeln.

Eine Menge A heißt *kompakt* $\overset{\text{def}}{\iff}$ Es gilt $1) \vee 2) \vee 3)$,
relativ kompakt $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{A}$ kompakt.

Bemerkung zu Bezeichnungen:

1. präkompakt = totalbeschränkt = ε-kompakt
2. Gelegentlich werden (z.B. Collatz) kompakte Mengen als „kompakt in sich“ (vgl. 6.1 2)) und relativ kompakte Mengen als kompakt bezeichnet.

Beweis:

1) $\Longrightarrow$ 2) indirekt: Annahme: $\{x_n\} \subset A$ hat keinen HP in A
(Œ $\{x_n\}$ hat ∞ viele Elemente).

$\Longrightarrow$ $\forall\, x \in A \;\exists\, r_x > 0 :$ $K_{n_\varepsilon} \cap A$ enthält nur endlich viele Elemente von $\{x_n\}$, denn x ist kein HP.

$A \subset \bigcup\limits_{x \in A} K_{r_x}(x)$ ist eine Überdeckung von A durch offene Kugeln um x mit Radius r_x.

$\overset{1)}{\Longrightarrow}$ $\exists\, y_1, \ldots, y_n \in A :$ $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{r_{y_i}}(y_i)$. (endliche Überdeckung)

$\Longrightarrow$ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{r_{y_i}}(y_i)$ enthält nur endlich viele Elemente von $\{x_n\}$, **W!**,
denn $\{x_n\}$ soll in A liegen und hat nach Voraussetzung ∞ viele Elemente.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sei $\{x_n\} \subset A$ eine CF $\overset{2)}{\Longrightarrow}$ $\{x_n\}$ hat einen HP **in** A, der eindeutig ist,
$\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ konvergiert in A $\Longrightarrow$ A vollständig.

Nachweis präkompakt indirekt:

Annahme: $\exists\, \varepsilon > 0 :\ \nexists$ endliche ε-Überdeckung von A, dann konstruieren wir eine Folge ohne HP.

Sei $x_1 \in K_\varepsilon(x_1)$, dann folgt mittels vollständiger Induktion
$\exists\, \{x_k\} \subset A:$ Zu $x_k\ \exists\, x_{k+1} \in A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} K_\varepsilon(x_i)$, $\quad k \in \mathbb{N}$ also $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon\ \forall\, i \neq j. \quad \Longrightarrow$
$\{x_k\}$ hat keinen HP, denn wäre x HP von $\{x_k\}$, so gäbe es eine konvergente Teilfolge $\{t_n\} \subset \{x_n\}$, sodaß zu $\varepsilon > 0\ \exists\, m_0 \in \mathbb{N}:\ \forall\, m \geq m_0,\ d(t_m, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $d(t_m, t_{m_0}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, also **W** zu $d(t_m, t_{m_0}) \geq \varepsilon\ \forall\, m \neq m_0$.

3) $\Longrightarrow$ **1)** Sei $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} U_i$, offene Überdeckung.

Wir zeigen indirekt: $A \notin \mathcal{B} := \left\{ B \subseteq A;\ B \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i \implies I \text{ unendlich} \right\}$.
$\mathcal{B}$ enthält die Teilmengen von A, die nur in einer unendlichen Überdeckung liegen.

Es gilt nach 3):

$\forall\, B \in \mathcal{B} \wedge \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_i = x_i(\varepsilon) : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} K_\varepsilon(x_i)$ und $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} K_\varepsilon(x_i) \bigcap B \in \mathcal{B}$
(x_i sind die Mittelpunkte der endlich vielen Kugeln).

$\Longrightarrow$ Zu $B \in \mathcal{B}\ \exists\, i = i(\varepsilon) \in \{1, ..., n_\varepsilon\} \wedge x_i :\ K_\varepsilon(x_i) \bigcap B \in \mathcal{B}$,
andernfalls ließe sich B mit endlich vielen U_i überdecken.

Diesen Schluß benutzen wir wiederholt um aus der Annahme: „ $A \in \mathcal{B}$ “ einen Widerspruch zu folgern.

$A \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad$ zu $\varepsilon = 1\ \exists\, i_1 = i(1) \wedge x_1 :\ K_1(x_1) \cap A \in \mathcal{B}$.
$K_1(x_1) \cap A \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad$ zu $\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists\, i_2 = i\left(\frac{1}{2}\right) \wedge x_2 :\ K_{\frac{1}{2}}(x_2) \cap K_1(x_1) \cap A \in \mathcal{B}$
usw.

Durch Induktion folgt: $\exists$ Folge von Mengen

$$K_m := \bigcap_{k=1}^{m} K_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap A \in \mathcal{B} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad K_m \supset K_l \text{ für } l \geq m.$$

Die Kugelmittelpunkte x_i müssen nicht in K_m liegen, aber $K_m \neq \emptyset\ \forall\, m$.

$\Longrightarrow\ \exists$ eine Folge $\{y_m\}$ mit $y_m \in K_m$ für die gilt:

$m \leq \ell \implies y_m, y_\ell \in K_{\frac{1}{m}}(x_m) \implies d(y_m, y_\ell) \leq \frac{2}{m} \implies \{y_m\}$ CF in A.

$$\xRightarrow{A \text{ vollständig}} \exists\,\text{Grenzwert } y \in A:\ \varepsilon_m := d(y_m, y) \xrightarrow{m \to \infty} 0 \ \wedge \exists\, i_0 \in J:\ y \in U_{i_0}.$$

$$\xRightarrow{\text{für große } m} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ U_{i_0} \text{ offen}}}{U_{i_0} \supset K_{\frac{2}{m}+\varepsilon_m}(y)} \supset \underset{\substack{\uparrow \\ d(y, y_m) = \varepsilon_m}}{K_{\frac{2}{m}}(y_m)} \supset \underset{\substack{\uparrow \\ d(x_m, y_m) < \frac{1}{m}}}{K_{\frac{1}{m}}(x_m)} \supset K_m. \quad \textbf{W!} \text{ zu } K_m \in \mathcal{B}.$$

■

Folgerung aus Satz 6.1, 2):

Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Die Umkehrung (jeder metrische, vollständige Raum ist kompakt) gilt nicht, denn zum Beispiel hat die Folge $x_n(t) = t^n$ in $(C[0,1], d_\infty)$ keine konvergente Teilfolge.

Folgerung aus Satz 6.1, 2-3):

Ist (X, d) vollständig, so gilt für $A \subset X$:

$$\overline{A} \text{ kompakt} \iff A \text{ präkompakt} \quad \Longrightarrow A \text{ beschränkt.}$$

Man beweist leicht (analog zur Analysis):

Satz 6.2
Ist (X, d_1) ein kompakter, metrischer Raum, (Y, d_2) ein metrischer Raum und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt:

1. f ist gleichmäßig stetig auf X .
2. $f(X)$ ist kompakt.
   Ist f injektiv, so ist f Homöomorphismus von X auf $f(X)$.
3. Ist $Y = \mathbb{R} \Longrightarrow$ a) $\exists\, K > 0 : \ |f(x)| \le K \ \forall x \in X$.
   b) f nimmt auf X Maximum und Minimum an.

Satz 6.3
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:

1. M relativ kompakt $\iff$ jede Folge aus M besitzt eine in X konvergente Teilfolge.
2. M relativ kompakt $\Longrightarrow$ M präkompakt $\Longrightarrow$ M beschränkt.
3. M kompakt $\Longrightarrow$ M abgeschlossen.

Beachte zu 2): M beschränkt $\not\Longrightarrow$ M präkompakt (total beschränkt, ε-kompakt)

Gegenbeispiel:

Betrachte die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{K_1(0)} \subset \ell^2$. Die Folge der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, \underset{\overset{\uparrow}{n}}{1}, 0, \dots)$ liegt in $\overline{K_1(0)}$. Wegen $\|\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_m\| = \sqrt{2}, \ n \ne m$, kann man keine endliche Überdeckung von $\overline{K_1(0)}$ mit z.B. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$-Kugeln finden, denn $\exists\ \infty$ viele disjunkte Kugeln $\{x \in \ell^2;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n\| < \frac{1}{4}\sqrt{2}\}$.

Beachte: Die klassischen Sätze von Heine-Borel und Weierstraß sagen aus, (im $\mathbb{R}^n$, und damit in jedem endlich dimensionalen normierter Raum, vgl. Satz 4.13) daß eine Menge genau dann relativkompakt ist, wenn sie beschränkt ist. Obiges Gegenbeispiel zeigt, daß das in ∞-dimensionalen Räumen nicht gilt.

Man kann sogar zeigen:

Satz 6.4
Ist $(X, \| \|)$ ein normierter Raum, so gilt

$$\overline{K_1(0)} \text{ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim X < \infty\,.$$

Beweis:
„$\Longleftarrow$“ bekannt aus Folgerung 1 b) γ aus Satz 4.13
„$\Longrightarrow$“
$\overline{K_1(0)}$ kompakt $\Longrightarrow$ präkompakt $\Longrightarrow$ $\exists\, a_1, \dots, a_n :\ \overline{K_1(0)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{\frac{1}{2}}(a_i)\,.$
Sei $V = \operatorname{span}[a_1, \dots, a_n] \Longrightarrow \dim V \le n < \infty \Longrightarrow V$ ist vollständig und abgeschlossen.
Annahme: $V \overset{\subset}{\neq} X$, dann ist $\complement V$ offen und $\exists\, x \in X \setminus V$:

$$\alpha := \inf_{y \in V} \|x - y\| > 0\,.$$

$\forall y \in V\ \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} :\ z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|} \in K_{\frac{1}{2}}(a_{i_0})$ (da $z \in \overline{K_1(0)}$ und Überdeckungseigenschaft), und es gilt

$$\begin{aligned} \alpha \le \Big\| x - \underbrace{(y + \|x-y\|\, a_{i_0})}_{\in V} \Big\| &= \big\| x - y - \|x-y\|\, a_{i_0} \big\| = \|x-y\| \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - a_{i_0} \right\| \\ &= \|x-y\|\, \|z - a_{i_0}\| < \frac{1}{2}\, \|x-y\|\,, \end{aligned}$$

also $2\alpha \le \|x-y\|$, **W** zur Definition von α, denn y war beliebig $\in V$. ■

Folgerung: Die Äquivalenz

„*kompakt* $\Longleftrightarrow$ *abgeschlossen und beschränkt*“

kann nur in endlich dimensionalen Räumen gelten.

In Funktionenräumen muß man also andere Charakterisierungen für „kompakt“ finden. Wir betrachten das für Funktionenmengen, die auf kompakten, metrischen Räumen definiert sind (also insbesondere $C^0(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt) und L^p-Räume.

Kompaktheitskriterien für die Räume $C(K)$ und $L^p(\mathbb{R}^d)$

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum,

$$\begin{aligned} C(K) &= \text{Menge der stetigen, reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf } K \text{ und} \\ \|x\|_\infty &= \max_{t\in K} |x(t)| \quad \text{für } x \in C(K) \quad \text{(beachte Satz 6.2, 3b))}\,. \end{aligned}$$

$(C(K), \|\ \|_\infty)$ ist ein BR (Beweis analog zu Satz 2.2).

Wir erklären die zusätzliche Eigenschaft, die über die Beschränktheit hinaus nötig ist, um in Funktionenräumen Kompaktheit zu garantieren.

Definition 6.5
Eine Funktionenmenge $M \subset C(K)$ (vgl. oben) heißt *gleichgradig stetig* (*gleichstetig*) *in* $t_0 \in K$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \ d(t,t_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x(t) - x(t_0)| \le \varepsilon\ \forall\, x \in M\,,$$

und gleichgradig stetig $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ gleichgradig stetig in allen $t \in K$.

Satz 6.6 Arzela und Ascoli:
Sei (K,d) ein kompakter, metrischer Raum und $(C(K), \|\ \|_\infty)$ ein Banachraum. Dann gilt

$$M \subset C(K) \text{ relativ kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1) & \text{M ist punktweise beschränkt} \\ & \text{(d.h. } \{x(t);\ x \in M\} \text{ ist beschränkt für} \\ & \text{jedes } t \in K), \\ 2) & M \text{ ist gleichgradig stetig.} \end{cases}$$

Bemerkung:

1) kann ersetzt werden durch

1') $\forall\, t \in K$ ist $\{x(t);\ x \in M\}$ relativ kompakt in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$,

Insbesondere ist 1) erfüllt, wenn M beschränkt ist in $C(K)$.

Beweis 6.6 „$\Longrightarrow$“

Zu 1): M relativ kompakt $\xrightarrow{\text{Satz 6.3}}$ M beschränkt $\Longrightarrow$ M punktweise beschränkt $\Longrightarrow$ 1).

Zu 2): Sei $t_0 \in K$ beliebig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

M relativ kompakt $\Longrightarrow$ M präkompakt $\Longrightarrow$ $\exists\, x_1, \dots, x_n \in M :\ M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_i)\,.$

x_i stetig in t_0, d.h.

Zu $\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0: \ d(t, t_0) < \delta \implies |x_i(t) - x_i(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(da nur endlich viele i existieren, gibt es ein gemeinsames $\delta \,\forall\, i = 1, \ldots, n$).

Laut Definition von M gilt

$$\forall\, x \in M \ \exists\, i \in \{1, \ldots, n\}, \ \|x - x_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit folgt aus $d(t, t_0) < \delta$:

$$|x(t) - x(t_0)| \ \leq \ \underbrace{|x(t) - x_i(t)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|x_i(t) - x_i(t_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|x_i(t_0) - x(t_0)|}_{< \varepsilon/3} \ < \ \varepsilon \quad \implies \quad 2).$$

Beweis „$\Longleftarrow$“ (hierin steckt die eigentliche Arbeit)
Sei $\{x_n\} \subset M$ gegeben,
gesucht: eine in $C(K)$ konvergente Teilfolge (vgl. Satz und Definition 6.1, 2)).

Nun gilt: K kompakt $\implies$ K präkompakt $\implies$ K separabel,

d.h. $\exists\, \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} =: D$ dicht in K.

(Überdeckung von K mit endlich vielen Kugeln, überdecke jede Kugel wieder mit endlich vielen Kugeln, usw. $\implies$ Die Kugelmittelpunkte ergeben die Menge $D = \{t_1, t_2, ...\}$.)

Beweisidee: Zeige a) $\exists$ Teilfolge $\{y_n\} \subset \{x_n\}$, die auf D konvergiert,
b) $\{y_n\}$ ist CF in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

zu a): Beachte: $t_i \in D$.

$M_{t_1} := \{x(t_1);\ x \in M\}$ beschränkt (nach 1)) $\implies \exists$ Teilfolge $\{x_n^{(1)}(t)\} \subset \{x_n(t)\}$, die in $t = t_1$ konvergiert ;

$\{x_n^{(1)}(t_2)\} \subset M_{t_2} = \{x(t_2);\ x \in M\}$ beschränkt $\implies$
$\exists$ eine Teilfolge $\{x_n^{(2)}(t)\} \subset \{x_n^{(1)}(t)\}$, die in $t = t_2$ konvergiert;

usw.

Setze $y_n := x_n^{(n)} \in M$, $\{y_n\}$ ist konvergent in D (**Diagonalfolge aller Teilfolgen**).

Bemerkung: Diese Überlegungen gelten in jedem Bildraum Y (statt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) in dem eine beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, z.B. in jedem endlich dimensionalen Raum stetiger Funktionen. Dies liefert Erweiterungsmöglichkeiten des Satzes von Arzela-Ascoli. (Beachte dazu die Anwendung nach Definition 7.3.).

zu b): Die gleichgradige Stetigkeit wird die gleichmäßige Konvergenz von $\{y_n\}$ sichern.
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

M gleichgradig stetig, d.h.

$\forall\, s \in K \quad \exists\, \delta(s) > 0: \ d(s, t) < \delta(s) \implies |x(t) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall\, x \in M$.

$\Longrightarrow\ K \subset \bigcup\limits_{s\in K} K_{\delta(s)}(s).$

K kompakt $\Longrightarrow\ \exists\, s_1,\dots,s_r \in K$ und $\delta_i = \delta(s_i):\ K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} K_{\delta_i}(s_i)\,.$

Also gilt: $\forall\, t\in K\ \exists\, s_i:\ d(t,s_i) < \delta_i \xRightarrow{\text{gl.gr.Stet. in } s_i} |x(t)-x(s_i)| < \dfrac{\varepsilon}{5}\ \forall\, x\in M\,.$

$\overline{D} = K$ liefert: $\forall\, i \in \{1,\dots,r\}\quad \exists\, t_i \in K_{\delta_i}(s_i)\cap D$ (geht, da D dicht in K). Dann folgt für hinreichend große $n,m\ \wedge\ \forall\, t\in K$

$$\begin{aligned} |y_n(t)-y_m(t)| \ \le\ & \underbrace{|y_n(t)-y_n(s_i)|}_{\substack{<\,\varepsilon/5\\ \text{gleichgradig}\\ \text{stetig}}} + \underbrace{|y_n(s_i)-y_n(t_i)|}_{\substack{<\,\varepsilon/5\\ \text{gleichgradig}\\ \text{stetig}}} + \underbrace{|y_n(t_i)-y_m(t_i)|}_{\substack{<\,\varepsilon/5\\ \{y_n\}\text{ konvergiert auf } D}} \\ & + \underbrace{|y_m(\bar{t}_i)-y_m(s_i)|}_{\substack{<\,\varepsilon/5\\ \text{gleichgradig}\\ \text{stetig}}} + \underbrace{|y_m(s_i)-y_m(t)|}_{\substack{<\,\varepsilon/5\\ \text{gleichgradig}\\ \text{stetig}}} \end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist gleichmäßig zunächst für alle $t \in K_{\delta_i}(s_i)$. Da nur endlich viele dieser Kugeln zur Überdeckung von K nötig sind, erhält man diese Abschätzung gleichmäßig $\forall\, t\in K$, also die Normkonvergenz. ■

Ohne Beweis zitieren wir (vgl. Wloka S. 201 ff., Kantorovich Akilov S. 236 ff., Alt S. 70 f)

Satz 6.7 (Kolmogorov)
Für $1 \le p < \infty$ ist $M \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ relativ kompakt genau dann wenn

1. M beschränkt in $L^p(\mathbb{R}^d)$,
2. es gilt $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |x(t+\tau)-x(\tau)|^p\, d\tau \ =\ 0$ gleichmäßig für $x\in M$,
3. es gilt $\lim\limits_{\alpha\nearrow\infty} \int\limits_{|\tau|>\alpha} |x(\tau)|^p\, d\tau \ =\ 0$ gleichmäßig für $x \in M$.

Bemerkung: Dieses Kriterium gilt mit offensichtlichen Modifikationen auch für $L^p(B)$, wo B eine Lebesgue-meßbare Menge des $\mathbb{R}^d$ ist. Ist B zusätzlich beschränkt, kann 3) entfallen.

§ 7 Lineare Operatoren

Bezeichnung: $L(X,Y)$:= Menge aller linearen und stetigen Abbildungen eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y.
(Vorsicht: Manche Autoren verstehen unter $L(X,Y)$ nur lineare Operatoren.)

Satz 7.1
Sind $(X, \|\ \|), (Y, \|\ \|)$ normiert und $T : X \to Y$ linear, so sind 1)–4) äquivalent:

1. T ist stetig (d.h. $T \in L(X,Y)$).
2. T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.
3. $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$.
4. $\exists\, C > 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall\, x \in X$. ($T$ beschränkt)

Beachte:
1. Der Satz besagt **nicht**, daß ein linearer Operator stetig ist (vgl. Folgerung 1 d) aus Satz 4.13). Lineare Operatoren sind nur in endlich dimensionalen Räumen automatisch stetig.
2. Die Äquivalenz von 1) und 2) ist schon aus § 3, (3.3) S 31 bekannt.
3. Die Normen in X und Y werden nicht durch Indizes unterschieden. Welche Norm wo gemeint ist, ergibt sich aus dem Zusammenhang.
4. Für lineare Operatoren sind Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit äquivalent.

Beweis:

1) $\iff$ 2) bekannt.

2) $\implies$ 3) Zu $\varepsilon = 1\ \exists\, \delta > 0 : \|x\| = \delta \implies \|Tx\| \leq 1 \implies \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\delta}$. (Stetigkeit in $x = 0$)

$\forall\, y \in X,\ y \neq 0$ folgt daraus für $x = \dfrac{y}{\|y\|}\delta$: $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \dfrac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \dfrac{1}{\delta} < \infty$.

3) $\implies$ 4) Wähle $C = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

4) $\implies$ 1) T ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante C, da T linear. ■

Wir wiederholen nochmals die Folgerung 1 d) aus Satz 4.13:

Sind $(X, \|\ \|), (Y, \|\ \|)$ normierte Räume und ist X **endlich dimensional**, so ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig.

Satz und Definition 7.2
Seien $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ normierte Räume.

Für $T \in L(X,Y)$ heißt

$$\|T\|_{L(X,Y)} \;=\; \|T\| \;:=\; \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \qquad \textit{Norm des linearen Operators } T\,,\;.$$

1. Dies ist eine Norm auf $L(X,Y)$, d.h. $L(X,Y)$ ist ein normierter Raum.
2. $L(X,Y)$ ist Banachraum, falls Y Banachraum ist.
3. $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$
   $\Longrightarrow \qquad ST \in L(X,Z) \wedge \|ST\|_{L(X,Z)} \leq \|S\|_{L(Y,Z)}\, \|T\|_{L(X,Y)}$.
4. $L(X,X)$ ist eine (normierte) Algebra bzw., falls X BR, eine Banachalgebra.
5. Äquivalent sind

   $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ ist gleichgradig stetig,

   und

   $\mathcal{T}$ ist gleichmäßig beschränkt (d.h. $\exists\, M > 0 : \; \|T\| \leq M \;\; \forall\, T \in \mathcal{T}$)

Definition 7.3 (zur Erinnerung)
Ein linearer Raum X heißt *Algebra*, falls eine Multiplikation $x \cdot y \in X$ für $x, y \in X$ erklärt ist, welche das Assoziativgesetz, das Distributivgesetz und $\alpha(xy) = (\alpha\, x)y = x(\alpha\, y)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt.

Ist X nomiert und gilt zusätzlich

$$\|xy\| \;\leq\; \|x\|\,\|y\|\,,$$

so heißt X *normierte Algebra.*

Beweis 7.2:

1. Aus Satz 7.1, 3) folgt: $\|T\|_{L(X,Y)} = \inf\{C; \|Tx\| \leq C\|x\| \; \forall\, x \in X\}$, also $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$.

   Für $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ folgt daraus

   $$\begin{aligned} &\|(T_1 + T_2)\,(x)\| \;\leq\; \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \;\leq\; (\|T_1\| + \|T_2\|)\,\|x\| \\ \Longrightarrow\;\; &\|T_1 + T_2\| \;\leq\; \|T_1\| + \|T_2\|\,. \end{aligned}$$

   Die restlichen Normaxiome sind trivial, ebenso, daß $L(X,Y)$ ein linearer Raum ist.

2. Sei $\{A_n\}$ CF in $L(X,Y)$, d.h. $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \; \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon \;\; \forall\, n, m \geq N$.

$$\left.\begin{aligned}&\Longrightarrow\quad \forall\, x\in X \text{ gilt } \|A_nx - A_mx\| \le \|A_n - A_m\|\,\|x\|,\\ &\Longrightarrow\quad \forall x\in X \text{ ist } \{A_nx\} \text{ CF in } Y \xRightarrow{Y \text{ vollst.}} \forall\, x\in X\,\exists \lim_{n\to\infty} A_nx =: Ax.\end{aligned}\right\}(*)$$

Offensichtlich ist $A : X \to Y$ linear.

$$\xRightarrow{(*)\ m\to\infty}\quad \|Ax - A_nx\| \le \|A - A_m\|\,\|x\| \le \varepsilon\|x\| \ \forall\, n \ge N \ \wedge\ \forall\, x\in X. \qquad (**)$$

$$\Longrightarrow\quad \|Ax\| \le \|A_nx\| + \varepsilon\|x\| = (\|A_n\| + \varepsilon)\|x\| \ \Longrightarrow\ A \text{ stetig (vgl. Satz 7.1).}$$

$$\xRightarrow{(**)}\quad \|A - A_n\| \le \varepsilon\ \forall\, n \ge N, \text{ also die Konvergenz.}$$

3. ST linear rechnet man sofort nach, und aus

$$\|STx\|_Z \ \le\ \|S\|_{L(Y,Z)}\,\|Tx\|_Y \ \le\ \|S\|_{L(Y,Z)}\,\|T\|_{L(X,Y)}\,\|x\|_X$$

folgt

$$\|ST\|_{L(X,Z)} \ \le\ \|S\|_{L(Y,Z)}\,\|T\|_{L(X,Y)}\,.$$

4. Folgt aus 3. für $X = Y = Z$.

5. Wird bewiesen analog zum Beweis von Satz 7.1. (Ersetze dort in 1. und 2. stetig durch gleichgradig stetig und erstrecke in 3. und 4. die Gleichung bzw. Ungleichung zusätzlich über $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}}$) ■

Beachte: Sind X, Y normierte Räume, so ist

$$A \ =\ \left\{T\big|_{\overline{K_1(0)}};\ T\in L(X,Y),\ \|T\|_{L(X,Y)} \le 1\right\}$$

eine beschränkte, gleichgradig stetige Teilmenge von $C^0(\overline{K_1(0)}, Y)$.
Sie ist aber nur dann relativ kompakt (vgl. Arzela Ascoli Satz 6.6), wenn

1. $\overline{K_1(0)}$ kompakt ist, (genau dann wenn $\dim X < \infty$ (Satz 6.4),
2. wenn der Raum $L(X,Y)$ vollständig ist (erfüllt, falls Y ein Banachraum ist (Satz 7.2, 2)), und
3. wenn Y die Eigenschaft hat, daß jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, (klar, wenn $\dim Y < \infty$, was keine große Einschränkung ist, weil das Bild eines endlichdimensionalen Raumes unter einer linearen Abbildung wieder endlichdimensional ist).

Der Beweis von Satz 6.6 (Arzela Ascoli) kann dann abgeschrieben werden.

Alle Voraussetzungen sind also erfüllt, wenn X, Y endlichdimensional sind.

Definition 7.4
Sei X ein topologischer Vektorraum.

1. $X^* := L(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, heißt (topologischer) *Dualraum von* X. Seine Elemente heißen (stetige) lineare *Funktionale*, (d.h. Abbildungen in den Skalarkörper).
2. $I \in L(X) := L(X, X)$: $Ix = x$ heißt Identität. Für $T \in L(X, Y)$ heißt

$$N(T) := \{x \in X;\ Tx = 0\} \qquad \textit{Nullraum von } T,$$
$$R(T) := \{y \in Y;\ \exists\, x \in X :\ y = Tx\} \qquad \textit{Bildraum von } T \ (\textit{range}).$$

Die gelegentlich benutzte Bezeichnung $X^* = X'$ kann irreführend sein, da mit X' oft nur die linearen (nicht notwendig stetigen) Funktionale gemeint sind.

Beachte: 1. Ist X normiert, so ist X^* bzgl. der Norm $\|T\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$ immer ein BR, da der Skalarkörper vollständig ist (Satz 7.2, 2.).

2. $N(T)$ ist abgeschlossen, da T stetig ist.
3. $R(T)$ ist i.allg. nicht abgeschlossen, vgl. Beispiel 1 nach Satz 7.6.

Über die Existenz von Inversen beweisen wir

Satz 7.5 Neumann'sche Reihe
Sei $(X, \|\ \|)$ ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1 \qquad (\text{z.B. erfüllt, wenn } \|T\| < 1).$$

Dann ist $(I - T)^{-1} \in L(X)$ und es gilt:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad \text{in } L(X) \qquad (\text{mit der Norm aus Satz 7.2}), \quad T^0 = I.$$

Bemerkungen:

1. Der Satz ist eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe.
2. Die Voraussetzung ist natürlich erfüllt, wenn $\|T\| < 1$.
3. Die Voraussetzung für $n > 1$ kann z.B. erfüllt werden für den Volterra-Integraloperator

$$Tx(t) = \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad x \in C[a,b], \quad k \in C([a,b] \times [a,b]).$$

Das Beispiel zeigt, daß $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ schwächer ist, als $\|T\| < 1$. (Übung)

Aufgabe: Für $g \in C[a,b]$ hat die Gleichung $x(t) = Tx(t) + g(t)$ eine Lösung.

Beweis: Mit $S_k := \sum\limits_{n=0}^{k} T^n$ zeigen wir die Konvergenz der Reihe.

Laut Voraussetzung $\exists\, m \in \mathbb{N}\colon\ n \geq m \implies \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq K < 1$, bzw. $\|T^n\| \leq K^n < 1$.

$$\xRightarrow{\ell > k \geq m} \qquad \|S_\ell - S_k\| \ = \ \left\| \sum_{k<n\leq\ell} T^n \right\| \ \leq \ \sum_{k<n\leq\ell} \|T^n\| \ \leq \ \sum_{k<n\leq\infty} K^n \ \xrightarrow{k\to\infty} \ 0.$$

$$\xRightarrow[\text{(vgl. Satz 7.2, 2)}]{L(X)\text{ vollständig}} \qquad \exists\, S \ := \ \lim_{k\to\infty} S_k \ \text{ in } \ L(X).$$

$$\implies \quad (I-T)Sx \ \xleftarrow{k\to\infty} \ (I-T)S_k x \ = \ \sum_{n=0}^{k} (T^n - T^{n+1})x \ = \ x - T^{k+1}x \ \xrightarrow{k\to\infty} \ x$$

Läßt man $k \to \infty$ gehen, so erhält man $(I-T)S = I$.
Beachte dazu: $T^{k+1}x$ ist Summand einer konvergenten unendlichen Reihe, deren Glieder mit wachsendem k gegen Null gehen.
Ebenso zeigt man, daß $S(I-T) = I \implies (I-T)^{-1} = S$. (Links- = Rechtsinverse) ■

Als Folgerung erhält man sofort

Satz 7.6 Existenz der Inversen benachbarter Operatoren
Die Menge der invertierbaren Operatoren T in $L(X,Y)$ mit $T(X) = Y$ ist offen, d.h. für $T, S \in L(X,Y) \wedge T^{-1} \in L(Y,X)$, gilt:

$$\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1} \quad \implies \quad \exists\, (T-S)^{-1}.$$

,

Beweis: Zur Zurückführung auf den vorigen Satz zerlegen wir

$$(T-S) = T(I - T^{-1}S) = (I - ST^{-1})T.$$

Das Produkt invertierbarer Operatoren ist invertierbar ($(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).
Nach Satz 7.5 ist $(T-S)$ also invertierbar, wenn $\|T^{-1}S\|, \|ST^{-1}\| < 1$, was aus $\|S\|\,\|T^{-1}\| < 1$ folgt. ■

Beachte zur Begriffsbildung: Gemäß (3.2), S 31 beschreibt $T-S$ eine Umgebung von T, da durch $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ eine Nullumgebung definiert wird.

Beispiele linearer Operatoren und Funktionale

1. $$\begin{array}{ccc} \big(C[0,1], \|\ \|_\infty\big) & \xrightarrow{T} & \big(C[0,1], \|\ \|_\infty\big) \\ f & \longrightarrow & \int\limits_0^t f(x)\,dx \end{array}$$

   ist eine lineare und stetige Abbildung. Man berechne ihre Norm und zeige, daß $R(T)$ nicht abgeschlossen ist (Übung).

2.
$$\begin{array}{ccl}\big(C_{\mathbb{R}}[a,b], \|\;\|_\infty\big) & \xrightarrow{T} & \big(\mathbb{R}, |\;|\big)\\ x & \longrightarrow & Tx = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k x(t_k), \ \big(c_k \in \mathbb{R},\ t_k \in [a,b]\big)\end{array}$$

ist ein lineares Funktional. (Das ist eine Abbildung in den Skalarkörper.) Quadraturformeln haben die Gestalt des Beispiels. Die Linearität ist klar.

Beschränktheit (vgl. Satz 7.1): $|T(x)| \leq \big(\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k|\big)\,\|x\|_\infty \implies \|T\| \leq \sum\limits_{k=1}^{m} |c_k|$.

Für ein stückweise lineares $\tilde{x}$ mit $\tilde{x}(t_k) = \operatorname{sgn} c_k$ und $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ gilt

$$|T(\tilde{x})| \;=\; \sum_{k=1}^{m} |c_k| \cdot 1, \qquad \text{also} \;\; \|T\| \;=\; \sum_{k=1}^{m} |c_k|\,.$$

3.

$$\begin{array}{ccl}\big(C_{\mathbb{R}}[a,b], \|\;\|_\infty\big) & \xrightarrow{T} & \big(\mathbb{R}, |\;|\big)\\ x & \longrightarrow & Tx = \int\limits_a^b x(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{für } \varphi \text{ auf } [a,b] \text{ integrierbar}\,.\end{array}$$

Wie in 2) sieht man $T \in C[a,b]^*$ und $\|T\| \;\leq\; \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt$.

Wir zeigen später sogar

$$(*) \qquad \|T\| \;=\; \int_a^b |\varphi(t)|\,dt\,.$$

Bemerkung: Falls $\varphi(t) > 0$ in (a,b) oder < 0 in (a,b) , wähle $x(t) = \operatorname{sgn} \varphi(t)$. Dann ist $(*)$ offensichtlich (Vorgehen wie unter 2)).

4. Sei $k \in C_{\mathbb{R}}\big([a,b] \times [a,b]\big)$ und

$$K \;:\; C[a,b] \;\rightarrow\; C[a,b] \;:\; (Kx)\,(s) \;:=\; \int\limits_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt$$

(k heißt Kern des Integraloperators). K ist linear, die Stetigkeit (bzgl. $\|\;\|_\infty$) folgt aus

$$\|Kx\| \;=\; \max_{s\in[a,b]} \left| \int\limits_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt \right| \;\leq\; \left(\max_{s\in[a,b]} \int\limits_a^b |k(s,t)|\,dt \right) \|x\|_\infty\,,$$

also
$$\|K\| \leq \max_{s\in[a,b]} \int\limits_a^b |k(s,t)|\,dt\,.$$

Beachte: Satz 7.5 (Neumann'sche Reihe) liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Lösung einer Fredholm-Integralgleichung

$$x(t) \;=\; \int_a^b k(s,t)\,x(s)\,ds + g(t)\,.$$

Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen können in solche Integralgleichungen (mittels der Green'schen Funktion) umgeschrieben werden.

5. Lineare Abbildungen in endlich dimensionalen Räumen (Matrizen) (vgl. Übungen).

6. Sei $1 \leq p < \infty$ und $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dann ist für $g \in L^q(B),\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, durch
$$T_g f \;=\; \int\limits_B f(t)\,\overline{g}(t)\,dt$$
ein Elemente $T_g \in L^p(B)^*$ (Funktional) definiert. (Beweis mittels der Hölder'schen Ungleichung.) Man kann sogar zeigen, daß alle Elemente $\in L^p(B)^\star$ so darstellbar sind (vgl. Satz 8.11)

7. Sind p, q wie in 6) und $g_\alpha \in L^q(B)$ für $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}$ (Multiindizes), so wird durch
$$Tf \;:=\; \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_B \partial^\alpha f \cdot \overline{g}_\alpha\,dt \quad \text{für} \quad f \in H^{m,p}(B)$$
ein Element $T \in H^{m,p}(B)^*$ definiert (Beweis mit Hölder).

8. Seien $\alpha_s \in \mathbb{K}$ für $|s| \leq m$. Dann heißt
$$Lf \;:=\; \sum_{|s| \leq m} \alpha_s\,\partial^s f$$
linearer Differentialoperator der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten. Für offene, beschränkte Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist
$$L \in L\Big(C^m(\overline{\Omega}),\, C^0(\overline{\Omega})\Big) \quad \text{sowie} \quad L \in L\Big(H^{m,p}(\Omega),\, L^p(\Omega)\Big),$$
jeweils bzgl. der zugehörigen Normen.

Distributionen

Definition 7.7
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$
$$\begin{aligned} F:\ \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longrightarrow F\varphi \;=\; \langle F, \varphi \rangle \;=\; F(\varphi) \end{aligned} \quad \text{heißt } \textit{Distribution}\,.$$
Die Stetigkeit bezieht sich auf die Topologie gemäß Satz 3.21.
Bezeichnung: $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (*topologischer Dualraum* von $\mathcal{D}(\Omega)$).

Gelegentlich findet man auch die Bezeichnung $\mathcal{D}^*(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$, was insofern verwirrend sein kann, als manche Autoren unter $\mathcal{D}'(\Omega)$ nur die linearen Funktionale verstehen (algebraischer Dualraum) ohne Stetigkeit.

Wir beschreiben die Stetigkeitseigenschaften der Distributionen in

Satz 7.8
Für $F : \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.
2. F ist folgenstetig, d.h. $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_m \xrightarrow[\mathcal{D}(\Omega)]{m\to\infty} 0 \Longrightarrow \langle F, \varphi_m\rangle \xrightarrow{m\to\infty} 0$.
3. $F_K := \operatorname{Restr} F\big|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist folgenstetig $\forall\, K \subset \Omega$ kompakt.
4. F_K ist stetig $\forall\, K \subset \Omega$ kompakt.

Beweis: Beachte, daß man sich wegen (3.3) S 31 auf die Stetigkeit im Nullpunkt beschränken kann.

1) $\Longrightarrow$ 2) gilt in jedem topologischen Raum (kleine Übung). Nur die Äquivalenz gilt nicht in jedem topologischen Raum.

2) $\Longrightarrow$ 3) folgt aus dem Konvergenzbegriff und der Spurtopologie (Satz 3.21).

3) $\Longrightarrow$ 4) Da die $\mathcal{D}_K(\Omega)$ metrische Räume sind (Satz 3.15), sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent.

4) $\Longrightarrow$ 1) Sei $V \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(0)$ (Œ V konvex, kreisförmig und absorbierend).

Wir zeigen: $F^{-1}(V) \in \mathcal{V}$, d.h. wir zeigen die Eigenschaften $(\alpha), (\beta)$ aus Satz 3.21. Die Elemente $\in \mathcal{V}$ erzeugen die Topologie, sind also offen $\Longrightarrow F$ ist stetig.

Aus der Linearität von $F^{-1}(V)$ folgt sofort: $F^{-1}(V)$ ist konvex, kreisförmig und absorbierend. $\Longrightarrow (\alpha)$ aus Satz 3.21.

Nun ist $F_K^{-1}(V) \in \mathcal{D}_K(\Omega) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0)\ \forall\, K \subset \Omega$ kompakt, da F_K stetig.
Also ist $F_K^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0) \Longrightarrow (\beta)$. ■

Bemerkung: In metrischen Räumen sind Folgenstetigkeit und Stetigkeit äquivalent. Dies ist auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ richtig.

Man könnte vermuten, daß $\mathcal{D}(\Omega)$ metrisierbar ist, denn

1. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ hat eine abzählbare Überdeckung durch kompakte Mengen K_i und
2. $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{0,K_i}^\infty(\Omega)$, also abzählbar,
3. die Topologie von $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$ wird erzeugt, durch eine abzählbare Familie P_{K_i} von Halbnormen, die den kreisförmigen, absorbierenden, konvexen Mengen $V(p_{K_i}, \varepsilon_{i_j})$ entsprechen ($p_{K_i} \in P_{K_i}$, $\{\varepsilon_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge (vgl. Satz 3.10)).

Das legt die Vermutung nahe, daß die Topologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ durch eine abzählbare Folge von Halbnormen erzeugt werden kann und damit metrisierbar ist.

Der Trugschluß besteht darin, daß man in obiger Aufzählung nicht **alle** die Topologie erzeugenden Halbnormen (vgl. Satz 3.21) erfaßt hat, wie folgendes Beispiel zeigt:

$p_m(f) = \sup\limits_{|\nu|\leq m} |\partial^\nu f|$ ist eine Norm auf $C_0^\infty(\Omega)$,

also $V(p_m,\varepsilon) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega);\ p_m(\varphi) < \varepsilon\}$ absorbierend, kreisförmig, konvex
(vgl.(3.4), S 33)

und $V(p_m,\varepsilon) \cap \mathcal{D}_{K_i}(\Omega) = V(p_{K_i,m},\varepsilon) = \{\varphi \in C^\infty_{0,K_i}(\Omega);\ p_{K_i,m}(\varphi) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)}(0)$,
(vgl. Satz 3.15)

also $V(p_m,\varepsilon) \in \mathcal{V}$ (vgl. Satz 3.21, insbesondere (α), (β) und Beweis 1.).

Es gibt jedoch kein $V(p_{K_j,m_j},\varepsilon) \subset V(p_m,\varepsilon)$, da ein $\varphi \in V(p_{K_j,m_j},\varepsilon)$ außerhalb K_j beliebig große Funktions- und Ableitungswerte annehmen kann.

Als Folgerung aus dem vorigen Satz erhalten wir die Charakterisierung

Satz 7.9
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{C}$, dann gilt

$F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \iff$ $\forall$ kompakte $K \subset \Omega$ gibt es von K abhängige Konstanten $C > 0,\ k \in \mathbb{N},$ sodaß $|\,\langle F,\varphi\rangle\,| \ \leq\ C\|\varphi\|_{C^k_K(\Omega)}\ \ \forall\,\varphi \in C^\infty_{0,K}(\Omega)$.

Beweis:
Wir erinnern uns an folgende Äquivalenzen:

$F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \iff$ $F_K \ = \ \text{Restr}\, F\big|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ stetig $\forall$ kompakten $K \subset \Omega$.

$\iff$ F_K stetig in 0 $\forall$ kompakten $K \subset \Omega$.

$\iff$ $\forall\, V \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(0)\ \exists\, U \in \mathcal{U}_{\mathcal{D}_K(\Omega)}(0):\ \ F_K(U) \subset V$.

$(*)$ $\iff$ $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, \|\ \|_{C^k(K)} \wedge \delta > 0:\ \forall \zeta \in C^\infty_{0,K}:\ \|\zeta\|_{C^k(K)} \leq \delta \implies |\langle F_K,\zeta\rangle| \leq \varepsilon.$
(Alle Halbnormen sind stetig, Satz 3.11, 3.)

Beweis „$\Longleftarrow$“ $(*)$ folgt direkt aus der Bedingung aus Satz 7.9, die ja (sogar) die Lipschitzstetigkeit besagt.

Beweis „$\Longrightarrow$“ aus $(*)$ folgt insbesondere

$(**)$ Zu $\varepsilon = 1\ \exists\, \|\ \|_{C^k(K)} \wedge \delta_1 > 0:\ \ |\langle F_K,\zeta\rangle| \leq 1\ \ \forall\,\zeta:\ \|\zeta\|_{C^k(K)} = \delta_1$.

Setze für beliebiges $\varphi \in C^\infty_{0,K}(\Omega),\ \varphi \neq 0:\ \ \zeta = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_{C^k(K)}}\,\delta_1$, so folgt aus $(**)$

$$\left|\left\langle F_K, \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{C^k(K)}}\,\delta_1\right\rangle\right| \ \leq\ 1 \quad \text{bzw.} \quad |\langle F_K,\varphi\rangle| \ \leq\ \frac{1}{\delta_1}\,\|\varphi\|_{C^k(K)} \ =\ \frac{1}{\delta_1}\,\|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})}\,.$$

Setze $C = \dfrac{1}{\delta_1}$. ■

Definition 7.10
Kann in Satz 7.9 dieselbe Zahl $k \in \mathbb{N}$ für alle Kompakta $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ benutzt werden, so heißt $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ *von der Ordnung* $\leq k$.

Bezeichnung: $F \in \mathcal{D}^{*\,k}(\Omega)$.

(Manche Autoren – z.B. Walter – verlangen auch die Unabhängigkeit der Konstanten C von K.
Dies führt (gelegentlich) zu einem anderen Ordnungsbegriff, (vgl. dazu die Beispiele.)

Satz 7.11
Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt

1. $\mathcal{D}^*(\Omega)$ wird durch
$$\langle \alpha\, F + \beta\, G, \varphi \rangle \;:=\; \alpha\, \langle F, \varphi \rangle \;+\; \beta\, \langle G, \varphi \rangle\,, \qquad F, G \in \mathcal{D}^*(\Omega),\;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,,$$
zu einem linearen Raum.
2. Für jedes $f \in L_{\text{loc}}(\Omega) = \{f \in L(\Omega \cap B)$ für alle Kompakta $B \subset \Omega\}$ wird durch
$$T_f(\varphi) \;=\; \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, f(x)\, dx \;=:\; \langle f, \varphi \rangle\;; \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$
eine Distribution definiert.
Sie heißt *reguläre Distribution* (d.h. erzeugt von einem $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$).
3. Sei $x_0 \in \Omega$. Durch
$$T_{\delta_{x_0}}(\varphi) \;=\; \varphi(x_0) \;=:\; \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle\;; \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\delta_{x_0} = \delta \text{ für } x_0 = 0)\,,$$
wird eine *nicht reguläre Distribution* (*singuläre Distribution*) erklärt (d.h. nicht durch ein $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ erzeugbar). Sie heißt *Dirac-Distribution.*
4. Die Distributionen aus 2) und 3) sind von nullter Ordnung.

Bemerkung: δ_{x_0} ist die mathematische Beschreibung einer im Punkt x_0 konzentrierten Einheitsladung.

Beweis:

1) trivial.

2)-4) Die Linearität in 2), 3) ist offensichtlich. Der Nachweis, daß Distributionen vorliegen, wird durch den Nachweis der Ordnung erbracht (vgl. Satz 7.9).

3) Annahme: $\exists\, \delta \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \;\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle \;=\; \int \varphi(x)\, \delta(x)\, dx \;=\; \varphi(x_0),\;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$

$$\Longrightarrow \;\exists\, a > 0 : \int\limits_{|x - x_0| \leq a} |\delta(x)|\, dx < \tfrac{1}{2}\,.$$

Sei $\varphi_\alpha(x) \;=\; \begin{cases} \exp\left(-1/\left(1-\left|\dfrac{x}{\alpha}\right|^2\right)\right), & |x| \;<\; \alpha\,, \\ 0, & |x| \;\geq\; \alpha\,. \end{cases}$

Mit $\varphi(x) := \varphi_\alpha(x-x_0)$ folgt aus der Annahme:

$$\varphi(x_0) = \max|\varphi(x)| \;=\; |\langle\delta_{x_0}, \varphi_\alpha(x-x_0)\rangle| \;=\; \left|\int\limits_{|x-x_0|\leq a} \delta(x)\,\varphi_\alpha(x-x_0)\,dx\right|$$

$$\leq \varphi(x_0) \int\limits_{|x-x_0|\leq a} |\delta(x)|\,dx \;<\; \frac{1}{2}\,\varphi(x_0) \quad \textbf{W!}$$

4) Es ist für ein kompaktes $K \subset \Omega$, $\varphi \in C^\infty_{0,K}$

$$|T_f(\varphi)| \;\leq\; \int\limits_K |\varphi(x)|\,|f(x)|\,dx \;\leq\; \|\varphi\|_{C^0(\overline{\Omega})} \int\limits_K |f(x)|\,dx \quad \forall\,\varphi \in C^\infty_{0,K}(\Omega)\,.$$

Dies zeigt, daß T_f von nullter Ordnung ist gemäß Definition 7.10. (Eine Ordnung gemäß der Definition von Walter kann man ihr nur zuschreiben, falls $f \in L(\Omega)$ ist, denn die Konstante, das Integral auf der rechten Seite, ist von K abhängig.
Beachte dazu, daß $L_{\text{loc}}(\Omega) \not\subset L(\Omega)$. Beispiel: $f(t) = t^n$, $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus L(\mathbb{R}^n)$.)

Für $T_{\delta_{x_0}}$ gilt offensichtlich

$$\left|T_{\delta_{x_0}}(\varphi)\right| \;\leq\; \|\varphi\|_{C^0(\Omega)} \quad \forall\,\varphi \in C^\infty_0(\Omega)\,.$$

■

In den Übungen werden wir folgende, weitere Distributionen kennenlernen:

Beispiele für Distributionen

1. $\langle T,\varphi\rangle \;=\; \sum\limits_{i=0}^{k} \varphi^{(i)}(x_0)$, $k \in \mathbb{N}^0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fest, $\alpha < x_0 < \beta$, ist eine singuläre Distribution der Ordnung k über (α,β).
2. $\langle T,\varphi\rangle \;=\; \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi^{(i)}(i)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ist eine singuläre Distribution, die keine endliche Ordnung hat. Die Reihe konvergiert, da $\operatorname{Tr}\varphi$ kompakt ist.
3. $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugt eine Distribution
   (i) der Ordnung 0,
   (ii) ohne endliche Ordnung, wenn man die Definition aus Walter zugrunde legt.
4. Für Multiindizes $|s| \leq m$ seien $g_s \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k)$. Mit dem linearen Differentialoperator
$$L\,\varphi \;=\; \sum_{|s|\leq m} g_s\,\partial^s\,\varphi$$
wird durch $\langle u, L\varphi\rangle$ für $u \in L_{loc}(\Omega)$ eine Distribution m-ter Ordnung erzeugt.

Distributionsableitungen

Motivation:
Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, betrachte

$$T_f(\varphi) \;=\; \int\limits_\Omega \varphi\, f\, dx \;=\; \langle f, \varphi\rangle\,; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \text{(vgl. Satz 7.11).}$$

Ist $f \in H^{m,p}(\Omega)$, so sind die entsprechenden Abbildungen

$$T_{\partial^s f}(\varphi) \;=\; \int\limits_\Omega \varphi\, \partial^s f\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ebenfalls Distributionen und es gilt

$$T_{\partial^s f}(\varphi) \;=\; \int\limits_\Omega \varphi\, \partial^s f\, dx \;=\; (-1)^{|s|} \int\limits_\Omega \partial^s \varphi \cdot f\, dx \;=\; (-1)^{|s|}\, T_f(\partial^s \varphi).$$

Diese Darstellung (man streiche das erste Integral) nehmen wir als Grundlage zur Definition der Distributionsableitung. (Permanenzprinzip: Definitionen für Distributionen werden so gefaßt, daß kein Widerspruch zu bekannten Definitionen (,z.B. bei Anwendung auf $f \in H^{m,p}(\Omega)$,) entsteht.)

Definition 7.12
Ist $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, so werden die Distributionsableitungen erklärt durch

$$(\partial^s T)\,(\varphi) = (-1)^{|s|}\, T(\partial^s \varphi), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Folge: Jede Distribution hat Ableitungen beliebig hoher Ordnung.

Bemerkung: $f \in L^p(\Omega)$ ist in $H^{m,p}(\Omega)$, falls sich die Distributionsableitungen von f (genauer T_f, vgl. dazu nächsten Abschnitt) bis zur Ordnung m durch $L^p(\Omega)$-Funktionen beschreiben lassen.

Identifikation von Funktion f und Distribution F

Zur Bezeichnung regulärer Distributionen (d.h. man braucht $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$) haben sich folgende Schreibweisen eingebürgert:

$$F(\varphi) \;=\; (f, \varphi) \;=\; \int\limits_\Omega \varphi(x)\, f(x)\, dx \;=\; f(\varphi) \;=\; \langle f, \varphi\rangle \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Einerseits wird durch ein $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ eindeutig die zugehörige Distribution bestimmt, gemäß obiger Gleichung, andererseits wird durch die Distribution

$$F(\varphi) \;=\; \int\limits_\Omega \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

die erzeugende Funktion f.ü. festgelegt, denn

wir haben in den Übungen gezeigt: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(\Omega)$, so gilt

$$\lim_{\alpha \searrow 0} f_\alpha(x) \;=\; \lim_{\alpha \searrow 0} \int\limits_\Omega f(\xi)\, \varphi_\alpha(\xi - x)\, d\xi \;=\; f(x)$$

Eine entsprechende Aussage gilt für $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ f.ü.

Deshalb werden Distributionen auch als verallgemeinerte Funktionen bezeichnet. Oft unterscheidet man in der Sprechweise nicht zwischen einer Distribution und der sie erzeugenden Funktion. Daß Distributionen echte Verallgemeinerungen sind, zeigten Satz 7.11, 2), sowie die Beispiele 1) und 2) auf S 111.

Distributionelle Lösungen partieller Differentialgleichungen

Sei L ein linearer Differentialoperator

(7.1) $$L\,u \;=\; \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha\, \partial^\alpha\, u, \qquad r \in \mathbb{N},\; a_\alpha \in C^\infty(\Omega) \text{ reellwertig, } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ein Gebiet}.$$

Definition 7.13
Ist $u \in C^r(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ und gilt

(7.2) $$L\,u(x) \;=\; f(x) \quad \text{in } \Omega\,,$$

so heißt u *starke Lösung* von (7.2) (hierzu ist $a_\alpha \in C^\infty$ nicht nötig).

Ist f eine Distribution (z.B. $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$), so kann man (7.1) als Differentialgleichung für Distributionen auffassen, gemäß

$$\langle L\,u, \varphi\rangle \;=\; \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Gemäß der Distributionsableitungsdefinition gilt

$$\begin{aligned} \langle L\,u, \varphi\rangle \;&=\; \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha\, \partial^\alpha\, u\Big)\, \varphi\, dx \;=\; \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le r} (a_\alpha\, \varphi)\, \partial^\alpha\, u\, dx \\ &=\; \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le r} u(-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha\, (a_\alpha\, \varphi) dx \;=\; \int\limits_\Omega u \underbrace{\sum_{|\alpha| \le r} (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha (a_\alpha\, \varphi)\, dx}_{L^*(\varphi)} = \;\langle u, L^*\, \varphi\rangle \end{aligned}$$

$L^*(\varphi)$ heißt der zu L *(formal) adjungierte Differentialoperator*.

Beachte: Weil $a_\alpha \in C^\infty$ vorausgesetzt wurde, ist $L^*(\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definition 7.14
Eine Distribution u heißt *Distributionslösung* von

$$L\,u \;=\; f, \qquad L\,u \text{ gemäß (7.1)}, \;\; f \in \mathcal{D}^*(\Omega), \;\text{ falls}$$

$$(7.3) \qquad \langle u, L^*\varphi\rangle \;=\; \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Ist speziell $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\langle f, \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$, so heißt u *Grundlösung*.

Man beweist sehr schnell (Übung) den folgenden

Satz 7.15
Ist $u \in C^r(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, eine Distributionslösung von $L\,u = 0$, L gemäß (7.1), so ist u auch starke Lösung von $L\,u = 0$.

Jede starke Lösung von $L\,u = 0$ ist auch Distributionslösung.

Beispiel für Distributionslösungen:

$$L\,u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \qquad \textit{Wellengleichung}$$

Starke Lösungen sind $u(x,t) = w_1(x+t) + w_2(x-t)$ für beliebige $w_i \in C^2$.

Wir zeigen: Für

$$w(z) \;=\; \begin{cases} 1, & z \;\geq\; 0 \\ 0, & z \;<\; 0 \end{cases} \qquad \textit{Heaviside-Funktion}\,,$$

ist

$$u(x,t) \;=\; w(x-t) \;=\; \begin{cases} 1, & x \;\geq\; t \\ 0, & x \;<\; t \end{cases} \qquad \text{Distributionslösung von } L\,u = 0\,.$$

Beweis:
Es muß gezeigt werden

$$\langle u, L^*\varphi\rangle \;=\; 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

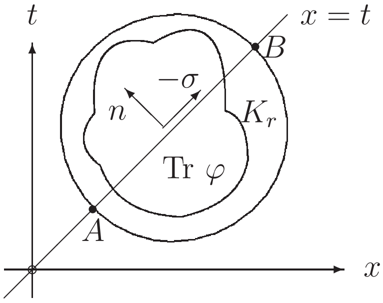
Man rechnet sofort nach, daß $L = L^*$ ist (*selbstadjungiert*). Zeige also

$$\langle u, L^*\varphi\rangle \;=\; \iint\limits_{x \geq t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx\, dt \;=\; 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

(Beachte: Für $x < t$ ist $u = 0$!)

Dies muß besonders gezeigt werden für alle φ mit $\operatorname{Tr}\varphi \cap \{x = t\} \neq \emptyset$.
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{Tr}\varphi \cap \{x = t\} = \emptyset$ ist die Behauptung richtig wegen Satz 7.15.

Sei also Tr $\varphi \subset K_r =$ offene Kugel mit Radius r und Tr $\varphi \cap \{x = t\} \neq \emptyset$. $\boldsymbol{n}$ ist die äußere Normale des Gebiets $\Omega = K_r \cap \{x > t\}$ auf dem Randteil, der durch $x = t$ bestimmt wird.



L wird beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(a_{i_k}\right)$$

$$L\,u = \sum_{i,k=1}^{2} a_{i_k}\, u_{x_i x_k}\,, \quad x_1 = t,\ x_2 = x\,.$$

Der Vektor $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{n}$ heißt Konormale von L auf $\partial\,\Omega$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt die Green'sche Formel für reellwertige Funktionen (vgl. Collatz: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik)

$$\int\limits_{\Omega} \Big(v\,L\,u - u\,L^*\,v\Big)\,dx\,dt = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial\,u}{\partial\boldsymbol{\sigma}} - u\frac{\partial\,v}{\partial\,\boldsymbol{\sigma}}\right)\,ds.$$

Wir wenden nun die Green'sche Formel an auf $L = L^*$ und das Gebiet $K_r \cap \{x > t\}$ mit $v \equiv 1$, $u = \varphi$ und beachten $\varphi = 0$ auf ∂K_r.

$$\iint\limits_{x>t} L\,\varphi\,dx\,dt = \iint\limits_{x>t} \left(\frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\,t^2} - \frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\,x^2}\right)\,dx\,dt = \underset{\substack{C\\ \uparrow \\ C \;=\; K_r \cap \{x=t\}}}{\int} \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\boldsymbol{\sigma}}\,ds = \varphi(A) - \varphi(B) = 0$$

Dabei sind $\boldsymbol{n} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{\sigma}$ der Tangentenvektor von C.

§ 8 Fortsetzung linearer Abbildungen und Funktionale

Definition 8.1
Ist

$$\begin{tikzcd} A_0 : M_0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & Y \arrow[d, phantom, "|\cap"] \\ A\ : M \arrow[r] & \widetilde{Y} \end{tikzcd} \qquad \text{und} \quad A\big|_{M_0} = A_0\,,$$

dann heißt A *Erweiterung (Fortsetzung)* von A_0.

Der einfachste Fall: $\overline{M}_0 = M$ wird beschrieben durch

Satz 8.2
Seien $(X_0, \|\ \|)$, $(X, \|\ \|)$ normierte Räume, X_0 ein in X dichter Teilraum.

$(Y, \|\ \|_Y)$ sei ein BR und $A_0 : X_0 \xrightarrow{\text{stetig, linear}} Y$.

$\Longrightarrow \quad \exists!\, A : X \xrightarrow{\text{linear, stetig}} Y$ und $A\big|_{X_0} = A_0$, $\|A\| = \|A_0\|$.

Hinweis zu Bezeichnungen: Gelegentlich wird die Eigenschaft X_0 *dicht in* X abgekürzt durch $\overline{X}_0 = X$. Gemeint ist genauer $\overline{X}_0^{\mathcal{T}_X} = X$, also *dicht bzgl. der Topologie* $\mathcal{T}_X$ *des Oberraums*, was nicht notwendig bedeutet *dicht bzgl. der Norm des Oberraums.* Man nimmt durch den *Abschluß* $\overline{X}_0$ nur die Häufungspunkte von X_0 dazu, die im Oberraum liegen. Wir verdeutlichen das durch ein Beispiel:
$X_0 = \mathbb{Q}^n$ über dem Zahlkörper $\mathbb{Q}$ mit der Euklidischen Norm, $X = (\mathbb{Q} \oplus [\sqrt{2}])^n$, (wobei $[\sqrt{2}]$ den linearer Aufspann bezeichnet) ebenfalls über $\mathbb{Q}$ mit der Euklidischen Norm. Offensichtlich liegen nicht alle Häufungspunkte von X_0 in X. Der Abschluß von X_0 bzgl. der Euklidischen Norm wäre $\mathbb{R}^n$.

Beweis des Satzes:
Sei $x \in X \setminus X_0 \implies \exists\,\{x_n\} \subset X_0 : x_n \longrightarrow x,\ A_0 x_n \longrightarrow ?$

Nun ist

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| \ \le\ \|A_0\|\,\|x_n - x_m\| \implies \{Ax_n\}\ \text{CF} \xRightarrow{Y \text{ vollständig}} \exists\, Ax := \lim_{n\to\infty} Ax_n\,.$$

Ax ist unabhängig von $\{x_n\}$, denn

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ x_n' \longrightarrow x \end{array}\right\} \implies \|A_0(x_n - x_n')\| \le \|A_0\|\, \underbrace{\|x_n - x_n'\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \implies \lim_{n\to\infty} A_0 x_n = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n' = Ax\,.$$

Zeige $A \in L(X, Y)$. A linear ist klar.

$$\begin{array}{llcl} A \text{ stetig? Es ist} & \|A_0 x_n\| & \leq & \|A_0\|\,\|x_n\| \\ & \Big\downarrow n\to\infty & & \Big\downarrow n\to\infty \\ \|\ \|\text{ stetig} \Longrightarrow & \|Ax\| & \leq & \|A_0\|\,\|x\| \Longrightarrow \|A\| \leq \|A_0\| \Longrightarrow A\,\text{stetig}\,. \\ & & & \big(\|A\| = \inf\{C>0;\ \|Ax\| \leq C\|x\|\}\big) \end{array}$$

Andererseits: $\|A\| \;=\; \sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}} \|Ax\| \;\geq\; \sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X_0}} \|Ax\| \;=\; \|A_0\|$,

also $\|A\| \geq \|A_0\|$, und damit $\|A\| = \|A_0\|$. ■

Folgerung:
Seien X, Y normierte Räume, Y ein Banachraum, $M \subset X$ und M dicht in X, so gilt

$$\left.\begin{array}{l} A \in L(X,Y), \\ AM = 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad AX \;=\; 0\,.$$

Bemerkung: Diese Aussage hat „eine Art Umkehrung" im Dichtekriterium von Banach (vgl. Satz 8.6).

Natürliche Verallgemeinerung: Betrachte statt $\overline{X}_0 = X$ einen echten Teilraum.

Satz 8.3 Hahn-Banach: Fortsetzung linearer Funktionale
$(X, \|\ \|)$, $X \supset X_0$ ein linearer Teilraum und $f_0 :\ X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_0 \in X_0^*$ beschränkt.

$\Longrightarrow$ $\exists$ (mindestens) ein $f \in X^* : f\big|_{X_0} = f_0,\ \|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$.

(ohne Zorn, falls X separabel)

Wir beweisen den Satz
a) für den Fall separabler Räume und
b) falls nicht separable Räume vorliegen.

Beweis a) Idee: Langsam hocharbeiten, d.h.

$$X_1 = X_0 \oplus [x_1],\ \ x_1 \notin X_0 \qquad ([x_1]\widehat{=}\text{linearer Aufspann}),$$

$$f_0 \text{ zu } f_1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fortsetzen, usw.: } X_2 = X_1 \oplus [x_2]\ \ldots$$

Sei also $z \in X_1 \iff z = x + \alpha\, x_1,\ x \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Wir wollen $|f_1(z)| \leq \|f_0\|\,\|z\|\ \forall\, z$ erreichen, denn dann folgt

$$\left.\begin{array}{l} \|f_1\| \leq \|f_0\| \\ \|f_1\| = \|f_0\| \text{ auf } X_0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \|f_1\| = \|f_0\|\,.$$

Wir wollen also

$$(*) \qquad |f_1(x+\alpha\, x_1)| \;=\; |f_1(x)+\alpha\, f_1(x_1)| \;\le\; \|f_0\|\,\|x+\alpha\, x_1\| \qquad \text{oder}$$

$$\left| f_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \underbrace{f_1(x_1)}_{=:\,\gamma} \right| \;\le\; \|f_0\|\,\left\|\frac{x}{\alpha}+x_1\right\|$$

bzw. $\Updownarrow$

$$\begin{cases} f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)+\gamma \;\le\; \|f_0\|\,\left\|\dfrac{x}{\alpha}+x_1\right\| \\[2ex] -f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)-\gamma \;\le\; \|f_0\|\,\left\|\dfrac{x}{\alpha}+x_1\right\| \end{cases}$$

$\Updownarrow$ wegen $f_1\big|_{X_0} = f_0$

$$(**) \qquad -f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \|f_0\|\,\left\|\frac{x}{\alpha}+x_1\right\| \;\le\; \gamma \;\le\; -f_0\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \|f_0\|\,\left\|\frac{x}{\alpha}+x_1\right\| \qquad \forall\, x\in X_0\,.$$

Frage: Existiert so ein γ? Rückwärtsrechnen!

$$\Uparrow \quad \sup_{\tilde{x}\in X_0}\Big\{-f_0(\tilde{x}) - \|f_0\|\,\|\tilde{x}+x_1\|\Big\} \;\le\; \inf_{\hat{x}\in X_0}\Big\{-f_0(\hat{x}) + \|f_0\|\,\|\hat{x}+x_1\|\Big\}$$

$$\Updownarrow \qquad -f_0(\tilde{x}) - \|f_0\|\,\|\tilde{x}+x_1\| \;\le\; -f_0(\hat{x}) + \|f_0\|\,\|\hat{x}+x_1\| \quad \text{für beliebige } \tilde{x},\hat{x}\in X_0$$

$$\Updownarrow \qquad f_0(\hat{x}) - f_0(\tilde{x}) \;\le\; \|f_0\|\Big(\|\hat{x}+x_1\| + \|\tilde{x}+x_1\|\Big)$$

und wegen $\|\tilde{x}+x_1\| \;=\; \|-\tilde{x}-x_1\|$ und der Dreiecksungleichung

$$\Uparrow \qquad f_0(\hat{x}) - f_0(\tilde{x}) \;\le\; \|f_0\|\Big(\|\hat{x}+x_1-\tilde{x}-x_1\|\Big)$$

$$\Updownarrow \qquad f_0(\hat{x}) - f_0(\tilde{x}) \;\le\; \|f_0\|\,\|\hat{x}-\tilde{x}\|.$$

Die letzte Beziehung ist aber richtig für beliebige $\hat{x},\tilde{x}\in X_0$.

Man kann also ein γ dazwischen schieben (insbesondere in $(**)$), und damit in $(*)$ $f_1(x_1)=\gamma$ so erklären, daß

$$f_1(x_1)=\gamma \;\text{ und }\; \|f_1(z)\| \le \|f_0\|\,\|z\| \;\forall\, z\in X_1\,.$$

Dieser Vorgang läßt sich wiederholen und, falls X separabel, durch vollständige Induktion auf die dichte Teilmenge erweitern. Dann kann man Satz 8.2 anwenden.

Beweis b) Sei X nicht separabel.

Dann wird die Menge

$$M \;=\; \Big\{(Y,f_Y);\; X_0\subset Y \text{ linearer Teilraum}:\; f_Y\big|_{X_0}=f_0 \text{ für } f_Y\in Y^*,\; \|f_Y\|=\|f_0\|\Big\}$$

halbgeordnet durch

$$(Y_1,f_{Y_1}) \;\le\; (Y_2,f_{Y_2}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} Y_1\subset Y_2,\; f_{Y_2}\big|_{Y_1} \;=\; f_{Y_1}\,.$$

Sei $N \subset M$ eine totalgeordnete Teilmenge $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} Y_N := \bigcup\limits_{(Y,f_Y)\in N} Y & & \text{ist ein linearer Raum} \\ f_N(z) := f_Y(z) & (\exists Y : z \in Y,\ (Y,f_Y) \in N) & \text{ein lineares, stetiges Funktional} \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$ $(Y_N, f_N) \in M$ ist eine obere Schranke von N.
$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ M besitzt ein maximales Element $(\widetilde{Y}, f_{\widetilde{Y}})$.

Behauptung: $\widetilde{Y} = X$.

Annahme: $\exists\, y_1 \in X \backslash \widetilde{Y}, y_1 \neq 0$ $\xRightarrow{\text{Teil a) des Beweises}}$ $f_{\widetilde{Y}}$ kann auf $\widetilde{Y} \oplus [y_1]$ fortgesetzt werden zu $\hat{f}$ unter Beibehaltung der Norm $\Longrightarrow$ $(\widetilde{Y}, f_{\widetilde{Y}})$ nicht maximal **W**. ■

Bemerkung: Ist $\| \ \| = p$ nur eine Halbnorm auf X und $f_0 \in X_0^*$ mit $|f_0(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in X_0$, so kann f_0 unter Erhalt der Ungleichung fortgesetzt werden. (Setze im vorigen Beweis $|f_1(z)| \leq p(x + \alpha\, x_1)$ (statt $\|f_0\|\, \|x + \alpha\, x_1\|$) *usw.*). Da in einem halbnormierten Raum keine Separabilität zur Verfügung steht, braucht man dann allerdings das Zorn'sch Lemma um das *usw.* fortzusetzen.
(Zum ausführlichen Beweis (auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) vgl. Werner, Alt, Kantorowitch/Akilov, Riesz-Nagy usw.) Man erhält dann

Satz 8.4 Hahn-Banach
Sei X ein topologischer, linearer, reeller Raum, $X_0 \subset X$ ein Unterraum, p eine Halbnorm auf X, und $f_0 : X_0 \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$ mit $|f_0(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in X_0$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, f :\ X \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R} :\ f\big|_{X_0} = f_0, \quad |f(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in X$.

Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach

Der Banachsatz existiert in vielen Varianten. Werner greift dazu folgendes Zitat auf: "it can be used every day, and twice on Sundays." Wir belegen dies durch eine Reihe von Anwendungen. (Zu einem weiteren Ausblick siehe Werner: III.6)

In Teil 1) des folgenden Satz werden durch lineare Funktionale Punkte von linearen Teilräumen getrennt. Dieser Trennungssatz, bzw. seine Verallgemeinerungen, findet Anwendung in der Optimierung. Wir benutzen ihn zum Nachweis, wann Teilräume dicht im ganzen Raum liegen (Dichtekriterium von Banach). Außerdem ermöglicht er eine Verallgemeinerung des Projektionssatzes in Hilberträumen (vgl. die Bemerkung nach dem Beweis). Der 2. Teil des Satzes liefert eine untere Schranke für den Minimalabstand bei der besten Approximation in unitären Räumen.

Satz 8.5
Sei $(X, \| \, \|)$ normiert, $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $x_0 \in X \setminus Y \implies$

1. $\exists\, f \in X^* : \; f\big|_Y = 0, \; f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y) := \inf\limits_{y \in Y} \|x_0 - y\|, \; \|f\| = 1\,.$
2. Für beliebige $f \in X^*$ mit $f\big|_Y = 0, \; \|f\| \leq 1$ gilt $|f(x_0)| \leq \operatorname{dist}(x_0, Y)\,.$

Beweis 1. Idee:

Konstruiere ein Funktional f_0 mit den gewünschten Eigenschaften auf dem Teilraum $X_0 = Y \oplus [x_0]$ und setze es dann zu f gemäß Satz 8.3 auf den ganzen Raum fort.

Für $z \in X_0$ ist $z = y + \alpha\, x_0, \; y \in Y, \; \alpha \in \mathbb{R}$, eine eindeutige Darstellung.

Definiere $f_0(z) := \alpha \operatorname{dist}(x_0, Y)$ und beachte $\operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$, da Y abgeschlossen.

$\implies$ f_0 linear in X_0, $f_0(y) = 0$ für $y \in Y$, $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ und $\|f_0\| \leq 1$, denn

$$|f_0(z)| = |\alpha| \underbrace{\inf_{\bar{y} \in Y} \|x_0 - \bar{y}\|}_{\operatorname{dist}(x_0, Y)} \leq |\alpha| \left\| x_0 + \frac{y}{\alpha} \right\| = \|y + \alpha\, x_0\| = \|z\| \implies \|f_0\| \leq 1\,.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0 \;\exists\, y \in Y : \; \|x_0 - y\| < \operatorname{dist}(x_0, Y) + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \implies \quad \operatorname{dist}(x_0, Y) \;&=\; f_0(x_0) \;=\; f_0(x_0) - \underbrace{f_0(y)}_{=\,0} \;=\; f_0(x_0 - y) \\ &\leq \|f_0\|\, \|x_0 - y\| < \|f_0\|\, (\operatorname{dist}(x_0, Y) + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\implies \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ gilt } \; \|f_0\| > \frac{\operatorname{dist}(x_0, Y)}{\operatorname{dist}(x_0, Y) + \varepsilon} \quad \xRightarrow[\varepsilon \to 0]{\operatorname{dist}(x_0, Y) > 0} \quad \|f_0\| \geq 1.$$

Die Fortsetzung von f_0 zu f gemäß Hahn-Banach liefert die Behauptung.

2) Für beliebiges $y \in Y$ gilt

$$|f(x_0)| \;=\; |f(x_0) - f(y)| \;=\; |f(x_0 - y)| \leq \|x_0 - y\|, \qquad \text{da } \|f\| \leq 1\,,$$

also auch $$|f(x_0)| \;\leq\; \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|\,.$$ ■

Bemerkung:

Teil 1) des Satzes kann als eine Verallgemeinerung des Projektionssatzes 5.6 in Hilberträumen aufgefaßt werden durch Angabe eines linearen Funktionals, das den Abstand eines Punktes zum approximierenden Teilraum (Minimalabstand) angibt. Ist nämlich X ein Hilbertraum, so definiere man

$$(*) \qquad f(x) := \left(x, \frac{x_0 - Px_0}{\|x_0 - Px_0\|} \right), \quad P : \; X \to Y \quad \text{orthogonale Projektion.}$$

Nach Satz 5.6 (Projektionssatz) ist $f(y) = 0$ auf Y, da $Y \perp x_0 - P(x_0)$. Wegen $Px_0 \in Y$ folgt

$$(**) \qquad f(x_0) = f(x_0 - Px_0) \overset{(*)}{=} \|x_0 - Px_0\|.$$

Aus $(*)$ folgt mit der CSU

$$|f(x)| \leq \|x\|, \quad \text{also } \|f\| \leq 1,$$

zusammen mit $(**)$ also $\|f\| = 1$. Also erfüllt f alle Eigenschaften des f aus Behauptung 1 des Satzes . Im Hilbertraum braucht man für diese Aussage keinen Hahn-Banach.

Aus Teil 2) des Satzes folgern wir

Satz 8.6 Dichtekriterium von Banach
Sei $(X, \| \|)$ normiert und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann gilt

$$[M] \text{ dicht in } X \iff \Big(f \in X^*,\ f\big|_M = 0 \implies f \equiv 0 \Big)$$

($[M]$ = Menge der endlichen Linearkombinationen der Elemente von M .)

Beweis „$\Longrightarrow$“
Sei $x \in X \setminus [M] \implies \exists\, \{x_n\} \subset [M]:\ x_n \longrightarrow x,\ f(x_n) = 0$, f gemäß Satz 8.5, 1).
f stetig liefert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x)$.

Beweis „$\Longleftarrow$“ Bezeichne $\overline{[M]}$ den Abschluß von $[M]$ bzgl. der Topologie von X.
Ann.: $\overline{[M]} \overset{\subset}{\neq} X \implies \exists\, x \in X \setminus \overline{[M]}$ und $\operatorname{dist}(x, \overline{[M]}) > 0$, da $\overline{[M]}$ abgeschlossen
$\xRightarrow{\text{Satz 8.5}} \exists\, f \in X^*:\ \|f\| = 1,\ f(x) = \operatorname{dist}(x, \overline{[M]}),\ f\big|_{\overline{[M]}} = 0$ **W!**. ■

Eine weitere Folgerung ist

Satz 8.7 Existenz linearer Funktionale mit vorgegebener Norm
Sei $(X, \| \|)$ normiert $\implies \forall\, x \in X,\ x \neq 0\ \exists\, f \in X^*:\ \|f\| = 1,\ f(x) = \|x\|$.

Beweis: Satz 8.5 mit $Y = \{0\}$. ■

Hinweis: Dieser Satz hat erstmals die Existenz linearer Funktionale in allgemeinen normierten Räumen gesichert. Spezialfälle waren natürlich schon immer bekannt.

Aus vorigem Satz erhält man die

Folgerung 8.8
Sei $(X, \| \, \|)$ normiert $\Longrightarrow$

1. $\|x\| = \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|$,
2. $f(x) = 0 \; \forall f \in X^* \quad \Longrightarrow \quad x = 0$,
3. $f(x_1) = f(x_2) \; \forall f \in X^* \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$,
4. $|f(x_0)| \le C \;\; \forall f \in X^*$ mit $\|f\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|x_0\| \le C$.

Beweis:
1) $\|x\| \le \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|$, klar wegen Satz 8.7.

Andererseits:
Ist $f \in X^*$, $\|f\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \le \|f\| \, \|x\| = \|x\| \quad \Longrightarrow \quad \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \le \|x\|$, also 1).

Weiter: Die Folgerungen 1) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3), 1) $\Longrightarrow$ 4) sind offensichtlich.

Bemerkung: Man kann also die Elemente eines Raumes mit Hilfe der stetigen linearen Funktionale auf diesem Raum charakterisieren.

Fazit: Lineare Funktionale sind ein machtvolles Werkzeug. In normierten Räumen übernehmen sie die Rolle der Skalarprodukte. Sie werden verwendet z.B.

1. zur Charakterisierung der Norm von Elementen (Folgerung 8.8),
2. zum Beweis von Trennungseigenschaften, zur Verallgemeinerung von Approximationsaussagen und
   zur Herleitung von Schranken für die Minimalabweichung (Satz 8.5),
3. zur Herleitung von Dichtekriterien Satz 8.6
4. zum Beweis von Existenzsätzen für die Lösung partieller Differentialgleichungen (vgl. S 125 ff),
5. bei der Untersuchung von „schwacher Konvergenz“ und Reflexivität (vgl. § 11).

Deshalb erscheint es wünschenswert zu wissen: Wieviele Funktionale hat ein Raum und wie sehen die aus? Wir untersuchen zunächst die

Dualräume unitärer Räume

Gesucht: Alle Funktionale eines unitären Raumes $(X, (\cdot,\cdot))$. Wir wissen: $\forall\, u \in X$ ist $f_u(x) := (x,u)$ ein lineares Funktional. Es ist

$$\begin{array}{rcccl} |f_u(x)| = |(x,u)| & \overset{\text{CSU}}{\leq} & \|x\|\,\|u\| & \Longrightarrow & \|f_u\| \leq \|u\| \\ |f_u(u)| = |(u,u)| & = & \|u\|\,\|u\| & \Longrightarrow & \|f_u\| = \|u\| \end{array}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcll} H: X & \longrightarrow & X^* & \\ u & \longrightarrow & f_u = (\cdot, u) & \text{ist eine Isometrie}\,. \end{array}$$

$H(\alpha\, u + \beta\, v) = \overline{\alpha}\, H(u) + \overline{\beta}\, H(v)$ (H antilinear, konjugiert linear)

$\Longrightarrow$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist H linear.

H ist injektiv, denn

$$H\,u_1 = H\,u_2 \iff f_{u_1} = f_{u_2} \iff (x,u_1) = (x,u_2)\; \forall\, x \in X \Longrightarrow u_1 = u_2\,.$$

Könnte man nun noch zeigen, daß H surjektiv ist, dann hätte man alle Funktionale.

Problem: Finde zu gegebenem $f \in X^*$, $f \neq 0$, ein $u \in X$: $f = f_u$.

$f \neq 0$ bedeutet $N(f) = \{x \in X,\ f(x) = 0\} \neq X$.

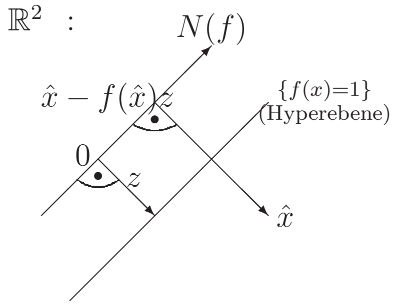
$N(f)$ ist abgeschlossen und damit vollständig, falls X vollständig.

Also setzen wir voraus: Sei X ein HR.

Dann ist $X = N(f) \oplus N(f)^\perp$ (vgl. Satz 5.7)

und $\exists\, z \in N(f)^\perp$ mit $f(z) \neq 0$. Œ $f(z) = 1$.

Idee:
Charakterisiere f mit Hilfe dieses z.



Sei $\hat{x} \in X$ beliebig, dann $\exists\, \gamma \in K$: $\hat{x} - \gamma\, z \in N(f)$.

(Wähle dazu $\gamma = f(\hat{x}) \Longrightarrow$
$f(\hat{x} - \gamma\, z) = f(\hat{x}) - \gamma\, \underbrace{f(z)}_{=1} = 0$)

Dann ist aber
$(\hat{x} - f(\hat{x})z, z) = 0, \quad (z \in N(f)^\perp)$

d.h. $0 = (\hat{x}, z) - f(\hat{x})\,(z,z)$,

oder $f(\hat{x}) = \left(\hat{x}, \dfrac{z}{(z,z)}\right)$.

Damit ist H eine injektive und surjektive Abbildung und wir haben den folgenden Satz bewiesen.

Satz 8.9 Darstellungssatz von Riesz
Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum.

$$\Longrightarrow \quad \forall\, f \in X^* \;\exists!\, u \in X : \; f(x) = (x,u) \;\forall\, x \in X\,.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{array}{rcccl} H & : & X & \longrightarrow & X^* \\ & & u & \longrightarrow & (\cdot, u) \end{array}$$

ist eine (antilineare) Isometrie.

Fazit: Jeder reelle oder komplexe Hilbertraum läßt sich mit seinem Dualraum „identifizieren".

Folgerung 8.10 Lineare Funktionale auf $L^2(B)$
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall\, f \in (L^2(B))^* \;\exists\, u \in L^2(B) : \quad f(x) &= \int_B x(t)\,\overline{u(t)}\,dt \\ \|f\| &= \left(\int_B |u|^2\,dt\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Aussagen für normierte Räume sind komplizierter. Wir zitieren ein Beispiel ohne Beweis:

Satz 8.11
$\forall\, f \in (L^p(B))^*$ mit $1 < p < \infty$ $\exists!\, u \in (L^q(B), \|\;\|_q)\,,\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 :$

$$f(x) = \int_B u(t)\,x(t)\,dt \qquad \text{und} \qquad \|f\| = \|u\|_{L^q(B)}$$

Insbesondere: $(L^p(B))^*$ ist normisomorph zu $L^q(B)$.

Daß f ein lineares Funktional ist, ist offensichtlich. Der Nachweis, daß alle linearen Funktionale auf $L^p(B)$ so darstellbar sind, ist aufwendiger.

Anwendung des Riesz'schen Darstellungssatzes auf Differentialgleichungen

Hilbertraum-Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen
Lax-Milgram Theorie

Die klassische Formulierung des Dirichlet-Problems für elliptische Differentialgleichungen lautet:

Klassisches Dirichletproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\,\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, seien gegebene, reellwertige Funktionen und es gebe ein $C_0 > 0$, sodaß

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \;\geq\; C_0|\xi|^2 \quad \forall\, x \in \Omega,\; \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(Elliptizität)}\,.$$

Gesucht: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, welches die elliptische RWA löst

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\,\partial_j\,u) \;&=\; f \quad \text{in} \quad \Omega \qquad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial\,x_i}\right), \\ u \;&=\; g \quad \text{auf} \quad \partial\,\Omega\,, \end{aligned}$$

Transformation auf homogene Randwerte

Dies wird erlauben, die Differentialgleichung in einem Raum einzubetten, dessen Elemente automatisch die (Null-) Randwerte erfüllen. Man braucht sich dann bei der Lösung der Differentialgleichung nicht mehr um die Annahme der Randbedingungen zu kümmern.

Wir nehmen an, daß die Randwertfunktion eine Fortsetzung $g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ besitzt (das kann man beweisen) und erhalten für $\tilde{u} := u - g$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\,\partial_j\,\tilde{u}) \;=\; -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\,\partial_j\,g) + f \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$e_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\partial_j\,g\,,$$

multiplizieren die Differentialgleichung mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und erhalten nach partieller Integration, indem wir wieder u statt $\tilde{u}$ schreiben,

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\,\varphi\,a_{ij}\,\partial_j\,u\,dx \;=\; -\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i\,\varphi\,e_i + \varphi\,f\right) dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt $\forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so erhält man nach Rückgängigmachen der partiellen Integration die ursprüngliche Differentialgleichung wieder zurück (vgl. die Übungen zu den Mittelfunktionen).

Einbettung in einen geeigneten Raum, schwache Lösung

Die Testfunktionen treten mit φ bzw. $\partial_i\,\varphi$ auf, die gesuchte Lösung mit $\partial_i\,u$. Als geeigneter Abschluß bietet sich also der Raum $H^{1,2}(\Omega)$, bzw. $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, an, denn die Elemente dieses Raumes besitzen alle Nullrandwerte (in einem schwachen Sinne), sodaß der Raum als Lösungsraum geeignet ist.

u heißt *schwache Lösung des Dirichletproblems* wenn $\quad u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega) \quad$ und

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i\,\varphi\,a_{ij}\,\partial_j\,u\,dx \;=\; -\int \left(\sum_{i=1}^n \partial_i\,\varphi\,e_i + \varphi\,f\right) dx \quad \forall\,\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Die folgenden Überlegungen gelten für $a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\;\; e_i, f \in L^2(\Omega)$.
Dies sind Abschwächungen der bisherigen Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften, jedoch, soweit es die e_i betrifft, zusätzliche Integrierbarkeitseigenschaften.

Grundidee der Vorgehensweise:

1. Wir zeigen, daß die linke Seite der Differentialgleichung ein Skalarprodukt $a(u,\varphi)$ in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ definiert, und
2. daß die dadurch induzierte Norm $\sqrt{a(u,u)}$ äquivalent ist mit $\|\;\|_{H^{1,2}(\Omega)}$.
   Dann ist $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $a(\;,\;)$.
3. Wir zeigen, daß die rechte Seite der Differentialgleichung eine stetige Linearform $F(\varphi)$ im Hilbertraum $\left(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\;,\;)\right)$ ist. Dann gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz genau ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, sodaß $a(u,\varphi) = F(\varphi)$. Dieses u ist dann schwache Lösung des Dirichletproblems.

zu 1) $\qquad a(v,w) \;:=\; \int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j} \partial_i\,v\,a_{ij}\,\partial_j\,w\,dx \quad$ ist ein Skalarprodukt in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$.

Die Linearität ist offensichtlich. Mit Hölder für $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ gilt mit einem $K>0$

$$|a(v,w)| \le \int\limits_\Omega \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} |\partial_i\,v|\,|\partial_j\,w|\,dx \le K\,\|v\|_{H^{1,2}(\Omega)}\|w\|_{H^{1,2}(\Omega)},$$

also die Existenz (und Stetigkeit) von $a(v,w)$.

Die Definitheit folgt aus dem Beweis des nächsten Lemmas.

zu 2) zeigen wir das

Lemma $\left(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\ ,\ )\right)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis:

$H^{1,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum, $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum, also auch ein Hilbertraum. Wir zeigen, daß die indudzierte Norm $\sqrt{a(u,v)}$ äquivalent ist zu $\|\ \|_{H^{1,2}(\Omega)}$. Dann ist auch $\left(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\ ,\ )\right)$ ein Hilbertraum.

Zu zeigen ist: es gibt Konstanten $0 < c < C < \infty$, sodaß

$$c\|u\|^2_{H^{1,2}} \ \leq \ a(u,u) \ \leq \ C\|u\|^2_{H^{1,2}} \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Beachte: Diese Ungleichungen besagen auch die Definitheit von $a(u,v)$.

Die rechte Abschätzung folgt mit der CSU aus der Definition von a.

$$a(u,u) \ \leq \ \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty}\, \|\partial_i\, u\|_{L^2}\, \|\partial_i\, u\|_{L^2} \ \leq \ C\|u\|^2_{H^{1,2}} \quad \text{für ein } C > 0.$$

Zum Beweis der linken Ungleichung beachten wir im 1. Schritt, daß die Elliptizität eine Abschätzung von $a(u,u)$ nach unten ermöglicht. Mit $|\operatorname{grad} u|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} |\partial_i\, u|^2$ folgt

(i) $a(u,u) \geq C_0 \int\limits_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\, dx$ („grad“ im schwachen Sinn, vgl. Definition 4.33).

In einem 2. Schritt schätzen wir $\|u\|^2_{H^{1,2}}$ nach oben ab durch $\int\limits_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\, dx$.

Mit $\partial_0\, u := u$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^{1,2}} &= \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\int |\partial_i\, u|^2\, dx}\right)^2 \\
&= \int |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2\, dx + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n} \sqrt{\int |\partial_i\, u|^2\, dx \int |\partial_j\, u|^2\, dx} \\
&\leq \int |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2\, dx + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n} \max\left(\int |\partial_i\, u|^2\, dx, \int |\partial_j\, u|^2\, dx\right) \\
&\leq \int |u|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2\, dx + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{n} \left(\int |\partial_i\, u|^2\, dx + \int |\partial_j\, u|^2\, dx\right).
\end{aligned}$$

Deshalb gibt es natürliche Zahlen $k_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$:

$$\|u\|^2_{H^{1,2}} \leq k_0 \int |u|^2\,dx + \sum_{i=1}^{n} k_i \int |\partial_i\, u|^2\,dx \leq \underbrace{\max k_i}_{k} \left(\int |u|^2\,dx + \int |\operatorname{grad} u|^2\,dx \right).$$

Kann man nun noch eine Abschätzung der Art

(ii) $$\int_\Omega |u|^2\,dx \ \leq \ \hat{c} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,dx$$ (*Poincarésche Ungleichung*)

zeigen, dann folgt mit der Konstanten k

$$\frac{1}{k}\|u\|^2_{H^{1,2}} \ \leq \ \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,dx \ \overset{\text{(ii)}}{\leq} \ (\hat{c}+1) \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \ \overset{\text{(i)}}{\leq} \ \frac{\hat{c}+1}{C_0}\, a(u,u)\,,$$

also die gewünschte Abschätzung mit $c = \dfrac{C_0}{k(\hat{c}+1)}$.

(ii) wird bewiesen in

Satz 8.12 Poincaré Ungleichung
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so gibt es ein $\hat{c} > 0$ (abhängig von Ω) mit

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \ \leq \ \hat{c} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,dx \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Beweis:
Die Ungleichung muß nur für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gezeigt werden. Wegen der Hölderschen Ungleichung und da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ ist (vgl. Definition 4.36), gilt sie dann auch in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$.

Da Ω beschränkt ist, existiert ein $k > 0$, sodaß für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \Omega$ gilt: $|x_i| \leq k \ \forall\, i$.

Nun erhält man durch partielle Integration für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. x_i:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2_{L^2} \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 \cdot 1\,dx \ = \ \left| \int_{\mathbb{R}^n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\varphi|^2\,dx \right| \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^n} |x_i|\, 2|\varphi \cdot \varphi_{x_i}|\,dx \\ &\leq \ 2k \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,|\varphi_{x_i}|\,dx \ \overset{\text{CSU}}{\leq} \ 2k\,\|\varphi\|_{L^2}\,\|\varphi_{x_i}\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|\varphi\|_{L^2} \ \leq \ 2k\|\varphi_{x_i}\|_{L^2} \quad \Longrightarrow \quad \|\varphi\|^2_{L^2} \ \leq \ (2k)^2\,\|\varphi_{x_i}\|^2_{L^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \exists\, \hat{c}: \ \|\varphi\|^2_{L^2} \ \leq \ \hat{c} \sum_i \|\varphi_{x_i}\|^2_{L^2} \ = \ \hat{c} \int_\Omega |\operatorname{grad} \varphi|^2\,dx\,. \qquad \blacksquare$$

zu 3) Existenz einer schwachen Lösung des Dirichletproblems

Es wird ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ gesucht mit

$$a(u,v) \;=\; F\,v \;:=\; -\int\limits_{\Omega} \left(\sum_i \partial_i\, v\, e_i + v\, f \right) dx \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es genau so ein u, falls F ein Element $\in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)^*$ ist. Dies trifft zu, da

$$\begin{aligned} |F\,v| \;&\overset{\text{Hölder}}{\leq}\; \sum_i \|\partial_i\, v\|_{L^2}\, \|e_i\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\, \|f\|_{L^2} \;\leq\; \left(\sum_i \|e_i\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \right) \|v\|_{H^{1,2}} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vgl. Beweis zu 2) wo } \|v\|_X = \sqrt{a(v,v)}}}{\leq}\; \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\sum_i \|e_i\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \right) \|v\|_X \end{aligned}$$

■

Mit Hilfe von Regularitätssätzen kann man unter geeigneten Voraussetzungen zeigen, daß u sogar starke Lösung ist.

Anmerkungen zum Dualraum von $C[a,b]$

Definition 8.13
Seien $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N},$ beliebige Zerlegungungen des Intervalls $[a,b]$.
Eine Funktion $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *von beschränkter Schwankung* (v.b.S) wenn gilt

$$\operatorname{Var}_a^b v \;:=\; \sup_{\substack{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \\ n\in\mathbb{N}}} \sum_{\nu=1}^{n} |v(t_\nu) - v(t_{\nu-1})| \;<\; \infty.$$

$\operatorname{Var}_a^b v$ heißt *totale Variation* von v in $[a,b]$.

Bekanntlich gilt (z.B. Riesz-Nagy): Jede Funktion v.b.S. läßt sich als Differenz zweier beschränkter, monoton nicht fallender Funktionen darstellen.

Daraus folgt (Aufgabe):

Eine Funktion f v.b.S. hat nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Nun zeigt man analog zum Existenzbeweis des Riemann'schen Integrals:

Definition und Satz 8.14
Ist $x \in C[a,b]$ und $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ v.b.S., so existiert das *Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int\limits_a^b x(t)\,dv(t) \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x\big(\tau_\nu^{(n)}\big)\left(v\big(t_\nu^{(n)}\big) - v\big(t_{\nu-1}^{(n)}\big)\right).$$

(Grenzübergang für beliebige Intervallzerlegungen $a \le t_0^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \le b$ mit $\max\limits_\nu \big|t_\nu^{(n)} - t_{\nu-1}^{(n)}\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, für jede Wahl von Zwischenpunkten $\tau_\nu^{(n)} \in \big[t_{\nu-1}^{(n)}, t_\nu^{(n)}\big]$.)

Die linearen Funktionale auf $(C[a,b], \|\;\|_\infty)$ werden beschrieben durch

Satz 8.15
In $(C[a,b], \|\;\|_\infty)$ gilt:

1. $\forall\, f \in C[a,b]^* \;\exists\, v[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ v.b.S. sodaß

$$(*) \qquad f(x) \;=\; \int\limits_a^b x(t)\,dv(t) \qquad \forall\, x \in C[a,b] \quad \text{und} \quad \|f\| \;=\; \operatorname{Var}_a^b v\,.$$

2. $C[a,b]^*$ ist vermöge $(*)$ normisomorph zum Raum $NBV[a,b]$ (d.h. normalisierte Funktionen v.b.S. auf $[a,b]$ für die gilt $v(a) = 0$ und $\lim\limits_{h\to 0+} v(t+h) = v(t)$ (rechtsseitig stetig)).

   $NBV[a,b]$ ist normiert durch $\|v\| = \operatorname{Var}_a^b\, v$.

Wir beweisen nur a). Für b) verweisen wir z.B. auf Bachmann-Narici p. 226 f. oder Alt S. 121, Ü 4.11.

Beweis a)

Beweisidee zur Konstruktion des Funktionals (mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach).
Sei $f \in C[a,b]^* \implies \exists$ Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $B[a,b]$ (beschränkte Funktionen) unter Erhaltung der Norm. f soll auf $x \in C[a,b]$ angewandt werden. Dazu wird $x \in C[a,b]$ geschickt durch Treppenfunktionen approximiert. Auf diese Darstellung wird $\tilde{f}$ angewendet. Danach wird der Grenzübergang von den Treppenfunktionen zur Funktion x vollzogen. Man erhält so eine Riemann-Stieltjes-Summe und damit auch die gesuchte Funktion v von beschränkter Schwankung.

Jedes $x \in C[a,b]$ (Œ $[a,b] = [0,1]$) ist gleichmäßig stetig, kann also wie folgt gleichmäßig durch Treppenfunktionen (die sind $\in B[a,b]$) approximiert werden:
Für

$$z_t(\tau) \;=\; \begin{cases} 1, & a \le \tau \le t \\ 0, & t < \tau \le b \end{cases}, \qquad t \in [a,b] \quad \text{ist} \quad z_t \in B[a,b]$$

und es gilt

$$x(t) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x\left(\frac{\nu}{n}\right) \Big(z_{\frac{\nu}{n}}(t) - z_{\frac{\nu-1}{n}}(t)\Big).$$

Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ gilt

$$f(x) \;=\; \tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x\left(\frac{\nu}{n}\right) \Big(\tilde{f}\big(z_{\frac{\nu}{n}}\big) - \tilde{f}\big(z_{\frac{\nu-1}{n}}\big)\Big).$$

Mit $v(t) \;:=\; \tilde{f}(z_t)$ erhält man hieraus

$$f(x) \;=\; \tilde{f}(x) = \;\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x\left(\frac{\nu}{n}\right) \left(v\left(\frac{\nu}{n}\right) - v\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\right) \;=\; \int_a^n x(t)\,dv(t).$$

Dies ist die Darstellung eines Stieltjen Integrals, falls $v(t)$ v.b.S.

Wir zeigen: $\quad v(t) \;:=\; \tilde{f}(z_t)$ ist v.b.S. und $\mathrm{Var}_a^b\, v = \|f\|$.

Für $a_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gilt mit $\varepsilon_\nu = \dfrac{|v(t_\nu) - v(t_{\nu-1})|}{v(t_\nu) - v(t_{\nu-1})}$ $\Big($bzw. $= 1$, falls $\dfrac{0}{0}\Big)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} |v(t_\nu) - v(t_{\nu-1})| \;&=\; \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu\big(v(t_\nu) - v(t_{\nu-1})\big) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu\big(\tilde{f}(z_{t_\nu}) - \tilde{f}(z_{t_{\nu-1}})\big)\\
&=\; \tilde{f}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu(z_{t_\nu} - z_{t_{\nu-1}})\right) \;\le\; \|\tilde{f}\| \left\|\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu(z_{t_\nu} - z_{t_{\nu-1}})\right\|\\
&\le\; \|f\| \cdot 1
\end{aligned}$$

wegen $\|\tilde{f}\| = \|f\|$, $|\varepsilon_\nu| = 1$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (z_{t_\nu} - z_{t_{\nu-1}}) = 1$ auf $[a,b]$. $\quad\Longrightarrow$

$(*)$ $\qquad f$ ist v.b.S. und $\mathrm{Var}_a^b\, v \le \|f\|$.

Schließlich gilt für Stieltjes Integrale, falls $x \in C[a,b]$:

$$|f(x)| \;=\; \left|\int_a^b x(t)\,dv(t)\right| \;\underset{\uparrow \text{ vgl. Definition 8.14}}{\le}\; \max_{t\in[a,b]} |x(t)|\ \mathrm{Var}_a^b\, v \quad\Longrightarrow\quad \|f\| \;\le\; \mathrm{Var}_a^b\, v$$

Zusammen mit $(*)$ also $\|f\| \le \mathrm{Var}_a^b\, v \le \|f\|$, d.h. $\|f\| = \mathrm{Var}_a^b\, v$. ■

Aus diesem Satz ergibt sich sofort die

Folgerung 8.16
Das lineare Funktional auf $(C[a,b], \| \, \|_\infty)$

$$f(x) \;=\; \int\limits_a^b x(t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \text{ (absolut) integrierbar}$$

hat die Norm $\qquad \|f\| \;=\; \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt\,.$

Beweis:
Schreibe f als Stieltjes Integral

$$\int\limits_a^b x(t)\,\varphi(t)\,dt \;=\; \int\limits_a^b x(t)\,dm(t) \quad \text{mit} \quad m'(t) = \varphi(t) \quad \text{(f.ü.)}\,,$$

und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der vorige Satz liefern:

$$\|f\| = \operatorname{Var}_a^b m = \sup \sum_{\nu=1}^n |m(t_\nu) - m(t_{\nu-1})| \overset{\text{MWS}}{=} \sup \sum_\nu |\varphi(\tilde t_\nu)|\,|t_\nu - t_{\nu-1}| = \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

■

Zur Konstruktion der Funktionale auf Quotientenräumen verweisen wir auf die Literatur (z.B. Wloka S. 99 f.). Wir geben, ohne Beweis, an wie man die linearen Funktionale auf Produkträumen erhält.

Satz 8.17
Seien $(X_i, \| \, \|_i)$ normierte Räume, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ der Produktraum mit einer der Normen

$$\|x\| \;=\; \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty,\;\; x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

bzw. $\qquad \|x\| = \max\limits_i \|x_i\|_i \qquad$ im Fall $p = \infty\,.$
Dann sind die Elemente von X^* gerade die Funktionale f mit

$$f(x) \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^n f_i(x_i)\,, \qquad f_i \in X_i^*, \quad x \in X, \quad x_i \in X_i$$

und es gilt

$$\|f\| \;=\; \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{wobei} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1,\;\; 1 < p < \infty,$$

bzw. $\quad \|f\| = \max\limits_{i=1,\cdots,n} \|f_i\|_i \quad$ für $p = 1 \quad$ und $\quad \|f\| = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_i$ für $p = \infty.$

Beweis: Z.B. Wloka S. 101 f. ■

Bemerkung:

1. Als Spezialfall erhält man die Darstellung der linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^n$ und die jeweils zugehörigen Normen.
2. Vgl. das Ergebnis mit Satz 8.10.
3. Man kann natürlich für die Räume auch andere Normen als die angegebenen zugrunde legen (z.B. gewichtete Normen) und erhält dann natürlich auch entsprechend abgewandelte lineare Funktionale.

§ 9 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Die folgenden Überlegungen wurden u.a. motiviert durch die Frage:

Unter welchen Voraussetzungen konvergieren Quadraturformeln (lineare Funktionale)? (vgl. dazu die Anwendung am Ende des Paragraphen)

Satz 9.1 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für stetige Funktionen

Sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum, $(Y, \| \|)$ normiert und $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty \quad \text{für jedes } x \in X \qquad \text{(punktweise beschränkt)} .$$

Dann gibt es eine Kugel $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset X$ sodaß $\sup\limits_{d(x,x_0) \leq \varepsilon} \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty$,

d.h. aus der punktweisen Beschränkung folgt die gleichmäßige Beschränkung auf einer Kugel.

Beweis:
Wir benutzen den *Baire'schen Kategoriensatz* (Satz 2.8) in der folgenden Formulierung:

Sei (X, d) vollständig und $X = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$, A_k abgeschlossen $\Longrightarrow \exists\, k_0$ mit $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$.

(Dies ist klar, andernfalls wäre X mager.)

Setze $A_k := \bigcap\limits_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X;\ \|f(x)\| \leq k\}$ (der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen).

Nach Voraussetzung bilden die A_k eine Überdeckung von X (punktweise Beschränktheit).

$$\xRightarrow{\text{Baire}} \quad \exists\, k_0 : \ \overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \sup_{x \in A_{k_0}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| \leq k_0 ,$$

und man kann eine Kugel $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset A_{k_0}$ wählen. ∎

Für lineare, stetige Abbildungen folgern wir daraus

Satz 9.2 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für lin. Abbildungen
Sei X ein Banachraum (normiert, vollständig) und $(Y, \| \|)$ normiert, sowie

$$(*) \qquad \mathcal{T} \subset L(X, Y) \text{ mit } \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| < \infty \quad \text{für jedes } x \in X$$

(d.h. punktweise beschränkt)

Dann folgt $\sup\limits_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$ (d.h. $\mathcal{T}$ in $L(X, Y)$ beschränkt).

Bemerkung: $\mathcal{T}$ in $L(X,Y)$ beschränkt, bedeutet $\mathcal{T}$ ist gleichgradig stetig.
(vgl. Definition 6.5)

Beweis:
Durch $f_T(x) := \|Tx\|$ für $T \in \mathcal{T},\ x \in X$, sind Funktionen $f_T \in C^0(X,\mathbb{R})$ definiert, und $\mathcal{F} := \{f_T;\, T \in \mathcal{T}\}$ ist punktweise beschränkt (vgl. Satz 9.1).

Also gibt es eine Kugel $\overline{K_\varepsilon(x_0)}$ und ein $C < \infty$ mit $\|Tx\| \le C$ für $T \in \mathcal{T}$ und $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ (d.h. $x \in \overline{K_\varepsilon(x_0)}$).

Dann folgt für alle $T \in \mathcal{T}$ und alle $x \neq 0$

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\left\|\underbrace{T\left(x_0 + \varepsilon\,\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\le C} - \underbrace{T(x_0)}_{\le C}\right\| \le \frac{\|x\|}{\varepsilon}\cdot 2C\,, \quad \text{d.h. } \|T\| \le \frac{2C}{\varepsilon}\ \forall T \in \mathcal{T}.\ \blacksquare$$

Folgerung:
Sei $(X, \|\ \|)$ ein Banachraum und $(Y, \|\ \|)$ normiert, $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ eine Folge, die auf X punktweise gegen eine Abbildung A konvergiert, d.h.
$\forall\, x \in X\ \exists\, Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x\,.$

$\Longrightarrow \quad A \in L(X,Y)$ und $\|A\| \le \liminf \|A_n\| < \infty\,.$

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 9.3 Banach-Steinhaus
Seien $(X, \|\ \|)$ und $(Y, \|\ \|)$ Banachräume und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$, dann gilt:

$$\forall x \in X \exists\, Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \wedge A \in L(X,Y) \iff \begin{cases} 1)\ \exists\, M > 0:\ \|A_n\| \le M\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ 2)\ \{A_n x\} \text{ ist CF } \ \forall\, x \in D,\ \overline{D} = X \end{cases}$$

Bemerkungen

1. Auch Satz 9.2 wird als Satz von Banach-Steinhaus zitiert. Er liefert die Beweisrichtung „ $\Longrightarrow$ “ von Satz 9.3. Für diese Richtung ist die Vollständigkeit von Y nicht nötig.
2. Zum Beweis von Satz 9.3 muß also nur noch die Richtung „ $\Longleftarrow$ “ gezeigt werden. Der Beweis wird zeigen, daß hierfür die Vollständigkeit von X nicht nötig ist.
3. Die Voraussetzung $A \in L(X,Y)$ in Satz 9.3 ist schon durch die obige Folgerung als erfüllt nachgewiesen.

Beweis „$\Longleftarrow$“:
$\forall\, x \in X \wedge \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x' \in D:\ \|x - x'\| < \varepsilon\ \wedge\ \|A_n x' - A_m x'\| < \varepsilon\ \forall\, n, m > N$.

Da Y vollständig ist, genügt es zu zeigen: $\forall\, x \in X$ ist $\{A_n x\}$ CF.

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\le \|A_n x - A_n x'\| + \|A_n x' - A_m x'\| + \|A_m x' - A_m x\| \\ &\le \|A_n\|\varepsilon + \varepsilon + \|A_m\|\varepsilon \\ &\le (\|A_n\| + \|A_m\|)\varepsilon + \varepsilon \le (2M+1)\varepsilon\,. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung: Neben der Anwendung auf Quadraturformeln, die gleich beschrieben wird, spielt der Satz auch eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Eigenschaften der schwachen Topologie (vgl. § 11).

Anwendung auf die Konvergenz von Quadraturformeln

Sei $X = C_{\mathbb{R}}[a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, dann hat eine Quadraturformel zur Berechnung von $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$ die Gestalt

$$(*) \qquad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\, x(t_k^{(n)}) \quad \text{wobei} \quad a \le t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \le b\,.$$

Dann liefern der Satz von Weierstraß (Polynome dicht in $C[a,b]$) und der Satz von Banach-Steinhaus:

Satz 9.4
Die Quadraturformeln f_n (gemäß $(*)$) konvergieren genau dann für jede stetige Funktion x, wenn gilt:

1. $\sum_{k=1}^{n} |a_k^{(n)}| \le M < \infty,\ n = 1, 2, \ldots$ (vgl. § 7, Beispiel 2)).
2. Die f_n konvergieren für jedes Polynom.

Gilt $a_k^{(n)} \ge 0$ für alle k, n, so ist wegen

$$b - a = \int_a^b 1\,dt \overset{2)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k^{(n)}|$$

die Bedingung 1. überflüssig.

Beachte: Betrachtet man die reine Interpolationsquadratur, so ist

$$a_k^{(n)} \ge 0 \qquad \forall\, k, n \quad \text{nicht erfüllt (vgl. Wloka)}\,.$$

Für die Gauß'schen Formeln ist diese Bedingung erfüllt (vgl. Wloka, S. 133 ff.). Es gilt sogar $f_n(p) = f(p)$ für alle Polynome vom Grad $\le 2n - 1$.

Der Satz von Banach-Steinhaus gehört zu den zentralen Sätzen der Funktionalanalysis. Er findet Anwendungen u.a. bei

- Summationsverfahren bei Reihen (Kantorowitsch/Akilow, S. 216),
- Fourier-Reihen (Kant. Akilow, S. 209, Werner Kap IV),
- Differenzenverfahren für AWAn (z.B. Ansorge-Hass: Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare AWAn, Springer 1970; Äquivalenzsatz von Lax),
- Beschreibung der schwachen Topologie (vgl. § 11).

§ 10 Der Satz von der offenen Abbildung

Homomorphiesatz von Banach

Der folgende Satz wird motiviert durch die Frage nach der stetigen Abhängigkeit einer Lösung x^* der Gleichung $Ax = y$ von der rechten Seite y. Existiert ein Lösungsoperator A^{-1}, der auf dem ganzen Bildraum von A definiert ist, so hängt die Lösung stetig von der rechten Seite ab, wenn A^{-1} stetig ist, d.h. wenn A offen ist.

Definition 10.1 Offene Abbildung
Sind X, Y metrische Räume, so heißt $f : X \to Y$ offen, falls:
U offen in $X \quad\Longrightarrow\quad f(U)$ offen in Y.

In normierten Räumen gilt folgende Charakterisierung:

Lemma 10.2 Charakterisierung offener linearer Abbildungen
$(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$, $A : X \overset{\text{lin}}{\longrightarrow} Y$, dann gilt

$$A \text{ offen} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ K'_\delta(0) \subset A(K_\varepsilon(0))$$

(K bzw. K' bezeichnen offene Kugeln in X bzw. Y.)

Beachte: Falls A^{-1} existiert, ist dies genau die Stetigkeitsdefinition für A^{-1} .

Beweis
„$\Longrightarrow$“:
Erinnerung: In linearen Räumen kann man sich auf Nullumgebungen beschränken.
$K_\varepsilon(0)$ offen $\Longrightarrow$ $A(K_\varepsilon(0))$ offen $\wedge$ $0 \in A(K_\varepsilon(0))$ $\Longrightarrow$ $\exists\, K'_\delta(0) \subset A(K_\varepsilon(0))$.

„$\Longleftarrow$“ $\quad U \subset X$ offen $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \in U\ \exists\, K_\varepsilon(x) \subset U$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad A(U) \supset A(K_\varepsilon(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{lin.top.}\\ \text{Raum}}}{=} A(x + K_\varepsilon(0)) &= Ax + A(K_\varepsilon(0)) \quad \text{und nach Vor.}\\ &\supset Ax + K'_\delta(0)\\ &= K'_\delta(Ax).\end{aligned}$$

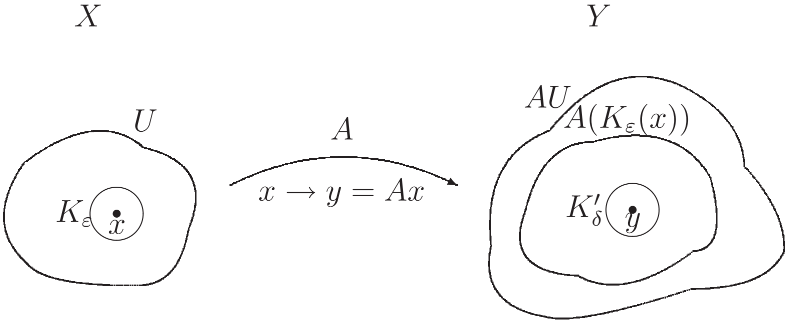
Wir haben damit

$$\forall\, Ax \in A(U)\ \exists\, K'_\delta(Ax) \subset A(U),$$

d.h. $A(U)$ ist offen. ■

Durch eine Skizze verdeutlichen wir die

geometrische Anschauung



Da X, Y lineare topologische Räume, wähle Œ $x = y = 0$.

Satz 10.3 Homomorphiesatz von Banach, Satz von der offenen Abbildung

Seien $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ Banachräume und $A \in L(X, Y)$, dann gilt

$$A \text{ surjektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ offen}$$

Bemerkung:
„A offen“ bedeutet: Wenn die Umkehrabbildung existiert, ist sie stetig.

Wir betrachten in diesem Beweis nur offene Kugeln $K'_s \subset Y$, $K_\delta \subset X$ um den Nullpunkt, den wir in der Bezeichnung unterdrücken.

Beweis „$\Longrightarrow$“: Ziel: Nachweis der Eigenschaft aus Lemma 10.2.

1) Wir zeigen zunächst $\forall \delta > 0 \ \exists s > 0 : \ K'_s \subset \overline{A(K_\delta)}$.

Beachte hierzu:
Ohne den Querstrich wären wir nach Lemma 10.2 schon fertig.

Da Kugeln absorbierend sind ($\forall x \in; \exists n \in \mathbb{N} : x \in nK_r$), gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n K_r \quad \forall r > 0$.

Daraus folgt, da A surjektiv ist und Y abgeschlossen (als Banachraum)

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n K_r\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n A(K_r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{n A(K_r)}.$$

Nach dem Satz von Baire (er benötigt, daß Y vollständig und $\overline{A(K_r)}$ abgeschlossen ist) folgt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \overset{\circ}{\overline{n_0 A(K_r)}} \neq \emptyset, \text{ also auch } \overset{\circ}{\overline{A(K_r)}} \neq \emptyset. \qquad \Longrightarrow$$

(10.1) $\quad \exists y \in \overline{A(K_r)} \wedge \exists s > 0 : \ y + K'_s \subset \overline{A(K_r)} \quad (y + K'_s$ ist Umgebung von $y)$.

(10.2) $$\text{Mit } y \in \overline{A(K_r)} \text{ist auch } -y \in \overline{A(K_r)},$$

$$\text{denn:} \quad \exists\, x_i \in K_r : \quad Ax_i \to y$$

$$\xRightarrow{K_r \text{ kreisförmig}} \quad -x_i \in K_r \quad \Longrightarrow \quad A(-x_i) = -A(x_i) \in A(K_r)$$

$$\Longrightarrow -Ax_i \to -y \in \overline{A(K_r)}\,.$$

$$\Longrightarrow \; K_s' \overset{(10.1)}{\subset} -y + \overline{A(K_r)} \overset{(10.2)}{\subset} \overline{A(K_r)} + \overline{A(K_r)} \subset \overline{A(K_{2r})}\,, \quad \text{weil } \overline{N} + \overline{M} \subset \overline{N+M}\,.$$

Setze $2r = \delta$.

2) Im 2. Schritt zeigen wir:

(10.3) $$\text{Zu } 0 < \tilde{\delta} < \delta \;\exists\, s_1 > 0 : K_{s_1}' \subset A(\overline{K_{\tilde{\delta}}}).$$

Dies genügt zum Beweis der Behauptung, denn wegen $\overline{K_{\tilde{\delta}}} \subset K_\delta$, also $A(\overline{K_{\tilde{\delta}}}) \subset A(K_\delta)$, ist dann nach Lemma 10.2 die Behauptung des Satzes bewiesen.

Beweis (10.3): Aus Schritt 1) folgt:

(10.4) $$\text{Zu } r_\nu = \tilde{\delta}\, 2^{-\nu} \;\exists\, s_\nu > 0 : \; K_{s_\nu}' \subset \overline{A(K_{r_\nu})}.$$

$$OE\; s_\nu \le \frac{s_{\nu-1}}{2}, \text{ also } s_\nu \le s_1\, 2^{-\nu},$$

denn durch eine etwaige Verkleinerung von s_ν bleibt (10.4) richtig.

Für beliebiges $y_0 \in K_{s_1}'$ konstruieren wir eine CF $\{\tilde{x}_\nu\} \subset K_{\tilde{\delta}}$ mit $\tilde{x}_\nu \in K_{r_\nu} (\subset K_{\tilde{\delta}})$ und $A\tilde{x}_\nu \to y_0$.

Dies genügt zum Beweis der Behauptung, denn da X vollständig ist, folgt hieraus

$$\tilde{x}_\nu \to x_0 \in \overline{K_{\tilde{\delta}}} \xRightarrow{A \text{ stetig}} y_0 = Ax_0 \in A(\overline{K_{\tilde{\delta}}}) \implies K_{s_1}' \subset A(\overline{K_{\tilde{\delta}}}) \overset{\tilde{\delta}<\delta}{\subset} A(K_\delta).$$

Konstruktion der Folge unter Beachtung von $A(K_{r_\nu})$ dicht in $\overline{A(K_{r_\nu})}$.

Zu $y_0 \in K_{s_1}' \overset{(10.4)}{\subset} \overline{A(K_{r_1})} \;\; \exists\, x_1 \in K_{r_1},\; Ax_1 \in A(K_{r_1}) : \; \|y_0 - Ax_1\| \le s_2 \le s_1/2.$

Zu $y_0 - Ax_1 \in K_{s_2}' \overset{(10.4)}{\subset} \overline{A(K_{r_2})} \;\; \exists\, x_2 \in K_{r_2},\; Ax_2 \in A(K_{r_2}) :$

$$\|(y_0 - Ax_1) - Ax_2\| \le s_3 \le s_2/2.$$

usw.

Man erhält also eine Folge $\{x_\nu\}$, $x_\nu \in K_{r_\nu}$ mit

$$\|y_0 - A\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)\| \le s_{n+1} \le s_1\, 2^{-n}.$$

Hieraus folgt $y_0 - A\tilde{x}_n \to 0$, und die Konvergenz der Teilsummenfolge $\tilde{x}_n := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ gegen ein $x_0 \in \overline{K_{\tilde{\delta}}}$ ergibt sich aus dem Majorantenkriterium

$$\|\tilde{x}_n\| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\| \;\le\; \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\delta}\, 2^{-\nu} < \tilde{\delta} \qquad \forall n \quad \text{(geometrische Reihe)}.$$

Beweis „$\Longleftarrow$“: Zeige: A surjektiv, d.h. $Y \subset A(X)$.

Nach Lemma 10.2 gilt: $\forall\,\eta > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 : \;\; K'_\delta(0) \subset A(K_\eta(0))$.
Kugeln sind absorbierend: $\forall\,y \in Y \;\exists\; n \in \mathbb{N} : \;\; y \in nK'_\delta(0) \;\;\Longrightarrow\;\; Y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nK'_\delta(0)$.
Damit folgt die Behauptung aus $nK'_\delta(0) \;\subset\; nA(K_\eta(0)) \;=\; A(K_{n\eta}(0))$. ■

Anwendungsbeispiel:
Stetige Abhängigkeit der Lösung einer Randwertaufgabe von der rechten Seite der Differentialgleichung

Seien

$$X =\{x \in C^2[a,b] : \;\; x(a) = x(b) = 0\}, \quad \|x\|_{C^2} = \max_{\substack{t\in[a,b]\\ i=0,1,2}} |x^{(i)}(t)|$$

$$Y =(C[a,b], \;\|\;\|_\infty).$$

X ist ein linearer Raum, da die Randwerte homogen sind.

Sei $A : X \to Y$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) = (Ax)\,(t) = \;\; & a_0(t)\,x''(t) + a_1(t)\,x'(t) + a_2(t)\,x(t) \\ & (a_0, a_1, a_2 \in C[a,b]) \end{aligned}$$

A ist linear und stetig, denn $\|Ax\| \le \max\limits_{\substack{t\in[a,b]\\ i=0,1,2}} |a_i(t)| \cdot \|x\||_{C^2}$.

Besitzt nun die RWA

$$(Ax)\,(t) \;\;=\;\; y(t), \qquad x(a) \;\;=\;\; x(b) \;\;=\;\; 0$$

für jedes $y \in C[a,b]$ eine eindeutig bestimmte Lösung (d.h. $AX = Y$ und $\exists\,A^{-1}$), so ist A^{-1} stetig und eine kleine Störung der rechten Seite $y(t)$ zieht nur eine kleine Störung der Lösung und ihrer beiden Ableitungen (C^2-Norm) nach sich. Dies ist für die Numerik wichtig, da auf Grund von Rundungsfehlern immer Störungen auftreten.

Die Vorgabe homogener Randwerte bedeuet keine Einschränkung, denn
ist $x(a) = y_a,\; x(b) = y_b$, so hat mit $g(t) = y_a + \dfrac{y_b - y_a}{b-a}$ die Funktion
$\tilde{x}(t) = x(t) - g(t)$ homogene Randwerte und man betrachtet die Differentialgleichung für $\tilde{x}(t)$, deren Koeffizienten wieder stetige Funktionen sind.

Eine Folgerung aus dem Homomorphiesatz ist der

Satz vom abgeschlossenen Graphen

Bei vielen Anwendungen erhält man Operatoren, die nicht stetig sind, jedoch eine etwas schwächere Bedingung erfüllen, nämlich die Abgeschlossenheit.

Definition 10.4
Seien $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ normiert und $D \subseteq X$ ein (Unter-) Vektorraum.

1. $A : D \to Y$ heißt *graphenabgeschlossen*, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:
   (a) Der Graph $G := \{(x, Ax) : x \in D\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$ (vgl.dazu Satz 4.16).
   (b) Aus
   $$\left.\begin{array}{rcll} D \ni x_n & \longrightarrow & x & \text{in } X \\ Ax_n =: y_n & \longrightarrow & y & \text{in } Y \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x \in D \text{ und} \\ Ax = y\,. \end{array}\right.$$
2. $A : X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, falls gilt
   $$M \subset X \text{ abgeschlossen } \Longrightarrow AM \text{ abgeschlossen.}$$

Bemerkungen
Zu 1.: Die Äquivalenz $(a) \iff (b)$ ist offensichtlich.
Zu 2.: Ist A abgeschlossen und existiert A^{-1}, so ist A^{-1} stetig.

Die beiden Begriffe *graphenabgeschlossen* und *abgeschlossen* sind nicht äquivalent, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$D = X = Y = \mathbb{R}, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Da $(\mathbb{R}, f(\mathbb{R}))$ abgeschlossen ist, ist f graphenabgeschlossen, aber nicht abgeschlossen, denn
$$f\big([1, \infty) \big) = (0, 1]\,.$$

Vorsicht beim Literaturstudium: Die beiden Begriffe werden gelegentlich synonym verwendet.

Man sieht: **Jede stetige Abbildung ist graphenabgeschlossen**
(die Voraussetzung $y_n \to y$ in Y kann dann entfallen).

Die Umkehrung ist jedoch i.allg. nicht richtig.

Beispiele für graphenabgeschlossene Abbildungen sind viele Differentialoperatoren.Wir behandeln nur das einfachste

Beispiel:

$$X = \Big(C^1[a,b],\ \| \|_\infty\Big), \quad Y = \Big(C[a,b],\ \| \|_\infty\Big)$$
$A : X \to Y$, $(Ax)(t) = x'(t)$ ist nicht stetig (vgl. Übungen, Aufgabe 3).

A ist jedoch graphenabgeschlossen, denn nach einem bekannten Satz der Analysis gilt für Funktionen aus $C^1[a,b]$:

> Konvergiert $x_n \to x$ gleichmäßig und $x_n' \to z$ gleichmäßig, dann können Differentiation und Grenzwertbildung vertauscht werden und es gilt $x' = z$.

Die Umkehrung gilt jedoch, wenn X und Y Banachräume sind und A linear ist, wie der folgende Satz zeigt, den wir mit Hilfe des Homomorphiesatzes beweisen.

Satz 10.5 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Sind $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ Banachräume, so gilt für $A: X \xrightarrow{\text{linear}} Y$,

$$A \text{ graphenabgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ stetig}$$

Beweis „$\Longleftarrow$“: trivial

Beweis „$\Longrightarrow$“: Idee: Setze A aus stetigen Abbildungen zusammen.

$$X \xrightarrow{g} G_A := (X, AX) \xrightarrow{v} AX, \quad A = v \circ g.$$

1. Die Projektionen u, v sind stetig

$$X \times Y \xrightarrow{v} Y$$
$$X \times Y \xrightarrow{u} X$$

   denn z.B.: Ist $U \subset X$ offen $\Longrightarrow$ $u^{-1}(U) = U \times Y$ und diese Menge ist offen.

2. Zeige g ist stetig.

   $X \times Y$ ist BR (vgl. Satz 4.16)

   $X \times AX$ ist laut Voraussetzung ein abgeschlossener Teilraum, also auch BR .

   Die Abbildung

$$\tilde{u} = \text{Restr.}, \ u\big|_{G_A} \quad \tilde{u}: \ X \times AX \longrightarrow X,$$

   ist linear, stetig, surjektiv, bijektiv, also existiert $\tilde{u}^{-1}$ und $\tilde{u}^{-1} = g$ ist nach dem Homomorphiesatz stetig. ■

Bemerkung: Der Satz findet Anwendung z.B. bei Summierbarkeitsmethoden (vgl. Werner: Kap. IV.4)

§ 11 Ein „schwacher“ Paragraph

Schwache Topologie, schwache Konvergenz, schwache Kompaktheit, Reflexivität

In vielen Anwendungen erweist sich die Normkonvergenz als zu restriktiv, deshalb werden schwächere Konvergenzbegriffe (*schwache Konvergenz*) eingeführt. Dies schließt eine Lücke, die der Satz von Bolzano-Weierstrass in unendlich dimensionalen Räumen hinterläßt (Existenz einer (Norm-) konvergenten Teilfolge einer beschränkten Folge). Wir werden folgenden Satz beweisen. (vgl. Heuser, Satz 27.1)

Satz
Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Mit Hilfe der schwachen Konvergenz lassen sich z.B. Minimumprobleme unter schwächeren Voraussetzungen lösen.

Definition 11.1
Sei $(X, \| \, \|)$ ein normierter Raum. Die Topologie $\mathcal{T}_w$, die auf X die erzeugt wird von der Menge

$$\mathcal{S} = \{f^{-1}(N); \ N \text{ offen im Zahlkörper } \mathbb{K}, \ f \in X^*\},$$

heißt *schwache Topologie* (*weak topology*).

Bezeichnung: $\mathcal{T}_w = \mathcal{T}(X, X^*)$: Die von X^* auf X erzeugte Topologie.

Bemerkungen:

1. Alle Eigenschaften der Topologie $\mathcal{T}_w$ werden „schwach“ genannt (schwach offen, schwach kompakt usw.).
2. Erinnerung: Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie (vgl. S. 14) enthält neben den Mengen von $\mathcal{S}$ endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen dieser Mengen, sowie die leere Menge und den ganzen Raum.
3. Offensichtlich gilt: $\mathcal{T}_w$ ist die gröbste Topologie bzgl. der alle $f \in X^*$ stetig sind, denn sie ist die gröbste Topologie, die als offene Mengen zumindest alle Urbilder offener Mengen unter den linearen stetigen Funktionalen $f \in X^*$ enthält.
4. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß in dieser Vorlesung mit L^* die Menge der linearen und stetigen Funktionale bezeichnet wird, (wie z.B. im Funktionalanalysisbuch von Pflaumann-Unger. Im Buch von Heuser wird genau umgekehrt bezeichnet, also mit L' die linearen und stetigen Funktionale und mit L^* die (algebraisch) linearen Funktionale, also **Vorsicht beim Literaturstudium**.)

Satz 11.2
$(X, \|\ \|)$ sei normiert $\Longrightarrow$

1. $(X, \mathcal{T}_w)$ ist ein Hausdorff-Raum (d.h. erfüllt das Hausdorff-Trennungsaxiom).
2. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ ist $\mathcal{T}_w$-konvergent (*schwach konvergent*) gegen ein $x \in X$ (Bezeichnung: $x_n \rightharpoonup x$)
$$\Longleftrightarrow \ f(x_n) \to f(x) \ \forall f \in X^* \text{ (Konvergenz. bzgl. der Metrik in } \mathbb{K}\text{).}$$
3. Normkonvergenz $\overset{\Longrightarrow}{\underset{\not\Longleftarrow}{}}$ schwache Konvergenz

Beweis 1)

Seien $x, y \in X,\ x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \|x-y\| > 0 \xrightarrow{\text{Hahn-Banach, Satz 8.7}}$

$\exists f \in X^*$ mit $f(x-y) = \|x-y\| > 0$, also $f(x) \neq f(y)$.

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|f(x) - f(y)| \implies f^{-1}\big(K_\varepsilon(f(x))\big) \cap f^{-1}\big(K_\varepsilon(f(y))\big) = \emptyset$,
d.h. $\exists$ disjunkte Umgebungen von x und y (Hausdorff).

Beweis 2) „$\Longrightarrow$“
Erinnerung: Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ konvergiert gegen ein $x_0 \in X$ bzgl. $\mathcal{T}$ genau dann wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x_0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ x_n \in U \quad \forall n \geq n_0$.
Die $f^{-1}\big(K_\varepsilon(f(x))\big)$ sind laut Definition die offenen Mengen in $\mathcal{T}_w$. Sie bilden eine Basis der offenen Mengen.
Damit bedeutet $x_n \rightharpoonup x$

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall f \in X^* \ \exists n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N} : \ x_n \in f^{-1}\big(K_\varepsilon(f(x))\big) \qquad \forall n \geq n_0$$
$$\Updownarrow$$
$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Beweis 2) „$\Longleftarrow$“
Zeige: Zu $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}_w}(x)\ \exists n_0 :\ x_n \in U\ \forall n \geq 0$.

Sei $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}_w}(x)$, d.h.

$U \supset \bigcap\limits_{i=1}^{m} f_i^{-1}(N_i) \ni x,\ f_i \in X^*,\ i = 1, \ldots, m,\ \ N_i \subset \mathbb{K}$ offene Mengen mit $f_i(x) \in N_i$.

Laut Voraussetzung: gilt $f_i(x_n) \to f_i(x)$ für $i = 1, \ldots, m$;
N_i ist Umgebung von $f_i(x)$, also folgt

Zu $N_i \quad \exists n_0(i) \in \mathbb{N} :\ f_i(x_n) \in N_i \quad \forall n \geq n_0(i)$;

setze $n_0 := \max\limits_{i=1,\ldots,m} n_0(i) \implies f_i(x_n) \in N_i\ \forall n \geq n_0, \quad i = 1, \ldots, m$

$$\Longrightarrow \ x_n \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(N_i) \subset U \quad \forall n \geq n_0\,,$$

d.h. $\mathcal{T}_w$-konvergent.

Beweis 3) „$\Longrightarrow$“
Aus $|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n - x)| \leq \|f\| \, \|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt die Behauptung.

Beweis 3) „$\not\Longleftarrow$“
Das Skalarprodukt in ℓ_2 ist für $a, b \in \ell_2$ durch $(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \, \bar{b}_i$ erklärt. Die Einheitselemente $e^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell_2$ erfüllen $\|e^n - e^m\| = \sqrt{2} \quad \forall \, n \neq m$.

$\Longrightarrow$ $\{e^n\}$ ist keine CF bzgl. der Norm,

aber: $\forall \, h^* \in \ell_2^* \; \exists ! \, h \in \ell_2 : h^*(x) = (x, h)$ (Satz von Riesz 8.9) und
$(e^n, h) = \bar{h}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ laut Definition der Elemente $\in \ell_2$, also $e_n \rightharpoonup 0$. ■

Bemerkungen:

1. In $(X, \| \ \|)$ ist $P := \{p_f; \ f \in X^*, \ p_f(x) := |f(x)| \ \forall \, x \in X\}$ eine Familie von Halbnormen. Sie erzeugt eine lokalkonvexe Topologie (vgl. Satz 3.11). Diese Topologie ist Hausdorff'sch, denn
$\forall \, x \in X, \ x \neq 0 \ \exists \, f \in X^* : \ |f(x)| = \|x\| = p_f(x) \neq 0$ (Sätze 8.7 und 3.11, 2.).
Der zugehörige Konvergenzbegriff ist der der punktweisen Konvergenz unter allen Funktionalen (vgl. S. 37, Beispiel 2 und Satz 3.12), d.h.
$$x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x) \qquad \text{(also die schwache Konvergenz)}\,.$$
Diese lokalkonvexe Topologie ist gerade die schwache Topologie (Aufgabe).
2. Man kann zeigen
$$(X, \| \ \|), \ \dim X < \infty \quad \Longrightarrow \quad \text{Normtopologie} = \text{schwache Topologie} \quad \text{(Aufgabe)}$$
3. Es gibt auch ∞-dimensionale Räume, in denen schwache $=$ starke Konvergenz gilt (z.B. ℓ_1 : Aufgabe).

Wir haben bereits den Begriff der Normkonvergenz auf X^* eingeführt (vgl. Satz und Definition 7.2). Danach ist $X^* = L(X, \mathbb{K})$ ein Banachraum. Bildet man den

$$\textit{Bidualraum} \qquad X^{**} = (X^*)^*,$$

so kann man mit seiner Hilfe auf X^* eine schwache Topologie und damit einen Konvergenzbegriff einführen. X^{**} ist (als Dualraum von X^*) ebenfalls ein Banachraum.

Definition 11.3
Ist $(X, \| \, \|)$ ein normierter Raum, so wird durch $\mathcal{T}(X^*, X^{**})$ die *schwache Topologie auf* X^* definiert.

Damit diese Definition vernünftig wird, muß man X^{**} kennen. Dies ist in Spezialfällen der Fall. Zunächst kann man leicht einige Elemente von X^{**} angeben.

Ist $x \in X$ ein festes Element und

$$\begin{aligned} u_x \,:\, X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longrightarrow u_x(f) \,:=\, f(x)\,, \end{aligned}$$

so ist $u_x \in X^{**}$. Die Linearität ist klar und die Stetigkeit folgt aus

$$|u_x(f)| \;=\; |f(x)| \;\leq\; \|x\|\,\|f\|, \qquad \text{also} \quad \|u_x\| \;\leq\; \|x\|\,.$$

Offensichtlich erhält man hier eine Beziehung zwischen X und X^{**}. Es gilt

Satz 11.4
Ist $(X, \|\;\|)$ ein normierter Raum, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} J \,:\, X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longrightarrow J(x) \,:=\, u_x \quad (\text{wo } u_x(f) \,=\, f(x) \quad \forall\, f \in X^*) \end{aligned}$$

ein Normisomorphmus von X auf $J(X) \subset X^{**}$.

J heißt *kanonische Abbildung.*

Beweis:
J ist injektiv, denn

$$J(x_1) = J(x_2) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x_1) = f(x_2)\ \forall\, f \in X^* \quad\Longrightarrow\quad x_1 = x_2 \quad (\text{Folgerung } 8.8)\,.$$

J ist linear, denn

$$\begin{aligned} J(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2)\,(f) \;=\; u_{\alpha\, x_1 + \beta\, x_2}(f) \;&=\; f(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) \;=\; \alpha\, f(x_1) + \beta\, f(x_1) \\ &=\; \alpha\, J(x_1) + \beta\, J(x_2)\,. \end{aligned}$$

$|J(x)\,(f)| \leq \|x\|\,\|f\|$ wurde schon gezeigt, also $\|u_x\| \leq \|x\|$.

Andererseits:

$$\forall\, x \in X \;\; \exists\, f_x \in X^* \text{ mit } \|f_x\| = 1, \qquad f_x(x) = \|x\| \quad (\text{Satz } 8.7)\,,$$

also mit $|u_x(f_x)| = |f_x(x)| = \|x\| \cdot \underbrace{\|f_x\|}_{=1}$, also insgesamt $\|J(x)\| \;=\; \|u_x\| \;=\; \|x\|$. ■

Definition und Satz 11.5
Der normierte Raum $(X, \|\;\|)$ heißt *reflexiv*, wenn gilt $J(X) = X^{**}$ (vgl. Satz 11.4).

Reflexive Räume sind immer Banachräume (vgl. Satz und Definition 7.2, 2))

Beachte: Diese Definition besagt nicht nur, daß X und X^{**} normisomorph sind ($\exists$ lineare stetige Isometrie), sondern zusätzlich, daß diese Isometrie durch die Abbildung

J gegeben ist. Es gibt Räume, die zu ihrem Bidualraum linear isometrisch sind, aber nicht reflexiv (vgl. Hinweis in Wloka, S. 105).

Bevor wir näher auf reflexive Räume eingehen (dazu siehe Seite 150 ff.), wollen wir uns mit der Charakterisierung schwach konvergenter und schwach- $*$ konvergenter Folgen (vgl. Definition 11.6) befassen.

Die schwache Topologie $\mathcal{T}(X^*, X^{**})$ ist schwer handhabbar, wenn X^{**} nicht ganz bekannt ist. Gemäß Satz 11.4 kennt man jedoch einen Teilraum $J(X) \subset X^{**}$. Deshalb betrachtet man

Definition 11.6
Sei $(X, \| \|)$ ein normierter Raum.

Dann heißt die Topologie $\mathcal{T}(X^*, J(X))$ die *Schwach-$*$ Topologie* auf X^*.

Bezeichnungen: $\mathcal{T}_{w^*} = \mathcal{T}(X^*, J(X)) = \mathcal{T}(X^*, X)$ (da X und $J(X)$ normisomorph sind (Satz 11.4)).

Offensichtlich gilt:

1. $\mathcal{T}(X^*, X^{**}) \supset \mathcal{T}(X^*, J(X))$ (letzterer enthält weniger offene Mengen)
   „ = “ falls X reflexiv ist.
2. Falls $J(X) = X^{**}$, also X reflexiv, stimmen schwache und schwach- $*$ Topologie auf X^* überein.

Analog zu Satz 11.2 gilt nun

Satz 11.7
Sei $(X, \| \|)$ normiert $\Longrightarrow$

1. $(X^*, \mathcal{T}_{w^*})$ ist ein Hausdorff-Raum.
2. $\{f_n\} \subset X^*$ „schwach- $*$ konvergent“ gegen ein $f \in X^*$ (Bezeichnung: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$)
   $\Longleftrightarrow \quad f_n(x) \to f(x) \ \forall\, x \in X$

   (vgl. dazu Definition von J in Satz 11.4).

Beweis 1):
Zeige: Zu $f_1 \neq f_2,\ f_i \in X^*$ gibt es disjunkte Umgebungen.
Seien $f_1 \neq f_2,\ f_i \in X^* \implies \exists\, x \in X :\ f_1(x) \neq f_2(x)$.
Wähle $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\,|f_1(x) - f_2(x)| \implies \underbrace{u_x^{-1}\big(K_\varepsilon\,\underbrace{(f_1(x))}_{u_x(f_1)}\big)}_{\text{Umgebung von } f_1} \cap u_x^{-1}\big(K_\varepsilon(f_2(x))\big) = \emptyset$.

Beweis 2):
Zeige wie in Satz 11.2:

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{(schwach-$*$ konvergent)} \iff u_x(f_n) \to u_x(f) \quad \forall\, u_x \in J(X).$$

Laut Definition von J ist dies äquivalent zu $\quad f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in X.$ ■

Charakterisierung schwach konvergenter Folgen

Für $(X, \|\ \|)$, $\{x_n\} \subset X$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{lccll}
 & x_n & \rightharpoonup & x, & x \in X \\
\overset{\text{Satz 11.2}}{\iff} & f(x_n) & \to & f(x), & \forall\, f \in X^* \\
\overset{\text{Satz 11.4}}{\iff} & u_{x_n}(f) & \to & u_x(f), & \forall\, f \in X^* \quad \text{(Definition von J)} \\
\overset{\text{Satz 11.7 für } X^*}{\iff} & u_{x_n} & \overset{*}{\rightharpoonup} & u_x & \text{(Konvergenz bzgl. } \mathcal{T}(X^{**}, J(X^*)))
\end{array}$$

Wir wenden den Satz von Banach-Steinhaus (Satz 9.3) an auf $(X^*, \|\ \|)$ und $\mathbb{K}$ (beides sind Banachräume) und erhalten

$$u_{x_n}(f) \to u_x(f)\ \forall\, f \in X^* \iff \begin{cases} 1) & \|u_{x_n}\| \leq M < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ 2) & u_{x_n}(f) \to u_x(f) \qquad \forall\, f \in D,\ \overline{D} = X^* \end{cases}$$

Da J ein Normisomorphismus ist, gilt $\|u_{x_n}\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$. Damit ist bewiesen der

Satz 11.8
Sei $(X, \|\ \|)$ normiert, $\{x_n\} \subset X$, so gilt

$$x_n \rightharpoonup x \iff \begin{cases} 1) & \exists\, M > 0 : \ \|x_n\| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ 2) & f(x_n) \to f(x) \qquad \forall\, f \in D,\ \overline{D} = X^* \end{cases}$$

Insbesondere gilt: Schwach konvergente Folgen $\subset X$, bzw. schwach-$*$ konvergente Folgen $\subset X^{**}$ (im reflexiven Fall) sind norm-beschränkt.

Für die nächste Folgerung erinnern wir an

Definition 3.18
Eine Menge M eines topologischen Vektorraumes X heißt *beschränkt,* wenn zu jeder Nullumgebung U ein $\rho > 0$ existiert mit $M \subset \rho U$.

Im $\mathbb{R}^n$ entspricht das genau dem üblichen Beschränktheitsbegriff.
Aufgabe: Zeige: M *schwach beschränkt* in einem normierten Raum bedeutet:

$$M \subset X,\ \forall\, f \in X^*\ \exists\, q = q(f) > 0 \text{ sodaß } |f(x)| \leq q(f) < \infty \quad \forall\, x \in M.$$

Folgerung 11.9
Sei $(X, \| \|)$ normiert, so gilt

$$M \subset X \text{ ist } \textit{schwach beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad M \text{ beschränkt (bzgl. der Norm).}$$

Beweis (indirekt):
Annahme: M nicht beschränkt $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in M : \; \|x_n\| \geq n^2$.
Laut Voraussetzung:

$$|f(x_n)| < q(f) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall f \in X^* \quad \Longrightarrow \quad \left| f\left(\frac{x_n}{n}\right) \right| < \frac{q(f)}{n} \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad 0 \quad \forall f \in X^*$$

$$\xRightarrow{\text{Satz 11.2}} \quad \tilde{x}_n := \frac{x_n}{n} \rightharpoonup 0 \quad \xRightarrow{\text{Satz 11.8}} \quad \{\tilde{x}_n\} \text{ ist beschränkt}.$$

Andererseits war $\|x_n\| \geq n^2$ also $\left\| \frac{x_n}{n} \right\| \geq n$ **W!** ■

Beispiele zur und Eigenschaften der Reflexivität

Satz 11.10
1. Jeder Hilbertraum $(X, (\ ,\ ))$ ist reflexiv.
2. Für $1 < p < \infty$ sind $L^p(\Omega)$ und $H^{m,p}(\Omega)$ reflexiv.

Wir zeigen nur

Beweis 1:
Dazu benötigen wir den Satz von Riesz (Satz 8.9): Ist X ein Hilbertraum, so gilt:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{H} X^* \\ u &\longrightarrow (Hu), \; (Hu)(\cdot) = (\cdot, u) \text{ ist ein Isomorphismus}, \end{aligned}$$

$$\text{und } H \text{ ist antilinear } \big(H(\alpha\, u + \beta\, f) = \overline{\alpha}\, H(u) + \overline{\beta}\, H(f)\big).$$

Wir haben zu zeigen, daß die Abbildung (vgl. Satz 11.4 und Definition 11.5)

$$\begin{aligned} J : \; X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longrightarrow J\,x : \; (Jx)(f) = f(x) \quad \forall\, f \in X^\star \end{aligned}$$

surjektiv ist.

Sei also $x^{**} \in X^{**}$ gegeben, gesucht wird ein Urbild x unter J, d.h.

$$x^{**}(f) = J(x)(f) = f(x) \qquad \forall f \in X^*.$$

$u \to \overline{x^{**}(Hu)}$ ist eine lineare stetige Abbildung von $X \longrightarrow \mathbb{K}$ (linear, da H antilinear), d.h.

$$(11.1) \qquad \exists\, x^* \in X^* : \; x^*(u) \; := \; \overline{x^{**}(Hu)}$$

$$x^* \text{ hat ein Urbild } x \text{ unter } H : \quad Hx \; = \; x^* \quad \text{(Riesz)} \quad \xRightarrow{(11.1)}$$

$$(11.2) \qquad x^{**}(Hu) \; = \; \overline{x^*(u)} \; = \; \overline{(Hx)\, u} \; = \; \overline{(u,x)} \; = \; (x,u) \; = \; (Hu)\,(x)\,.$$

H ist ein Normisomorphismus, d.h. durchläuft u ganz X, so durchläuft $H(u)$ ganz X^*. Man kann (11.2) also schreiben als

$$x^{**}(f) \; = \; f(x) \qquad \forall\, f \in X^*\,.$$

Dies besagt aber gerade, daß x^{**} ein Urbild unter J hat: $(Jx)\,(f) = f(x)$. ■

Wir beweisen folgende Eigenschaften

Satz 11.11
Seien X, Y normierte Räume, dann gilt:

1. X reflexiv $\Longrightarrow$ Jeder abgeschlossene Unterraum $Z \subset X$ ist reflexiv.
2. Ist $T : X \longrightarrow Y$ ein toplinearer Isomorphismus (stetig, $1-1$, auf, linear, $\exists\, A^{-1}$), so gilt
$$X \text{ reflexiv} \quad \Longleftrightarrow \quad Y \text{ reflexiv}\,.$$
3. X^* separabel $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ X separabel (separabel jeweils bzgl. der Normtopologie).

Beweis 1:
Idee:
Zu $z^{**} \in Z^{**}$ konstruiere $x^{**} \in X^{**}$ mit Urbild $x = J^{-1}(x^{**})$.
Zeige $x \in Z$ und $\widetilde{J}(x) = z^{**}$, folge dabei, ausgehend von z^{**}, den Pfeilen.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "J"] & J(X) = & X^{**} \\
\cup & & \cup \\
x \arrow[d] & & x^{**} \arrow[ll, "J^{-1}"'] \\
x \arrow[rr, "\widetilde{J}"] & & z^{**} \arrow[u] \\
\cup & & \cup \\
Z \arrow[r, "\widetilde{J}"] & \widetilde{J}(Z) \subset & Z^{**}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(Jx)\, f \; &= \; f(x) \quad \forall\, f \in X^* \quad (x \in X) \\
(\widetilde{J}z)\, g \; &= \; g(z) \quad \forall\, g \in Z^* \quad (z \in Z)
\end{aligned}$$

a) Zu gegebenem $z^{**} \in Z^{**}$ definiere $x^{**} \in X^{**}$: $\quad x^{**}(f) := z^{**}(f|_Z) \;\; \forall\, f \in X^*$.

b) X reflexiv $\implies \exists\, x \in X: \ x^{**} = Jx\,.$

c) Behauptung: $x \in Z$:

Wäre $x \notin Z \xRightarrow{\text{Satz 8.5, 1)}} \exists\, f_0 \in X^*: \ f_0\big|_Z = 0, \ f_0(x) \neq 0$ (Z abgeschlossen)

$\implies z^{**}(f_0|_Z) \equiv 0\,;$

andererseits: $0 \equiv z^{**}(f_0|_Z) = x^{**}(f_0) \underset{\underset{X \text{ reflexiv}}{\uparrow}}{=} Jx(f_0) = f_0(x) \neq 0$ **W!**

d) Behauptung: $\widetilde{J}x = z^{**}$:

Jedes $g \in Z^*$ hat eine Darstellung $g = f|_Z, \ f \in X^*$ (Hahn-Banach),

damit folgt

$$(\widetilde{J}x)\,(g) \underset{\underset{\text{Def. von } \widetilde{J}}{\uparrow}}{=} g(x) = f(x) \underset{\underset{X \text{ refl.}}{\uparrow}}{=} (Jx)\,(f) = x^{**}(f) = z^{**}(f|_Z)\,.$$

Also ist $\widetilde{J}$ surjektiv.

Beweis 2:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "J"] & & J(X) = X^{**} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x \arrow[rr, "J"] \arrow[dl, "x^*"'] \arrow[dd, "T"'] & & x^{**} \\
\mathbb{K} & & & \\
 & y \arrow[rr, "\widetilde{J}"] \arrow[ul, "y^*"] & & y^{**} \arrow[uu] \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & Y \arrow[rr, "\widetilde{J}"] & & \widetilde{J}(Y) \subset Y^{**}
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung ist in X und Y symmetrisch, denn es gilt:

X ist Banachraum, da X reflexiv ist. Y ist ebenfalls ein Banachraum, da T toplinearer Isomorphismus ist (vgl. Folgerung 1 zu Satz 4.6). Sei also X reflexiv.

$J, \widetilde{J}$ sind die kanonischen Abbildungen, und da T und T^{-1} toplineare Isomorphismen sind, gilt

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\forall\, y^* \in Y^* \ \exists\, x^* \in X^* \ : \ y^* = x^*\,T^{-1}\,, \\ &\forall\, x^* \in X^* \ \exists\, y^* \in Y^* \ : \ x^* = y^*\,T\,. \end{aligned}$$

Zu $y^{**} \in Y^{**}$ wird ein Urbild $y \in Y$ unter $\widetilde{J}$ gesucht, d.h. eine Darstellung $y^{**}(y^*) = \widetilde{J}(y)\,(y^*) := y^*(y)\,.$

Zu y^{**} definiere $x^{**} \in X^{**}$ gemäß: $y^{**}(y^*) = y^{**}(x^*\,T^{-1}) =: x^{**}(x^*)$ wo $x^* = y^*T\,.$

Damit gilt

$$y^{**}(y^*) = x^{**}(x^*) \underset{\underset{X \text{ refl.}, \, Jx = x^{**}}{\uparrow}}{=} x^*(x) \overset{(*)}{=} y^*\,\underbrace{(Tx)}_{y} = y^*(y).$$

Beweis 3 „$\Longrightarrow$“:
X^* separabel $\Longrightarrow$ $\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f \in X^*;\ \|f\| = 1\} =: X_0$, und diese Folge ist dicht in X_0.

Dies folgt aus:
X^* separabel $\Longrightarrow$ $\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}:\ \lim f_n = f$.

$$|\|f_n\| - \|f\|| \le \|f_n - f\| \quad\Longrightarrow\quad \lim\|f_n\| = \|f\| \quad\Longleftrightarrow\quad \lim\frac{\|f\|}{\|f_n\|} = 1$$

$$\Longrightarrow\quad \lim\frac{\|f\|}{\|f_n\|}\, f = f \quad\Longrightarrow\quad \lim\frac{f_n}{\|f_n\|} = \frac{f}{\|f\|}\ .$$

Wähle eine Folge $\{x_n\} \subset X : \|x_n\| = 1$ und $|f_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}$.

Dies ist möglich auf Grund der Normdefinition: $\|f_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1$.

Nun ist $Y = \operatorname{span}\{x_n\} \subset X$ und $\overline{Y} = X$,

denn wäre $\overline{Y} \ne X \implies \exists\, f_0 \in X^* : f_0|_Y = 0,\ \|f_0\| = 1$, also $\|f_0\| \in X_0$.
(vgl. Satz 8.5, 1)) und damit

$\frac{1}{2} \le |f_n(x_n)| = |(f_n - f_0)\,(x_n)| \le \|f_n - f_0\|$, **W** zu $\{f_n\}$ dicht in X_0.

Beweis 3 „$\not\Longleftarrow$“:
Der Raum $L^1[0,1]$ ist separabel (Satz 4.27). Jedes lineare Funktional f auf $L^1[0,1]$ läßt sich darstellen gemäß

$$f(x) \;=\; \int_0^1 x(t)\,u(t)\,dt \qquad \text{mit einem } u \in L^\infty[0,1].$$

(Beweis in Wloka, § 12, Satz 9). Dieser Raum ist nicht separabel (vgl. Satz 4.27) ■

Schwach kompakte Mengen

Bei Minimierungsproblemen (vgl. Alt S. 149 ff.) ist es wichtig, aus beschränkten Folgen konvergente Teilfolgen auswählen zu können (d.h. man braucht Kompaktheitseigenschaften, vgl. Satz und Definition 6.1). Daß dies im allgemeinen nicht möglich ist bzgl. der Norm zeigt der Satz 6.4, der besagt, daß für einen normierten Raum X gilt:
$\overline{K_1(0)}$ kompakt $\Longleftrightarrow$ $\dim X < \infty$.

Durch die Abschwächung des Konvergenzbegriffes kann man jedoch, zumindest bei reflexiven Räumen, aus beschränkten Folgen schwach konvergente Teilfolgen aussuchen, wie die folgenden Sätze zeigen.

Definition 11.12
Sei $(X, \| \|)$ normiert.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eine Menge } M \subset X \text{ (bzw. } M \subset X^*) \\ \text{heißt } \textit{schwach (bzw. schwach-}*) \\ \text{folgenkompakt}\,.\end{array}\right\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{Jede Folge aus } M \text{ hat eine schwach} \\ \text{(bzw. schwach-}*) \text{ konvergente Teil-} \\ \text{folge mit Grenzwert in } M\,.\end{array}\right.$$

Wir zeigen nun

Satz 11.13
Sei $(X, \| \|)$ ein Banachraum, dann gilt:

X reflexiv $\Longrightarrow$ $\overline{K_1(0)} \subset X$ ist schwach folgenkompakt.

D.h. insbesondere:

Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum (also auch in einem Hilbertraum) hat eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X.

Beachte: zu *insbesondere*

1. Ein reflexiver normierter Raum ist notwendig ein Banachraum, denn X^{**} ist ein Banachraum (Satz 7.2 b) und J ein Normisomorphismus (Satz 11.4).
2. Jeder Hilbertraum ist reflexiv (Satz 11.10)
3. Zu jeder beschränkten Folge existiert eine abgeschlossene Kugel, in der sie enthalten ist. der Grenzwert muß dann nicht notwendig in M liegen, wohl aber in der abgeschlossenen Kugel.

Hierdurch ist auch der zu Anfang dieses Paragraphen zitierte Satz bewiesen.

Zum Beweis von Satz 11.13 benötigen wir

Satz 11.14
Sei $(X, \|\|)$ normiert und separabel $\Longrightarrow$ $\overline{K_1(0)} \subset X^*$ ist schwach-$*$ folgenkompakt,

d.h. insbesondere:

Jede norm-beschränkte Teilfolge $\{f_n\} \subset X^*$ hat eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X^*.

Beweis von Satz 11.14:
Sei $\{x_j\}$ dicht in X (eine abzählbare dichte Menge kann als Folge dargestellt werden) und $\{f_n\} \subset \overline{K_1(0)} \subset X^*$ (d.h. $\|f_n\| \leq 1 \ \forall\, n$). Deshalb folgt:

$$\{f_n(x_1)\} \subset \mathbb{K} \text{ ist beschränkt } \Longrightarrow \exists \text{ Teilfolge } \{f_n^{(1)}\} \text{ mit}$$
$$\{f_n^{(1)}(x)\} \text{ konvergent in } \ x = x_1$$

$\{f_n^{(1)}(x_2)\} \subset \mathbb{K}$ ist beschränkt $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\{f_n^{(2)}\} \subset \{f_n^{(1)}\}$ mit
$\{f_n^{(2)}(x)\}$ konvergent in $x = x_1, x_2$

Fährt man so fort, so folgt:

Die Diagonalfolge $\{f_n^{(n)}\}$ konvergiert in $Y := \{x_j\}$ und $\overline{Y} = X$.
Als Teilfolge von $\{f_n\}$ erfüllt sie $\|f_n^{(n)}\| \leq 1 \ \forall n$.

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 9.3 „$\Longleftarrow$“) gilt:
(Beachte: Diese Richtung benötigt nicht die Vollständigkeit von X, vgl. Bemerkung 2. zu Satz 9.3, sondern nur die des Bildraums und der ist hier der Zahlkörper $\mathbb{K}$)

Die Folge $\{f_n^{(n)}\}$ konvergiert punktweise auf ganz X gegen ein $f \in X^*$ und aus $\|f_n\| \leq 1$ folgt $\|f_n^{(n)}\| \leq 1$ (Folgerung aus Satz 9.2).

Dies bedeutet nach Satz 11.7, 2): $f_n^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} f \in \overline{K_1(0)} \subset X^*$. ■

Beweis von Satz 11.13:
Sei $\{x_n\} \subset \overline{K_1(0)} \subset X$.

$Y := \overline{\operatorname{span}[\{x_n\}]}$ abgeschlossen und separabel

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow[X \text{ reflexiv}]{\text{Satz 11.11, 1)}} && Y \text{ ist reflexiv, d.h. } J(Y) = Y^{**}, \\
&\xRightarrow[\text{Isomorphismus}]{J \text{ isometrischer}} && Y^{**} \text{ ist separabel}, \\
&\xRightarrow[\text{anwenden auf } Y^{**}]{\text{Satz 11.11, 3)}} && Y^{*} \text{ ist separabel}, \\
&\xRightarrow[\text{anwenden auf } Y^{*}]{\text{Satz 11.14}} && \overline{K_1(0)} \subset Y^{**} \text{ ist schwach-} * \text{ folgenkompakt}. \\
&\xRightarrow{\{Jx_n\} \subset \overline{K_1(0)} \subset Y^{**}} && \exists \text{ Teilfolge } Jx_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} Jx \in \overline{K_1(0)} \subset Y^{**} \\
&\xLeftrightarrow{\text{Satz 11.7, 2)}} && Jx_{n_k}(y^*) \longrightarrow Jx(y^*) \quad \forall y^* \in Y^* \\
&\xLeftrightarrow{\text{Definition von } J} && y^*(x_{n_k}) \longrightarrow y^*(x) \quad \forall y^* \in Y^*
\end{aligned}$$

Diese Konvergenz gilt auch $\forall x^* \in X^*$, da sich jedes y^* zu einem $x^* \in X^*$ fortsetzen läßt und da $\forall x^* \in X^*$ gilt $x^*\big|_Y = y^* \in Y^*$.

$$x_{n_k} \qquad \rightharpoonup \qquad x\,.$$

■

Die angegebenen Aussagen über die Existenz schwach konvergenter Folgen sind von praktischer Bedeutung für die Lösung von Minimierungsproblemen (vgl. Alt § 5.13).

Beachte jedoch zu Satz 11.13:
In einem beliebigen normierten Raum gilt i.allg. **nicht** die Äquivalenz von *schwach kompakt* (= überdeckungskompakt bzgl. der schwachen Topologie) und *schwach folgenkompakt* (zur Definition vgl. etwa Hirzebruch-Scharlau, S. 167 f). Man beachte, daß diese Kompaktheitsbegriffe sich nicht auf eine metrische Topologie beziehen.

Zwar kann man zeigen (Hirzebruch-Scharlau, Nr. 14.7):

Satz 11.15
Sei $(X, \| \, \|)$ ein Banachraum, so gilt

$$X \text{ reflexiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{K_1(0)} = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\} \text{ schwach kompakt.}$$

Wir haben in Satz 11.13 gezeigt, daß in einem reflexiven Banachraum $\overline{K_1(0)}$ schwach folgenkompakt ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt also: $\overline{K_1(0)}$ schwach kompakt impliziert $\overline{K_1(0)}$ schwach folgenkompakt.

Hirzebruch-Scharlau (Nr. 13.9) zeigt:

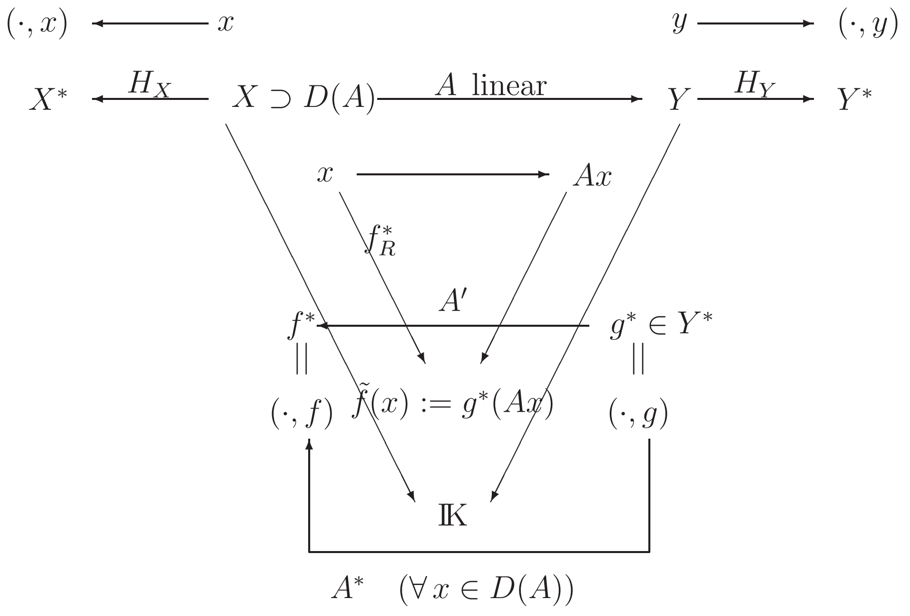
Satz 11.16

$$(X, \| \, \|) \text{ normiert} \quad \Longrightarrow \quad \overline{K_1(0)} \subset X^* \text{ ist schwach-} * \text{ kompakt.}$$

Jedoch liefert Alt § 5.5 Beispiel 3 ein Beispiel für einen normierten, aber nicht separablen Raum in dem $\overline{K_1(0)} \subset X^*$ **nicht** *schwach-∗ folgenkompakt* ist.
Dies zeigt, daß die Voraussetzung *separabel* in Satz 11.14 notwendig ist.

§ 12 Duale und Adjungierte Abbildungen

Wir befassen uns nun mit Abbildungen zwischen den Dualräumen. Seien X und Y normierte, bzw. Hilberträume (man könnte sich auch auf unitäre Räume beschränken, wie man leicht sieht). Sei A ein linearer (nicht notwendig stetiger) Operator, der eine Teilmenge $D(A) \subset X$ nach Y abbildet. H_X bzw. H_Y seien die Isometrien aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (Satz 8.9).



Wir befassen uns zunächst mit dem normierten Fall und erklären:

Definition 12.1
Seien X, Y normiert, $X \overset{\text{dicht}}{\supset} D(A) \overset{A\,\text{lin}}{\longrightarrow} Y$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccl} Y^* \supset D(A') & \overset{A'}{\longrightarrow} & X^* & & \\ \Cup & & \Cup & & \\ g^* & \longrightarrow & f^* := A'g^* : (A'g^*)(x) & = & g^*(Ax) \;\; \forall x \in D(A) \end{array}$$

heißt *duale (konjugierte) Abbildung zu* A.
$D(A')$ enthält also nur die Elemente aus Y^*, für welche die Zusammensetzung $g^* \circ A$ stetig ist.

Bemerkungen zur Definition:
Die Komposition $\tilde{f}(x) := g^*(Ax)$ ist linear (nicht notwendig stetig) auf $D(A)$. Es ist $\tilde{f} = f_R^* \in D(A)^*$, falls A stetig, oder g^* geeignet.
Wir beschränken deshalb den Definitionsbereich $D(A')$ auf die $g^* \in Y^*$, für die $\tilde{f} = f_R^*$ stetig ist. Wir werden Beispiele kennen lernen (vgl. Beispiel 2, 160) dafür, daß auch bei unstetigem A geeignete $g^* \in Y^*$ existieren, sodaß $\tilde{f}(x) := g^*(Ax)$ stetig ist

$A'g^* = f^* \in X^*$ verlangt jedoch auch, daß f^* eindeutig bestimmt ist durch g^*. Dies ist der Fall, wenn $\overline{D(A)} = X$ ist, denn dann ist $A'g^*$, das zunächst nur für $x \in D(A)$ erklärt ist, eindeutig auf X fortsetzbar (Satz 8.2).
Wäre nämlich $\overline{D(A)} \neq X$, so gäbe es nach Satz 8.5, 1. ein $f_0^* \in X^*$, $f_0^* \neq 0$ mit $f_0^* = 0$ auf $D(A)$. Dann wären das Nullfunktional aus X^* und f_0^* verschiedene Fortsetzungen des Nullfunktionals auf $D(A)$ und A' wäre nicht als Operator auf Y^* erklärbar. Die Dichtheitsvoraussetzung ist also notwendig für die Definition von A'.

Die Existenz von A' ist offensichtlich zumindest für $A \in L(X,Y)$.

Weitere Existenzbetrachtungen folgen noch.

Sind X und Y Hilberträume, so ist jedes lineare Funktional darstellbar durch ein inneres Produkt mit Hilfe eines Elementes des Originalraumes (Satz von Riesz) und wir können erklären:

Definition 12.2

1. Seien X, Y Hilberträume, $X \overset{\text{dicht}}{\supset} D(A) \xrightarrow{A \text{ lin}} Y$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccl} Y \supset D(A^*) & \xrightarrow{A^*} & X & & \\ \cup\!\!\!\shortmid & & & & \\ g & \longrightarrow & A^*g : (A^*g)\,(x) & = & (x, A^*g)_X \;:=\; (Ax, g)_Y \quad \forall\, x \in D(A) \end{array}$$

   heißt die *zu* A *adjungierte Abbildung.*
2. Ist $Y = X$, so heißt die *Abbildung* A *selbstadjungiert,* wenn $A = A^*$, d.h. $(x, Ag) = (Ax, g) \quad \forall\, x, g \in D(A)$.

Zwar taucht in dieser Definition A' nicht auf, doch ist klar: Wenn A' existiert, dann auch A^*.

Man erkennt unmittelbar den Zusammenhang von A' und A^*.

Lemma 12.3
Unter den Voraussetzungen der Definitionen 12.1 und 12.2 gilt

$$A^* = H_X^{-1} \circ A' \circ H_Y \qquad \text{und} \qquad D(A^*) = H_Y^{-1}(D(A')).$$

Bemerkungen:

1. Diese Darstellung von A^* könnte man auch zur Definition von A^* benutzen.

   Aufgabe: Man zeige $\|A\| = \|A'\| = \|A^*\|$, falls $A \in L(X,Y)$.

2. Manche Autoren nennen auch die duale (konjugierte) Abbildung A' adjungiert (z.B. Alt), und sprechen im Falle von Hilberträumen von A^* als der Hilbertraum-Adjungierten. Also Vorsicht beim Literaturstudium!

Lemma 12.4 algebraische Eigenschaften

Unter den Voraussetzungen der Definitionen 12.1 bzw. 12.2 gilt

1) $(\alpha A_1 + \beta A_2)' \;=\; \alpha A_1' + \beta A_2',$ falls $A_1, A_2 \in L(X,Y),\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1') $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* \;=\; \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*,$ falls X, Y HRe, $A_1, A_2 \in L(X,Y),\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2) $I' \;=\; I^* \;=\; I$

3) $(A_2 A_1)' \;=\; A_1' A_2',$ falls $A_1 \in L(X,Y),\; A_2 \in L(Y,Z)$.

3') $(A_2 A_1)^* \;=\; A_1^* A_2^*,$ falls, X, Y HRe, $A_1 \in L(X,Y),\; A_2 \in L(Y,Z)$.

4) $A'' J_X \;=\; J_Y A,$ falls $A \in L(X,Y),\; J_X, J_Y$ die kanonischen Einbettungen in X^{**}, Y^{**}.

4') $A^{**} \;=\; A,$ falls $A \in L(X,Y)$ und X, Y HRe.

Beweis

1)-2) sind unmittelbar klar (beachte: H_Y antilinear).

3) Aus der Definition folgt unmittelbar
$(A_2 A_1)' z^*(x) \;=\; z^*(A_2 A_1 x) \;=\; A_2' z^*(A_1 x) \;=\; A_1' A_2' z^*(x)$.

3') direkt nachrechnen gemäß Definition 12.2 analog zu 3).

4) $(A'' J_X x)(y^*) \overset{\text{Def. } A''}{=} (J_X x)(A' y^*) \overset{\text{Def. } J_X}{=} (A' y^*)(x) \overset{\text{Def. A'}}{=} y^*(Ax) \overset{\text{Def. } J_Y}{=} (J_Y A x)(y^*)$.

4') Für $A \in L(X;Y)$ ist $A^* \in L(Y,X)$ definiert durch $(x, A^* y)_X = (Ax, y)_Y$.
Damit folgt für $A^{**} = (A^*)^* :\;\; A^{**} \in L(X,Y)$, und es gilt:

$$(y, A^{**} x)_Y = (A^* y, x)_X = \overline{(x, A^* y)} \overset{\text{Def. } A^*}{=} \overline{(Ax, y)} = (y, Ax),$$

also $A^{**} = A$.

Beispiele

Beispiel 1)

Wir konstruieren die Abbildungen A' und A^* für einen Integraloperator.

Seien $X = Y = L^2[a,b]$ reelle Hilberträume.

$$(Ax)(t) \;:=\; \int_a^b k(s,t)\, x(s)\, ds\,, \quad k \text{ stetig auf } [a,b] \times [a,b], \quad \text{also } D(A) = X.$$

Das Integral existiert nach Hölder oder weil k beschränkt ist.

$\forall\, g^* \in Y^* \quad \exists!\, g \in Y :\; g^*(y) \overset{\text{Riesz}}{=} (y, g) = \int_a^b y(t)\, g(t)\, dt\,.$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
(A'\,g^*)\,(x) &\overset{\text{Def. } A'}{=} g^*(Ax) \;=\; (Ax,g)\\
&= \int_a^b \underbrace{\int_a^b k(s,t)\,x(s)\,ds}_{Ax}\; g(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\int_a^b k(s,t)\,g(t)\,dt}_{\substack{=:\ f(s),\\ f\in L^2(a,b)\\ \text{(nachrechnen mit Hölder)}}}\; x(s)\,ds\\
&= (x,f) \;=:\; f^*(x).
\end{aligned}
$$

Mit $\quad f(s) \;:=\; \int_a^b k(s,t)\,g(t)\,dt \quad$ haben wir also die Zuordnung

$$
A'\,g^* \;=\; f^* \qquad \text{und} \qquad D(A') \;=\; Y^*\,. \tag{12.1}
$$

Mit den Abbildungen H_X, H_Y aus dem Riesz'schen Darstellungssatz erhält man

$$
\begin{aligned}
&f^* \;=\; H_X(f), \quad g^* \;=\; H_Y(g), \quad A^* \;=\; H_X^{-1}\,A'\,H_Y, \quad \text{(Lemma 12.3)}\\
&A^*\,g \;=H_X^{-1}\,A'\,H_Y\,g \;=\; H_X^{-1}\,A'g^* \;=\; H_X^{-1}f^* \;=\; f,
\end{aligned}
$$

$$
\text{also} \qquad A^*\,g \;=\; f \quad \text{und} \quad (A^*\,g)\,(s) \;=\; f(s) \;=\; \int_a^b k(s,t)\,g(t)\,dt\,.
$$

Vergleich mit A liefert:

A selbstadjungiert (d.h. $A = A^*$) $\iff$ $k(s,t)$ symmetrisch in s und t .

Beispiel 2)

$X = Y = L^p(a,b),\ 1 < p < \infty$, Banachraum mittels $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$.

Für $A = \dfrac{d}{dt}$ sei

$X \supset \{C^1[a,b];\ x(a) = x(b) = 0\} \;=:\; D(A) \xrightarrow{A = \frac{d}{dt}} Y$, linear aber unstetig.

Nach Satz 4.26 ist $\overline{D(A)} = X$.

Man beachte, daß in Definition 12.1 **nicht** verlangt wurde, daß A stetig war. Damit war nicht allgemein klar, ob es ein $f^* \in X^*$ gibt mit $f^* = \tilde{f}$.

$\forall\, g^* \in Y^* \quad \exists\, g \in L^q(a,b) \;:\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\, p > 1 :\;\; g^*(y) = \int_a^b y(t)\,g(t)\,dt$ (Satz 8.11)

$\Longrightarrow$

$$
\tilde{f}(x) \;=\; g^*(Ax) \;=\; \int_a^b x'(t)\,g(t)\,dt\,. \tag{12.2}
$$

Frage: Wann existiert ein $f^* \in X^*$ mit $f^* = \tilde{f}$?

Falls in (12.2) $g \in D(A)$ (daraus folgt auch $g \in L^q(a,b)$), erhält man durch Produktintegration

$$\tilde{f}(x) \;=\; g^*(Ax) \;=\; \int\limits_a^b x'(t)\, g(t)\, dt \;=\; \int\limits_a^b x(t)\, \underbrace{(-g'(t))}_{=:\ f\in L^q} dt \;=\; f^*(x) \;=\; A'\, g^*(x)\,.$$

$$\Longrightarrow \quad D(A') \supset \Big\{ g^* \in Y^*;\; g^*(y) = \int\limits_a^b y(t)\, g(t)\, dt,\;\; g \in D(A) \Big\}\,.$$

Man kann also geeignete g^* finden, die die fehlende Stetigkeit von A in der Komposition g^*A wieder gut machen. ■

Als Minimalinteressen drängen sich folgende Fragen auf:

Wann existiert A' (und damit A^*) ? Wann ist A' und damit A^* stetig ?

Satz 12.5 Existenz und Stetigkeit von A'

Seien $(X, \|\;\|)$, $(Y, \|\;\|)$ normiert, $X \overset{\text{dicht}}{\supset} D(A) \xrightarrow{A \text{ lin}} Y$ (A nicht notwendig stetig).

Existenz von A':

$$D(A') = Y^* \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\{ \{x_n\} \subset D(A),\; x_n \to x \;\text{ in } X \;\Longrightarrow\; Ax_n \rightharpoonup Ax \;\text{ in } Y \Big\}$$

Stetigkeit von A':

$$A \text{ stetig und } D(A) = X \quad\Longrightarrow\quad \|A\| = \|A'\| \text{ und } D(A') = Y^*$$

.

Beweis Existenz: „$\Longleftrightarrow$“ :

$\forall\, g^* \in Y^*$ ist $f^* = A'g^*$ ein stetiges lineares Funktional auf X (also $f^* \in X^*$)

$$\begin{array}{llllll}
\Longleftrightarrow & x_n \to x \;\text{ stetig in } X & \Longrightarrow & f^*(x_n) & \to & f^*(x) \\
 & & & \quad \| \;\text{Def. von } A' & & \\
\Longleftrightarrow & x_n \to x \;\text{ stetig in } X & \Longrightarrow & g^*(Ax_n) & \to & g^*(Ax) \qquad \forall\, g^* \in Y^* \\
\Longleftrightarrow & x_n \to x \;\text{ stetig in } X & \Longrightarrow & Ax_n & \rightharpoonup & Ax \;\text{ in } Y\,.
\end{array}$$

Beweis Stetigkeit: Erinnerung: $\|y\|_Y \;=\; \sup\limits_{\substack{f\in Y^*\\ \|f\|=1}} |f(y)|$ (Folgerung 8.8) $\Longrightarrow$

$$\|A\| \;=\; \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y \;=\; \sup_{\|x\|_X=1}\; \sup_{\substack{y^*\in Y^*\\ \|y^*\|=1}} |\overbrace{y^*(Ax)}^{A'y^*(x)}| \;=\; \sup_{\substack{y^*\in Y^*\\ \|y^*\|=1}} \underbrace{\sup_{\|x\|_X=1} |A'y^*(x)|}_{\|A'y^*\|} \;=\; \|A'\|\,.$$

Da $D(A) = X$ und A stetig $\Longrightarrow \forall g^* \in Y^*$ ist $g^*(A(x))$ stetig $\xRightarrow{\text{Def. 12.1}}$ $D(A') = Y^*$.

■

Als erste Anwendung zeigen wir ein

Variationsprinzip für selbstadjungierte Operatoren

Satz 12.6
$(X,(\cdot,\cdot))$ sei ein Hilbertraum, $Y \subset X$ ein dichter, linearer Teilraum.

Sei

$$\begin{aligned} T : Y &\xrightarrow{\text{linear}} X \\ (x,Ty) &= (Tx,y) \quad (T \text{ selbstadjungiert auf } Y)\,. \\ (Tx,x) &\geq 0 \quad \forall\, x \in Y \quad (T \text{ positiv semidefinit auf } Y)\,. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Für } r \in X \text{ hat} \\ Ty = r \text{ eine Lösung } w \in Y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Das Funktional} \\ \quad \begin{aligned} \phi(y) &:= (Ty,y)-(y,r)-(r,y) \\ &= (Ty,y)-2\Re(y,r) \end{aligned} \\ \text{nimmt sein Minimum in } w \in Y \text{ an.} \end{array}\right.$$

Bemerkung:
Der Satz macht keine Existenzaussage für die Lösung. Existenz von Minimallösungen müßte (könnte) man als Anwendung des vorigen § 11 zeigen (vgl. Alt § 5.13). Aber wenn die Existenz gesichert ist, liefert dieser Satz einen Hinweis, wie man Lösungen konstruieren kann.

Beweis Satz 12.6:

Die Idee zu diesem Satz stammt aus der Physik. Lösungen von Gleichungen, in denen eine Energie vorkommt, können oft dadurch charakterisiert werden, daß die Energie minimal ist. Das Funktional ϕ kann als Energiefunktional gedeutet werden (siehe Michlin: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, vgl. auch Beispiel 3 (Kettenlinie) in der Einleitung).

Vorbetrachtung:

1) ϕ ist reellwertig, denn $(Ty,y) \overset{\text{selbstadjungiert}}{=} (y,Ty) = \overline{(Ty,y)} \in \mathbb{R}\,.$
Man kann also Minima suchen.

2) Seien $v,z \in Y$ und $\eta = v - z \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \phi(v) \;=\; \phi(z+\eta) &= (T(z+\eta),(z+\eta)) - (z+\eta,r) - (r,z+\eta), \quad T \text{ selbstadjungiert} \\ \text{(12.3)} \qquad &= \phi(z) + (Tz-r,\eta) + (\eta,Tz-r) + (T\eta,\eta), \\ \text{(12.4)} \qquad &= \phi(z) + 2\Re(Tz-r,\eta) + (T\eta,\eta). \end{aligned}$$

Beweis „$\Longrightarrow$:“ Sei $Tw = r$, setze in (12.4): $z = w \quad \Longrightarrow$

$$\phi(w+\eta) \;=\; \phi(v) \;=\; \phi(w) + \underbrace{(T\eta,\eta)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{pos-sem def.}}} \;\geq\; \phi(w) \quad \forall\, v \in Y \;\text{ (Minimalität)}$$

Beweis „$\Longleftarrow$“: Sei $\phi(v) \geq \phi(w)\ \forall\, v \in Y$. Für $s \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in Y$ beliebig ist laut Voraussetzung

$$\phi(w+s\varepsilon) \;\geq\; \phi(w)\,. \tag{12.5}$$

Setze in (12.4): $z = w$ und $\eta = s\varepsilon$ also $v = w + s\varepsilon \quad \Longrightarrow$

$$\phi(w+s\varepsilon) \;=\; \phi(w) \quad + \quad \underbrace{2s\,\Re(Tw-r,\varepsilon) + s^2\,\overbrace{(T\varepsilon,\varepsilon)}^{\geq 0}}_{\geq 0 \text{ wegen } (12.5) \quad \forall s\in\mathbb{R}}$$

$$\Longrightarrow \quad \Re(Tw-r,\varepsilon) \;=\; 0\,.$$

Setzt man in (12.3) $z = w,$ und $\eta = is\varepsilon$, so folgt ebenso

$$\begin{array}{lrcl} & \mathrm{Im}(Tw-r,\varepsilon) & = & 0\,. \\ \text{Insgesamt also} & (Tw-r,\varepsilon) & = & 0 \quad \forall \varepsilon\varepsilon \in Y,\ \overline{Y} = X \\ & (Tw-r,x) & = & 0 \quad \forall\, x \in X \\ \Longrightarrow & Tw-r & = & 0\,. \end{array}$$

■

Beispiel: Dirichlet-Randwertaufgabe für die Poisson'sche Gleichung für reelle Funktionen.

Gesucht sei eine reellwertige Funktion $u(x_1,\ldots,x_n)$ mit

$$\begin{array}{rcll} Tu & = & -\Delta\, u \;=\; r & \text{in } B, \quad r \in L^2(B) \text{ reellwertig} \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\, B \;=\; \text{Rand}\, B\,. \end{array}$$

Dabei sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge (und so anständig, daß der Gauß'sche Integralsatz angewendet werden kann, z.B. Normalbereich),
$X = L^2(B)$ und $D(T) = \{u \in C^2(B);\ u|_{\delta B} = 0\}$ (reelle Funktionenräume).
Dann ist $\overline{D(T)} = L^2(B)$ (bzgl. der Norm in L^2, Satz 4.26).

1) T ist positiv semidefinit auf Y, denn nach der 1. Green'schen Formel gilt

$$(Tv,v) \;=\; \int\limits_B (-\Delta\, v)v\,dV = \int\limits_B \underbrace{(\text{grad } v)^2}_{\geq 0}\,dV \;-\; \underbrace{\int\limits_{\partial B} v\,\frac{\partial\, v}{\partial\, \nu}\,df}_{=0 \text{ wegen } v\in Y} \tag{12.6}$$

dV bzw. df bezeichnen das Volumen- bzw. Randelement, ν die äußere Normale von $\partial\, B$.

Also gilt

$$(Tv, v) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{grad}\, v = \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad v = \text{const} \quad\Longrightarrow\quad v = 0 \text{ wegen } v \in Y.$$

Damit folgt aus (12.6) $(Tv, v) \geq 0,\ = 0$ nur, falls $v = 0$, also T sogar positiv definit auf Y.

2) T ist selbstadjungiert auf Y, denn die 2. Green'sche Formel besagt

$$\int_B (u\Delta\, v - v\Delta\, u)\, dV \;=\; \int_{\partial B} \left(u\frac{\partial\, v}{\partial\, \nu} - v\frac{\partial\, u}{\partial\, \nu}\right) df \;=\; 0 \quad \text{für } u, v \in Y\,,$$

$$(\nu = \text{ äußere Normale auf } \partial\, B)$$

also $(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall\, u, v \in Y$.

Die Extremalaufgabe aus Satz 12.6 lautet somit

$$\phi(v) \;=\; \int_B [(\text{grad } v)^2 - 2vr]\, dV \overset{!}{=} \text{Min}\,.$$

Man erhält somit aus Satz 12.6 das

Dirichlet'sche Prinzip: Die Lösung der obigen RWA ist äquivalent zur Variationsaufgabe, das Funktional $\phi(v)$ zum Minimum zu machen.

Bemerkung: Wesentlich für Existenzbeweise für die vorgelegte Randwertaufgabe ist die Voraussetzung der positiven Semidefinitheitvon T. Sie ist uns auch schon in § 6 (Lax-Milgram-Theorie) begegnet als Elliptizität.
Weitere Resultate (vgl. die Sätze 13.2 und 13.2) liefern auch die Existenz starker Lösungen für elliptische Probleme.

Anwendung: **Verfahren von Ritz**: Man sucht das Minimum u_n von ϕ in endlich dimensionalen Teilräumen $Y_n \subset X$ (z.B. in Räumen spezieller, mehrdimensionaler Polynome) und untersucht dann: Wann konvergiert $(u_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} (u, y)\ \forall\, y \in L^2(B)$ (schwache Konvergenz)?
Wählt man endliche Teilräume in Form von stückweise linearen Funktionen, so erhält man das
Verfahren der finiten Elemente.

Wichtig für die Spektraltheorie linearer Operatoren sind Aussagen darüber, wann ihre Wertebereiche abgeschlossen sind und was das für die dualen Abbildungen bedeutet. Dies ist von Bedeutung für die Lösung von Operatorgleichungen.
Wir formulieren (ohne Beweis, der findet sich z.B. in Wloka, S. 145 ff. oder Yosida VII.5) das Closed-range-Theorem.
Hierzu benötigen wir einige Hilfsmittel, deren Bezeichnungen in der Literatur ziemlich vielfältig sind.

Allgemein akzeptiert ist im Hilbertraumfall die Bezeichnung

$$(12.7) \qquad (X, (\ ,\ ))\ \text{HR}\ ,\ U \subset X : \quad U^{\perp} := \{y \in X;\ (x,y) = 0\ \forall x \in U\}$$

orthogonales Komplement von U.

In Anbetracht des Riesz'schen Darstellungssatzes ($y \overset{H_Y}{\to} (\cdot, y) = y^*$) kann man diese Menge als eine Menge linearer Funktionale deuten.
Lineare Funktionale gibt es auch in normierten Räumen. In Anlehnung an obige Deutung definiert man deshalb (vgl. z.B. Wloka, Yosida, Werner)

$$(12.8) \qquad (X, \|\ \|),\ U \subset X : \quad U^{\perp} := \{y^* \in X^*;\ y^*(x) = 0\ \forall x \in U\}$$

$U^{\perp}$ heißt *Annihilator von* U *in* X^*.
oder: *Orthogonalraum von* U *in* X^*

$U^{\perp}$ liegt also in anderen Räumen, jenachdem ob X normiert ist oder unitär. Vermutlich benutzt Alt statt dessen die Bezeichnung

$$(X, \|\ \|),\ U \subset X : \quad U^{0} := \{y^* \in X^*;\ y^*(x) = 0\ \forall x \in U\}$$

Annihilator von U *in* X^*

Ist X ein Hilbertraum, so kann er ohne Doppeldeutigkeit schreiben: $U^0 = H_X U^{\perp}$.

Im Dualraum definiert man (z.B. Wloka, Yosida)

$$(12.9) \qquad (X, \|\ \|),\ V \subset X^* : \quad V^{\perp} := \{y \in X;\ x^*(y) = 0\ \forall x^* \in V\}$$

Annihilator von V *in* X, (bei Werner).
Orthogonalraum von V *in* X, (bei Wloka).

Zur Motivation dieser Schreibweise: Eigentlich korrekt wäre in einem normierten Raum gemäß (12.8): $V^{\perp} := \{y^{**} \in X^{**};\ y^{**}(x^*) = 0\ \forall x^* \in V\}$.
Ist X reflexiv, so ist vermittels der kanonischen Abbildung $J : X \longrightarrow X^{**}$ für $y \in X$: $Jy(x^*) = y^{**}(x^*) = x^*(y)$. Identifiziert man nun $J(X)$ mit X (J ist ein topologischer Isomorphismus), so kommt man zur obigen Definition.
Werner benutzt zur besseren Unterscheidung statt dessen in (12.9) die Bezeichnung $V_{\perp}$.
Wir folgen den Bezeichnungen von Wloka und Yosida und benutzen die Bezeichnungen in den numerierten Definitionen. (Die Bedeutung ergibt sich aus dem Zusammenhang.)

Mit den weiteren Bezeichnungen (wobei $X \supset D(A) \xrightarrow{A\,\text{lin}} Y$)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) \quad &:= \quad A^{-1}(0), \quad \text{Kern der Abbildung } \mathbf{A} \ = \ \text{Urbild der Null unter } A, \\ \text{Im}\, A \quad &:= \quad \{y \in Y\ :\ \exists\, x \in X :\ y = Ax\} \ = \ AX, \quad \text{Bild von } A, \end{aligned}$$

gilt nun (Beweis in Wloka § 15.4)

Satz 12.7 Closed-range-Theorem
Satz von der abgeschlossenen Abbildung (Banach)

Seien $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ Banachräume, $A \in L(X,Y)$. Dann sind äquivalent:

1. $\operatorname{Im} A := \{y \in Y : \exists\, x \in X : y = Ax\}$ ist abgeschlossen in Y.
2. $\operatorname{Im} A'$ ist abgeschlossen in X^*.
3. $\operatorname{Im} A = [\operatorname{Ker}(A')]^\perp \overset{(12.9)}{:=} \big\{y \in Y : g^*(y) = 0 \ \forall\, g^* \in \operatorname{Ker}(A')\big\}$.
4. $\operatorname{Im} A' = [\operatorname{Ker}(A)]^\perp \overset{(12.8)}{:=} \{y^* \in X^* : y^*(x) = 0 \ \forall\, x \in \operatorname{Ker}(A)\}.$.

Man zeigt leicht: Ist $(X, \|\|)$ normiert und $M \subset X$, so ist $M^\perp$, wie im Hilbertraumfall, ein abgeschlossener linearer Teilraum von X^*.

Aus Satz 12.7 erhält man die

Folgerung 12.8
$(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ Banachräume, $A \in L(X,Y) \implies$

1. $\operatorname{Im} A = Y \iff \exists\, A'^{-1} \in L(\operatorname{Im} A', Y^*)$.
2. $\operatorname{Im} A' = X^* \iff \exists\, A^{-1} \in L(\operatorname{Im} A, X)$.

Beweis:
1) „$\Longrightarrow$“

$\operatorname{Im} A = Y \Longrightarrow A'$ injektiv (und damit invertierbar auf $\operatorname{Im} A'$), denn

$$A'g^* = 0 \implies g^*(Ax) = 0 \ \forall\, x \in X \xLeftrightarrow{AX=Y} g^*(y) = 0 \ \forall\, y \in Y \implies g^* = 0.$$

$$\operatorname{Im} A = Y \xRightarrow[\text{Satz 12.7}]{Y\,\text{abgeschlossen}} \operatorname{Im} A' \text{ abgeschlossen in } X^* \overset{\text{BR}}{\Longrightarrow} \operatorname{Im} A' \text{ ist BR}.$$

Damit ist A' eine surjektive Abbildung auf den BR $\operatorname{Im} A' \xRightarrow{\text{Satz 10.3}} A'$ offen $\Longrightarrow (A')^{-1}$ stetig auf $\operatorname{Im} A'$.

1) „$\Longleftarrow$“

Laut Voraussetzung

A' invertierbar $\Longrightarrow \operatorname{Ker} A' = 0 \Longrightarrow [\operatorname{Ker} A']^\perp \overset{\text{Satz 12.7,3.}}{=} Y.$

Wir zeigen nun: Im A' ist abgeschlossen. Dann folgt aus Satz 12.7, daß $Y = \operatorname{Im} A$.

$A \in L(X,Y) \Longrightarrow A'$ ist stetig auf $Y^* \xRightarrow{\text{Seite 142}} A'$ ist graphenabgeschlossen.

Wir benutzen die Äquivalenz von (a) und (b) in Definition 10.4.

Sei $A'y_n^* \to x^* \implies \{A'y_n^*\}$ ist CF $\xRightarrow{A'^{-1}\text{ stetig}} \{y_n^*\}$ ist CF im Banachraum Y^* $\implies y_n^* \to y^* \xRightarrow{\text{Def. 10.4, (b)}} A'y^* = x^* \in \operatorname{Im} A'$, d.h. $\operatorname{Im} A'$ ist abgeschlossen.

2)

Wegen der Symmetrie von A und A' in Satz 12.7 verläuft der Beweis von 2) analog zu dem von 1). ■

§ 13 Kompakte und vollstetige Operatoren

Wir wissen, daß in ∞-dimensionalen Räumen „kompakt“ nicht mehr äquivalent ist mit „beschränkt und abgeschlossen“. Dieses Manko wird teilweise wieder gutgemacht durch spezielle Eigenschaften gewisser Operatoren.

Definition 13.1
Seien $(X, \| \,\|)$, $(Y, \| \,\|)$ normiert und $A : X \to Y$.

$$A \text{ heißt } \textit{kompakt} \overset{\text{def}}{\iff} \Big\{ M \subset X \text{ beschränkt} \implies A\,M \subset Y \text{ relativ kompakt} \Big\}$$

$$A \text{ heißt } \textit{vollstetig} \overset{\text{def}}{\iff} A \text{ ist kompakt und stetig}.$$

Eigenschaften:
Seien $(X, \| \,\|)$, $(Y, \| \,\|)$ normiert und $A : X \to Y$.

1) A kompakt $\iff$ $\Big\{ \{x_n\} \subset X$ ist beschränkte Folge $\implies$ $\{A\,x_n\} \subset Y$ enthält eine konvergente Teilfolge$\Big\}$.

2) A kompakt und linear $\implies$ A vollstetig.

3) Für lineares A gilt:
$$A \text{ kompakt (und damit vollstetig)} \iff A(K_1(0)) \quad \text{relativ kompakt}$$

1) ist offensichtlich (vgl. Satz und Definition 6.1).

2) $K_1(0) \subset X$ beschränkt $\xRightarrow{A \text{ kompakt}}$ $A(K_1(0))$ relativ kompakt, also beschränkt $\xRightarrow{A \text{ linear}}$. Aus der Normdefinition für lineare Operatoren folgt A stetig.

3)„ $\implies$ “ folgt aus 2).
3)„ $\impliedby$ “ Das Bild jeder beschränkten Menge ist relativ kompakt. Für lineare Abbildungen A folgt daraus $\|A\| < \infty$, also A stetig und nach Definition 13.1 A kompakt, insgesamt also A vollstetig.

Bemerkungen:

1. Viele Autoren definieren die Kompaktheit eines Operators nur für lineare Abbildungen. Dann sind die Begriffe kompakt und vollstetig äquivalent.

2. Die Linearität von A wird in Definition 13.1 nicht verlangt. Das ist wesentlich für den Schauder'schen Fixpunktsatz. Siehe dazu Ljusternik/Sobolev: VI, § 3.)

Beispiele

Beispiel 1) $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ normiert, $X \xrightarrow{A \text{ linear, stetig}} Y$, $\dim AX < \infty$ $\Longrightarrow A$ kompakt,
denn: AX ist topologisch isomorph zu einem $\mathbb{R}^d$ und dort ist jede beschränkte Menge relativ kompakt, also A relativ kompakt.

In folgenden Fällen sind die Voraussetzungen von Beispiel 1 erfüllt.

(i) $\dim X < \infty$, $(\overset{A\in L(X,Y)}{\Longrightarrow} \dim AX < \infty)$

(ii) $\dim Y < \infty$, (da $AX \subset Y$)

(iii) $Ax = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\, y_i$ für $f_i \in X^*$, $y_i \in Y$. (nur endlich viele y_i)

Die letzte Abbildung ist wichtig für den Beweis des Schauder'schen Fixpunktsatzes.

Beispiel 2) Sei $B \subset L^p(a,b)$ beschränkt (d.h. $\|x\|_p \le \beta \ \forall x \in B$), $1 < p < \infty$, ,
$Q = [a,b] \times [a,b]$, $k \in L^q(Q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow$
$K : L^p(a,b) \longrightarrow L^q(a,b)$, $(Kx)(s) := \int\limits_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt$ ist vollstetig.

Wir zeigen: a) $Kx \in L^q(a,b) \ \forall x \in L^p(a,b)$ und K ist stetig, b) K ist kompakt.

Beweis a)

Nach Voraussetzung existiert $\int\limits_Q |k(s,t)|^q\, ds\, dt$.

$\overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow}$ Für fast alle s ist $k(s,\cdot) \in L^q(a,b)$. (iterierte Integrale)

$\overset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow}$ Für $x \in L^p(a,b)$ existiert $\int\limits_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt$ für fast alle s und

$$(13.1) \quad \underbrace{\left| \int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt \right|^q}_{\substack{\text{meßbar als Funktion} \\ \text{von } s \text{, da bis auf eine} \\ \text{Nullmenge beschränkt}}} \le \underbrace{\left(\int_a^b |k(s,t)|^q\, dt \right)}_{\substack{\text{als Funktion von } s \\ \text{integrierbar, da} \\ k \in L^q(Q)}} \underbrace{\left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt \right)^{q/p}}_{\substack{\text{existiert} \\ \text{da } x \in L^p}} \quad \text{für fast alle } s.$$

Also gilt: $\left| \int\limits_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt \right|^q$ ist meßbar als Funktion von s und für fast alle s beschränkt, also integrierbar, d.h. $(Kx) \in L^q(a,b)$.

Damit folgt aus (13.1) mit Hölder

$$\|Kx\|_q^q = \int_a^b \left| \int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt \right|^q ds \le \int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^q\, dt\, ds \ \|x\|_p^q, \text{ also}$$

$$\|K\|_q \;\leq\; \left(\int\limits_Q |k(s,t)|^q \, dt \, ds \right)^{1/q} , \tag{13.2}$$

also ist K stetig (da linear und beschränkt).

Beweis b)

Idee: 1) Approximiere K durch ein K_0, das (iii) aus Beispiel 1) erfüllt.

2) Aus der Approximationseigenschaft wird unter Benutzung von Satz 6.1, 3) die Kompaktheit für K hergeleitet.

Wir betrachten zunächst den speziellen Kern

$$k_0(s,t) \;=\; \sum_{\nu+\mu=0}^{n} a_{\nu\,\mu}\, s^\nu\, t^\mu, \qquad a_{\nu\,\mu} \in \mathbb{R}\,.$$

$$\Longrightarrow \quad (K_0 x)\,(s) \;:=\; \sum_{\nu=0}^{n} s^\nu \left(\sum_{\mu=0}^{n-\nu} \int\limits_a^b a_{\mu\,\nu}\, t^\nu\, x(t)\, dt \right)$$

ist ein Element des von den Funktionen s^ν, $\nu = 0, \ldots, n$ aufgespannten linearen, endlich dimensionalen Teilraums und nach Beispiel 1 (iii) gilt: $K_0 x$ ist kompakt, also

$$B \subset L^p(a,b) \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad K_0(B) \text{ relativ kompakt in } L^q(a,b)\,. \tag{13.3}$$

Sei nun allgemein $k \in L^q(Q)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Nun gilt (Weierstraß für mehrere Dimensionen):

α) Für $M \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, beschränkt sind die Polynome dicht in $C(M)$. Aus Satz 4.26 folgt

β) $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Longrightarrow$ $C(M)$ dicht in $(L^p, \|\;\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$.

Nach $\alpha), \beta)$ gibt es also $\forall\, \varepsilon > 0$ ein Polynom $k_0(s,t)$ mit

$$\left(\int\limits_Q |k(s,t) - k_0(s,t)|^q \, ds \, dt \right)^{1/q} \;<\; \varepsilon\,,$$

und wie bei der Herleitung von (13.2) folgt

$$\begin{aligned}
\|Kx - K_0 x\|_q \;&=\; \left(\int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b (k(s,t) - k_0(s,t))\, x(t)\, dt \right|^q ds \right)^{1/q} \\
&\leq\; \left(\int\limits_a^b \left| \left(\int\limits_a^b |k(s,t) - k_0(s,t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \right|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&=\; \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |k(s,t) - k_0(s,t)|^q \, dt \, ds \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \\
&\leq\; \varepsilon\, \|x\|_p \;\leq \varepsilon\, \beta.
\end{aligned} \tag{13.4}$$

Nach (13.3): $K_0(B)$ relativ kompakt $\quad\Longrightarrow\quad$ $K_0(B)$ ε-kompakt (vgl. § 6.1), d.h. $\exists$ endliche Menge $y_1, \ldots, y_m \subset L^q(a,b)$, ein sog. ε-Netz, sodaß

$$\forall\, x \in B \;\exists\, y_j \;: \quad \|K_0 x - y_j\|_q \;<\; \varepsilon\,.$$

Damit und aus (13.4) folgt

$$\|Kx - y_j\|_q \;\leq\; (1+\beta)\,\varepsilon\,,$$

d.h. $\{y_1, \ldots, y_m\}$ ist ein $(1+\beta)\,\varepsilon$-Netz für $K(B)$,

$\Longrightarrow$ $K(B)$ relativ kompakt nach Satz 6.1, 3), denn $\overline{K}(B)$ ist als abgeschlossene Menge des vollständigen Raumes $L^q(a,b)$ vollständig. ■

Beispiel 3) Sei $B \subset L^p(a,b)$ beschränkt, $1 < p < \infty$, $Q = [a,b] \times [a,b]$, $k \in C(Q)$

$$\Longrightarrow \qquad (Kx)\,(s) \;=\; \int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt$$

ist eine vollstetige Abbildung von $(L^p(a,b), \|.\|_p) \longrightarrow (C[a,b], \|.\|_\infty)$.

Bemerkung:

α) Dies ist kein Spezialfall von Beispiel 2), da die Bildräume verschieden sind.

β) Da der Bildraum $C[a,b]$ ist, muß für den Kompaktheitsnachweis Arzela-Ascoli verwendet werden.

Beweis 3):

Wir zeigen zunächst: K ist gleichgradig stetig $\forall\, x \in B$, (d.h. $\|x\| \leq \beta$).

Da k gleichmäßig stetig auf Q folgt
$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0 :\ |k(s_1,t) - k(s_2,t)| < \varepsilon$ falls $|s_1 - s_2| < \delta$.
Damit erhält man :

$$\begin{aligned}(13.5) \qquad |(Kx)\,(s_1) - (Kx)\,(s_2)| &\leq \int_a^b |k(s_1,t) - k(s_2,t)|\,|x(t)|\,dt \\ &\leq (\int_a^b |k(s_1,t) - k(s_2,t)|^q\ dt)^{\frac{1}{q}}\,\|x\|_p \\ &\leq \varepsilon\,(b-a)\,\|x\|_p,\end{aligned}$$

d.h. Kx stetig in s und sogar gleichgradig stetig für alle $\|x\|_p \leq \beta$. (δ unabhängig von x)

Behauptung: K ist vollstetig.

K ist linear in x und analog zu (13.5) gilt $|(Kx)\,(s)| \leq (\max\limits_Q k)\ (b-a)\,\|x\|_p$,
was zeigt, daß K stetig in x ist und in s punktweise beschränkt $\forall\ \|x\|_p \leq \beta$.
Arzela-Ascoli (Satz 6.6) liefert dann: $K(B)$ relativ kompakt in $C[a,b]$. ■

Beispiel 4) K wie in 3), aber definiert auf $(C[a,b], \| \|_\infty)$: $K : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$, dann bleiben die obigen Aussagen richtig.

Beispiel 5) Ist $\dim X = \infty$, so ist die identische Abbildung $I : X \to X$ zwar stetig, aber nicht kompakt (Satz 6.4).

Beispiel 6) Sind Originalraum und Bildraum mit unterschiedlichen Normen versehen, so kann auch die identische Abbildung kompakt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei

$$\begin{aligned} X &= C^1[a,b], \quad \|x\|_{C^1} = \max\big(\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\big) \\ Y &= C[a,b], \quad \|y\|_Y = \|y\|_\infty \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die „Einbettung“

$$\left.\begin{aligned} I : C^1[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}\right\} \text{ ist kompakt},$$

denn: $B \subset X$, $\|x\|_X \le \beta \Longrightarrow \|Ix\|_Y \le \beta$ für $x \in B$, also $Ix(t)$ gleichmäßig beschränkt $\forall\, t \in [a,b]$ und $|x(t) - x(t_0)| = |x'(\tau)|\,|t - t_0| \le \beta\,|t - t_0|$ zeigt, daß $I(B)$ gleichgradig stetig ist, also nach Arzela-Ascoli $I(B)$ relativ kompakt in Y ist.

Wichtig für die Anwendung auf Differentialgleichungen sind die Einbettungssätze für Sovolev-Räume, die wir hier (ohne Beweis) zitieren (vgl. Alt, Kapitel 8.8). (Erinnerung: Hölder-Räume in § 4)

Mit Hilfe von Regularitätssätzen kann man aus schwachen Lösungen starke Lösungen gewinnen. Dies geschieht in zwei Schritten:

1) Man zeigt, daß abhängig von Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung, die rechte Seite und den Rand des Gebiets die schwache Lösung sogar in einem $H^{m,2}$, $m > 1$, liegt. Als Beispiel zitieren wie folgenden Satz (vgl. Evans: Partial Differential Equations, AMS, § 6.3, Theorem 5)

Satz 13.2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, für ein $m \in \mathbb{N}$ gelte
$a_{i,j}, b_j, c \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $f \in H^{m+2}(\Omega)$ $\partial\Omega$ ein $C^{m+2}-$ Rand und $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j} u_{x_i}) u_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} b_j + cu =& f \quad \text{in } \Omega, \\ u =& 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann ist $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m+2,2}(\Omega)$.

2) Danach kann man die schwachen Lösungen kompakt in Räume stetig differenzierbarer Funktionen einbetten. Interessant ist hierbei die Abhängigkeit von der Raumdimension. (vgl. Alt, Kapitel 8.8). (Erinnerung: Hölder-Räume in § 4)

Satz 13.3 Einbettung von Sobolev-Räumen in Hölder-Räume
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $m \geq 1,\ 1 \leq p < \infty,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt:

1. Ist $m - \dfrac{n}{p} \geq k + \alpha,\ 0 < \alpha < 1$, so existiert eine stetige Einbettung

$$J:\ \overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega) \to C^{k,\alpha}(\Omega)\,,$$

genauer: $\forall\, u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega)\ \exists!$ stetige Funktion, welche fast überall mit u übereinstimmt (sie wird wieder mit u bezeichnet), so daß gilt

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \;\leq\; C(\Omega, n, m, p, k, \alpha) \cdot \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}\,.$$

2. Diese Einbettung ist kompakt, falls $m - \dfrac{n}{p} > k + \alpha$.

3. Hat Ω einen Lipschitzrand (vgl. Alt A 5.3), so gelten die Aussagen 1. und 2. auch für $H^{m,p}(\Omega)$ statt $\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega)$.

Damit ist auch das Existenzproblem für partielle elliptische Randwertaufgaben (Lax-Milgram-Theorie) (vgl. § 8) weitergehend beantwortet.
Wir stellen nun einige wichtige Eigenschaften kompakter Operatoren zusammen.

Eigenschaften kompakter Operatoren

Wir beweisen zunächst die – auch für sich interessante – Hilfsaussage.

Lemma 13.4
Sind X, Y normiert, $A \in L(X,Y)$, dann gilt

$x_n \rightharpoonup x$ in X $\Longrightarrow$ $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in Y (folgenstetig bzgl. der schwachen Konvergenz).

Beweis:

$$\begin{aligned}
x_n \rightharpoonup x \;&\Longleftrightarrow\; f(x_n) \to f(x) \quad \forall\, f \in X^*, \quad \text{also auch } \forall\, f \in \operatorname{Im}(A') \subset X^* \\
&\Longrightarrow\; A'g^*(x_n) \to A'g^*(x) \quad \forall\, g^* \in D(A') = Y^* \quad \text{nach Satz 12.5} \\
&\Longleftrightarrow\; g^*(Ax_n) \to g^*(Ax) \quad \forall\, g^* \in Y^* \quad \text{(Definition von } A'\text{)} \\
&\Longleftrightarrow\; Ax_n \rightharpoonup Ax \quad \text{in } Y\,.
\end{aligned}$$

■

Damit können wir die wichtige Aussage beweisen, daß lineare, kompakte Operatoren schwach konvergente Folgen in stark konvergente Folgen abbilden, beweisen.

Satz 13.5
Sind X, Y normierte Räume, $A : X \xrightarrow{\text{kompakt, linear}} Y$, so gilt

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \to Ax \text{ in } Y\,.$$

Beweis:
Bekannt ist A kompakt, linear $\Longrightarrow$ A vollstetig $\Longrightarrow$ A stetig $\xRightarrow{\text{Lemma 13.4}}$

$$(*) \qquad Ax_n \rightharpoonup Ax$$

Annahme: $Ax_n \not\to Ax \iff \exists$ Teilfolge $\{\tilde{x}_n\} \subset \{x_n\}$ und $\varepsilon > 0$, so daß

$$(**) \qquad \|A\tilde{x}_n - Ax\| > \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Nun gilt: $x_n \rightharpoonup x \xRightarrow{\text{Satz 11.8}} \{x_n\}$ beschränkt $\Longrightarrow$ $\{\tilde{x}_n\}$ beschränkt
$\xRightarrow{A \text{ kompakt}}$ $\{A\tilde{x}_n\}$ enthält konvergente Teilfolge $\{A\hat{x}_n\}$: $A\hat{x}_n \to y_0$.

Da der Grenzwert bzgl. der schwachen Konvergenz eindeutig ist,
folgt aus $(*)$ $Ax = y_0$ **W!** zu $(**)$ ■

Satz 13.6
Seien Z, X, Y normierte Räume, dann gilt

1. $Z \xrightarrow{B \text{ beschränkt}} X \xrightarrow{A \text{ kompakt}} Y \Longrightarrow AB$ kompakt.
2. $X \xrightarrow{A_i \text{ kompakt}} Y \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$ kompakt.
3. Ist Y vollständig, $A_i : X \to Y$ eine Folge kompakter, linearer Abbildungen, die in $L(X,Y)$ gegen eine Abbildung A konvergieren (d.h. $\|A_n - A\| \to 0$), $\Longrightarrow$ A ist auch kompakt.
4. Ist Y vollständig und $A : X \to Y$, so ist

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) y_i \text{ mit } f_i \in X^\star,\ \|f_i\|_{X^*} \le 1, \quad \|y_i\|_Y \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$$

kompakt.

Beweis

1. $H \subset Z$ beschränkt $\Longrightarrow$ $B(H)$ beschränkt $\Longrightarrow$ $AB(H)$ relativ kompakt.

2. Endliche Summen relativ kompakter Mengen sind relativ kompakt.

3. Aufgabe. Hinweis: Man zeige: Ist $M \subset X$ beschränkt, so existiert ein ε-Netz für AM (vgl. § 13, Beispiel 2, Beweis b)).

4. Die Abbildungen $A_m(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \, f_i(x) y_i$ sind nach § 13, Beispiel 1, S 169 kompakt. Man kann 3. anwenden und erhält: A kompakt. ■

Bemerkung:
Falls Y ein Banachraum ist, bilden die kompakten, linearen Abbildungen also einen abgeschlossenen Teilraum $K(X,Y)$ von $L(X,Y)$.
Für die Aussage 3) gibt es auch eine Formulierung für nichtlineare, vollstetige Abbildungen.

Satz 13.7
Seien $(X, \| \|)$ normiert, $(Y, \| \|)$ Banachraum, $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ Teilräume, $\overline{X}_0 = X$,

$$A_0 \; : \; X_0 \xrightarrow{\text{kompakt, linear}} Y_0 \,.$$

$\Longrightarrow$

Für die eindeutige Erweiterung A von A_0 (vgl. Satz 8.2) $A \; : \; X \xrightarrow{\text{linear}} Y$ gilt dann

$$A(X) \subset Y_0 \quad \text{und} \quad A \, : \, X \longrightarrow Y_0 \quad \text{ist kompakt} \,.$$

Bedeutung:

1. Bei der Erweiterung bleibt die Kompaktheit erhalten.Man beachte zum Erweiterungssatz, daß dieser die Vollständigkeit des Bildraums voraussetzt. Deshalb ist nicht von vorneherein klar, ob die Erweiterung ihre Bilder in Y_0 oder in Y hat.
2. Der Wertebereich wird nicht erweitert. Dies ist besonders interessant im Fall $X = Y, \; X_0 = Y_0$.
3. In der Spektraltheorie findet der Satz Anwendung beim Beweis, daß sich die Spektra der Operatoren, die auf dichten Teilräumen definiert sind, nicht von den Spektra der Erweiterungen unterscheiden (wird benötigt zum Beweis von Satz 14.8).

Beweis:
Wir zeigen: Für alle beschränkten $G \subset X$ liegt $A(G)$ in einer in Y_0 kompakten Menge M.
Dann ist auch $A(G)$ relativ kompakt, denn
$\{x_n\}$ beschränkt in $G \Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\{\tilde{x}_n\}$: $\{A\tilde{x}_n\}$ konvergiert in M. Der Grenzwert muß aber in $\overline{A(G)}$ liegen, also ist $\overline{A(G)}$ kompakt.

Zunächst gilt:
$\forall \, G$ beschränkt $\subset X$ $\exists \, B$ beschränkt $\subset X_0$, sodaß $G \subset \overline{B}$, denn

$$\exists\, K_s(0) \subset X:\ G \subset \overline{K_s(0)},\ B := \overline{K_s(0)} \cap X_0 \implies \overline{B} = \overline{K_s(0)}.$$

Die Behauptung des Satzes ist bewiesen, wenn gezeigt wird:

$$A(\overline{B}) \overset{(1)}{\subset} \overline{A(B)}^{Y} \overset{B\subseteq X_0}{=} \overline{A_0(B)}^{Y} \overset{(2)}{=} \overline{A_0(B)}^{Y_0} \subset Y_0,$$

denn wegen $A(G) \subset A(\overline{B})$ liegt $A(G)$ in der abgeschlossenen Menge $\overline{A(B)}^{Y} \subset Y$.
Mit 2) folgt: $\overline{A(B)}^{Y}$ ist gleich der in Y_0 kompakten Menge $\overline{A_0(B)}^{Y_0}$, d.h. die abgeschlossene Menge $\overline{A(B)}^{Y}$ liegt in Y_0 und ist dort kompakt.

Beweis (1): Sei x_0 Häufungspunkt von B $(x_0 \in \overline{B})$

$$\implies \exists\, \{x_n\} \subset B,\ x_n \to x_0 \xRightarrow{A \text{ stetig}} Ax_n \to Ax_0 \text{ d.h. } Ax_0 \text{ HP von } A(B)$$

also $Ax_0 \in \overline{A(B)}^{Y}$.

Beweis (2): $A_0(B)$ ist relativ kompakt in Y_0 laut Voraussetzung, d.h. $\overline{A_0(B)}^{Y_0}$ kompakt.
$\implies$ $\overline{A(B)}^{Y_0}$ abgeschlossen in Y, denn
ist $y \in Y$ Häufungspunkt von $\overline{A_0(B)}^{Y_0}$ $\implies$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \{y_n\} \subset \overline{A_0(B)}^{Y_0}:\ y_n \to y \\ \overline{A_0(B)}^{Y_0} \text{ kompakt} \implies \exists \text{ Teilfolge } \{\tilde{y}_n\} \subset \{y_n\}:\ \tilde{y}_n \to \tilde{y} \in \overline{A_0(B)}^{Y_0} \end{array}\right\}\ y = \tilde{y} \in Y_0$$

$$\implies \overline{A(B)}^{Y_0} = \overline{A(B)}^{Y} = \overline{A_0(B)}^{Y} \subset Y_0, \text{ also } A \text{ kompakt und } A(X) \subset Y_0. \qquad \blacksquare$$

Satz 13.8 Schauder
Seien X, Y normiert, $A : X \xrightarrow{\text{linear}} Y$. Dann gilt

$$A \text{ kompakt} \implies A' : Y^* \xrightarrow{\text{kompakt}} X^*$$

$$\Longleftarrow \text{ gilt, falls zusätzlich } Y \text{ vollständig ist.}$$

Beweis:
Wir zeigen nur die für die Anwendung wichtigere Richtung „$\Longrightarrow$“ (zum Beweis von „$\Longleftarrow$“ vgl. Wloka § 24, S. 210, Alt Satz 16.6)

Zu zeigen ist: $\{g_n\} \subset Y^*$, $\|g_n\| \le 1 \implies \{A'\, g_n\}$ enthält eine konvergente Teilfolge.

Erinnerung: Die Konvergenz muß gezeigt werden bzgl. der Norm

$$\|A'g\| = \sup_{\|x\|\le 1} |(A'g)\,(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |g(Ax)| = \max_{y \in \overline{A(\overline{K_1(0)})}} |g(y)| = \|g\|_{C(K)},\ \text{wo} K := \overline{A(\overline{K_1(0)})}.$$

Beachte: $\overline{A(\overline{K_1(0)})}$ ist kompakt

Der Kern des Beweises liegt im Nachweis von

$(*)$ $\{g_n\}$ ist relativ kompakt bzgl. der $C(K)-$ Norm,

denn dann folgt: $\exists$ eine konvergente Teilfolge $\{\tilde{g}_n\}$, welche auch Cauchyfolge ist, d.h.

$$\begin{array}{llll} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0\ : & |\tilde{g}_n(y) - \tilde{g}_m(y)| \ <\ \varepsilon & \forall\, n,m > k_0 \wedge & \forall\, y \in A(K_1(0)) \\ & \qquad \| & & \\ & |A'\tilde{g}_n(x) - A'\tilde{g}_m(x)| & & \forall\, x \in K_1(0)\,, \end{array}$$

d.h. $\{A'\tilde{g}_n\}$ ist Cauchy-Folge in X^* $\overset{X^*\ \mathrm{BR}}{\Longrightarrow}$ $\{A'\tilde{g}_n\}$ konvergent.

Beweis $(*)$: Nachweis der Voraussetzungen von Arzela-Ascoli (Satz 6.6):

Nachweis der Vorausetzungen von Arzela-Ascoli (Satz 6.6):

$\overline{A(\overline{K_1(0)})} =: K$ ist kompakt, da A kompakt, $g_n \in C(K)$ (genauer $g_n\big|_K$)

$\|g_n\|_{C(K)} \ =\ \max\limits_{y\in K} |g_n(y)| \ =\ \sup\limits_{\|x\|\le 1} |g_n(Ax)| \ \le\ \underbrace{\|g_n\|}_{\le 1}\, \|A\|\, \underbrace{\|x\|}_{\le 1} \ \le\ \|A\|$,

$\{g_n\}$ ist also gleichmäßig beschränkt.

$|g_n(y) - g_n(y_0)| \ =\ |g_n(y-y_0)| \ \le\ \underbrace{\|g_n\|}_{\le 1}\, \|y-y_0\|$, also gleichgradig stetig.

$\xRightarrow{\ Arzela-Ascoli\ }$ $\{g_n\}$ ist relativ kompakt. ■

Einen wesentlichen Anwendungsbereich für kompakte Operatoren liefert der Schauder'sche Fixpunktsatz, dessen 2. Fassung wir (ohne Beweis) zitieren.

Satz 13.9 Fixpunktsatz von Schauder, 2. Fassung

$(X, \|\ \|)$ ein Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen, konvex,

$f:\ M \xrightarrow{\text{stetig}} f(M) \subset M$ und $f(M)$ relativ kompakt.

$\Longrightarrow$ f besitzt mindestens einen Fixpunkt in M.

Bemerkung:
Ist M beschränkt und f kompakt, sind die Voraussetzungen erfüllt.

(Einfache Anwendung:) Beweise den Existenzsatz von Peano (Lösung von AWAn für gewöhnliche Differentialgleichungen) mit Satz 13.8.

Formuliere die AWA in ein äquivalentes Integralgleichungsproblem um und zeige, daß der zugehörige Integraloperator kompakt ist (Aufgabe).

Wir wenden uns im folgenden der Spektraltheorie kompakter Operatoren zu.

§ 14 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Vorbemerkung:
Ist $A : \mathbb{C}^n \overset{\text{lin}}{\longrightarrow} \mathbb{C}^n$ und $Ax = \lambda\, x,\;\; \lambda \in \mathbb{C},\; x \in \mathbb{C}'\,, x \neq 0$, so heißt λ Eigenwert (EW) zum Eigenvektor (EV) x.

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ EW von } A \iff (A - \lambda\, I)x = 0,\;\; x \neq 0 &\iff A_\lambda := (A - \lambda\, I) \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \exists\, x \in \operatorname{Ker} A_\lambda,\;\; x \neq 0. \end{aligned}$$

Diese Aussage ist für ∞-dimensionale Räume i.a. falsch.

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} C[a,b] & \overset{A}{\longrightarrow} & C[a,b] \\ u & \longrightarrow & Au \;:\;\; Au(x) = x \cdot u(x) \end{array}$$

Sei $A_\lambda u = (A - \lambda\, I)u = xu - \lambda\, u = g$, für ein $g \in C[a,b],\;\; g > 0$ in $[a,b]$.

Man erkennt: 1) $\exists\, \lambda \in [a,b] :\; A_\lambda$ nicht invertierbar
2) $\nexists\, u \;:\;\; xu = \lambda\, u$ für beliebige $\lambda \in [a,b]$, λ ist also kein EW.

Es zeigt sich jedoch, daß man zumindest für kompakte Operatoren eine Theorie aufbauen kann, die weitgehend zum endlich dimensionalen Fall analog ist.

Definition 14.1
Sei $(X, \|\ \|)$ normiert und $A \in L(X) := L(X,X)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *regulär* $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, A_\lambda^{-1} \in L(X)$ mit $A_\lambda := (A - \lambda\, I)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Spektralwert* $\overset{\text{def}}{\iff}$ λ ist nicht regulär.

$\sigma(A) :=$ *Spektrum von* A := Menge der nicht regulären $\lambda \in K \;= \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert von* A $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{Ker} A_\lambda \neq \{0\}$.

$x \in \operatorname{Ker} A_\lambda \backslash \{0\}$ heißt *Eigenvektor* (*Eigenfunktion*) *zum Eigenwert* λ.

Ist λ EW, so heißt $\operatorname{Ker} A_\lambda \setminus \{0\} = \{x \in X : Ax = \lambda\, x, x \neq 0\}$ *Eigenraum von* λ.

$\rho(A) :=$ *Resolventenmenge* $=$ Menge der regulären λ-Werte.

$$\left.\begin{array}{rrcl} R: & \rho(A) & \longrightarrow & L(X) \\ & \lambda & \longrightarrow & A_\lambda^{-1} = (A - \lambda\, I)^{-1} \end{array}\right\} \text{ heißt } \textit{Resolventenfunktion}\,.$$

Bemerkung: Gelegentlich wird die Bezeichnung $A_\lambda^{-1}(0) := \operatorname{Ker} A_\lambda$ benutzt, obwohl A_λ^{-1} gar nicht existiert.

Offensichtlich gilt:

$$\boxed{\lambda \text{ EW} \implies A_\lambda \text{ nicht invertierbar} \implies \lambda \text{ Spektralwert}\,.}$$

Die Umkehrung gilt nicht, wie das obige Beispiel zeigt.

Bemerkung:
Teilweise findet man in der Literatur die Definition: (für $A \in L(X)$, X normiert)

$$\lambda \text{ regulär} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \operatorname{Im}(A - \lambda I) \text{ dicht in } X \\ \exists\, A_\lambda^{-1} \text{ stetig auf } \operatorname{Im} A_\lambda\,, \quad (A_\lambda = A - \lambda I) \end{cases}$$

Ist X ein BR, so kann man A_λ^{-1} stetig auf X fortsetzen. Dann stimmt diese Definition mit der aus Definition 14.1 überein (⟶ Definitionen lesen in der Literatur).

Eine hinreichende Bedingung für „ λ regulär" liefert der Satz von der offenen Abbildung (Satz 10.3).

Ist X ein Banach Raum, $A \in L(X)$ und $A - \lambda I$ bijektiv **auf** X
$\Longrightarrow$ λ regulär (d.h. $\exists\, A_\lambda^{-1}$ und ist stetig).

Häufig wird das Spektrum noch unterteilt:

Ist X BR und $A_\lambda = (A - \lambda I) \in L(X)$, so können folgende Fälle auftreten:

	λ heißt	Menge dieser λ heißt
I. A_λ ist bijektiv	regulär	Resolventenmenge $\rho(A)$
II. A_λ ist nicht bijektiv, jedoch	Spektralwert	Spektrum $\sigma(A)$
1) injektiv $\wedge\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = X$		kontinuierliches Spektrum
2) injektiv $\wedge\ \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq X$		Residualspektrum
3) nicht injektiv	Eigenwert	Punktspektrum

Wir leiten zunächst eine Darstellung für den Resolventenoperator her und eine Abschätzung für das Spektrum.

Satz 14.2
Sei $(X, \|\ \|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$.
$\Longrightarrow$

Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt: $\exists\, A_\lambda^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$ und $\rho(A)$ ist offen.

Bemerkung:

1. Diese Aussage bedeutet $\sigma(A) \subset \{\, z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\| \,\}$ (wie bei Matrizen)

2. Diese Aussage kann verschärft werden (mit Hilfsmitteln aus der Funktionentheorie) zu:
   Für den Spektralradius $r_\sigma(A)$ gilt

$$r_\sigma(A) \;:=\; \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

(vgl. Taylor: Spectrum of a bounded linear operator, § 5.2 f.; Alt, Satz 9.4).

Beweis 14.2:

Wir wenden Satz 7.5 (Neumann'sche Reihe) an auf den Operator $T := \dfrac{A}{\lambda}$. Wegen $|\lambda| > \|A\|$ folgt $\|T\| < 1$, somit

$$(I-T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A^n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n .$$

Hieraus folgt für $A_\lambda \;=\; A - \lambda\, I \;=\; -\lambda\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$

$$A_\lambda^{-1} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\, A^n .$$

$\rho(A)$ offen folgt direkt aus Satz 7.6 (Existenz der Inversen benachbarter Operatoren). ■

Als technisches Hilfsmittel für die folgenden Sätze beweisen wir

Lemma 14.3
Sei X normiert, $A \in L(X)$, M, L seien abgeschlossene Unterräume von X mit $M \underset{\neq}{\subset} L \subset X$, (inbesondere: $\exists\, b \in L\backslash M$.)

$\Longrightarrow$

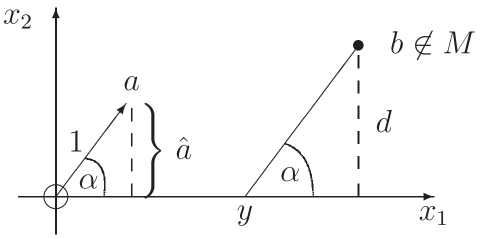
1. $\forall\, b \in L \setminus M\ \exists\, y \in M :$ für $a = \dfrac{b-y}{\|b-y\|}$ gilt $\|a-m\| \geq \dfrac{1}{2} \quad \forall\, m \in M$.

2. Für $T := I - A$ mit $TL \subset M$, folgt

$$\|Aa - Am\| \;\geq\; \frac{1}{2} \qquad \forall\, m \in M\, .$$

Die folgende geometrische Interpretation liefert auch die Idee für den Kern des Beweises des Lemmas.

geometrische Interpretation



$M \widehat{=} x_1$-Achse, L = Ebene und $b \notin M$, dann $\exists\, y \in M$ mit $\|b-y\| \leq 2d$ d.h. $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$. Wird $b-y$ zu 1 normiert,

$$a \;=\; \frac{b-y}{\|b-y\|}\,,$$

so gilt

$$\inf_{m\in M}\|a-m\| = \hat{a} = \underbrace{\|a\|}_{=1}\sin\alpha = \frac{d}{\|b-y\|} \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

und man sieht anschaulich (auch aus folgenden Beweisen), daß $\hat{a}$ beliebig nahe bei 1 sein kann.

Diese Abschätzung ist der Kern des folgenden Beweises (vgl. $(\,*\,)$).

Beweis 14.3:
Wähle $b \in L\backslash M$.

$$\begin{aligned} M \text{ abgeschlossen} &\implies \inf_{y\in M}\|b-y\| \;=:\; d > 0 \\ &\implies \exists\, y \in M \;:\; \|b-y\| \;\leq\; 2d\,. \end{aligned}$$

Für $a = \dfrac{b-y}{\|b-y\|}$ und $m \in M$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|a-m\| &= \Big\|\frac{b-y}{\|b-y\|} - m\Big\| \\ &= \underbrace{\frac{1}{\|b-y\|}}_{\geq\,(2d)^{-1}}\underbrace{\big\|\underbrace{m\|b-y\|+y}_{\in M}-b\big\|}_{\geq\, d} \;\geq\; \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $m \in M$ wegen $TL \subset M$, $A = I-T$, $M \subset L$, also $Am \in M$

$$\|Am - Aa\| \;=\; \|\overbrace{\underbrace{m-Tm}_{Am}+\underbrace{Ta-a}_{-Aa}}^{\in M}\| \;\geq\; \frac{1}{2}\,.$$

■

Der folgende Satz gestattet unter anderem die Aussage, dass zu einem Eigenwert nur endlich viele linear unabhängige Eigenelemente exisieren.

Satz 14.4
Sei $(X, \| \ \|)$ normiert, $A : X \xrightarrow[\text{lin}]{\text{komp}} X,\ T = I - A$.
$\Longrightarrow$

1. $\dim \operatorname{Ker} T \ < \ \infty$.
2. $TX \ = \ \operatorname{Im} T$ ist abgeschlossen (in X).
3. $\operatorname{Ker} T \ = \ \{0\} \ \Longrightarrow \ T$ ist topologischer Isomorphismus von X auf TX.
4. $\operatorname{codim} TX \ < \ \infty \quad (\operatorname{codim} TX := \dim \complement(TX))$.

Bemerkungen zum Satz:

1. Wird der Satz wird auf die Resolventenfunktion angewendet , also auf $A_\lambda = (A{-}\lambda\, I) = -\lambda\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$, wenn man A durch $\dfrac{A}{\lambda}$ ersetzt, dann bedeutet 1) u.a.:

   Zu jedem EW λ von A gibt es nur endlich viele linear
   unabhängige Eigenelemente.

2. Behauptung 2 ist nicht selbstverständlich (vgl. Beispiel 1 nach Satz 7.6).
3. Behauptung 4 besagt, daß der Bildraum von T, falls $\dim X = \infty$, nicht wesentlich kleiner ist als X. Im **Zusatz 4.6** zeigen wir sogar $TX = X$.
4. Die Kompaktheit eines linearen Operators hat immer Beziehungen zu Aussagen über endliche Dimensionen (über den Satz von Riesz). Dies kommt in Beweisteil zu 1 zum Ausdruck.
   Die Kompaktheit eines Operators rettet oft das, was durch die unendliche Raumdimension verloren geht. als X.

Beweis 1)

$$x \in \operatorname{Ker} T \iff (I - A)x = 0 \iff I\big|_{\operatorname{Ker} T} \ = \ A\big|_{\operatorname{Ker} T}.$$

Da A kompakt, ist I kompakt auf $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Ker} T$ ist abgeschlossener Teilraum, also $I(K_1(0) \cap \operatorname{Ker})\, T$ relativ kompakt $\overset{\text{Satz 6.4}}{\underset{\text{(Riesz)}}{\Longleftrightarrow}}$ $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

Beweis 2)
Zeige (indirekt): Jeder HP y von $\operatorname{Im} T$ gehört zu $\operatorname{Im} T$, d.h. $\exists\, x \in X : Tx = y$.

Annahme: $y \notin \operatorname{Im} T \quad \Longrightarrow$

$$(\,*\,) \qquad \exists\,\{x_n\} \subset X \text{ und } Tx_n \to y \qquad \text{Œ}\; y \neq 0,\ \text{ und } x_n \notin \operatorname{Ker} T,$$

denn $T0 = 0$ liefert $y \in \operatorname{Im} T$, sei also $y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \inf \|y{-}u\| > 0$, da Ker T abgeschlossen $\quad \Longrightarrow \quad Tx_n \neq 0$ für große n, also $x_n \notin \operatorname{Ker} n\, T$ für große n, also Œ $\ \forall n$.

Es genügt zu zeigen:

(∗∗) $\qquad \exists$ Teilfolge $\{\tilde{x}_n\} \subset \{x_n\}$ und ein $\tilde{x} \in X$ mit $\tilde{x}_n \to \tilde{x} \in X$,

denn dann folgt $T\tilde{x}_n \to T\tilde{x}$, also $T\tilde{x} = y$.

Trick:
Um mehr Bewegungsfreiheit zu haben, betrachten wir statt $\{x_n\}$ eine Folge $\{x_n - u_n\}$ für ein geeignetes $u_n \in \operatorname{Ker} T$. Sie erfüllt auch $(*)$.

Angabe der u_n: Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ u_n so, daß für $t_n = \dfrac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}$ gemäß Lemma 14.3 a) gilt:

$$(***) \qquad \|t_n - t\| \geq \frac{1}{2} \qquad \forall t \in \operatorname{Ker} T\,.$$

Wir zeigen zuerst: $\|x_n - u_n\|$ ist beschränkt.

Annahme: $\|x_n - u_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, damit

$$Tt_n = \frac{Tx_n - \overset{\overset{0}{\|}}{\overbrace{Tu_n}}}{\|x_n - u_n\|} \begin{array}{l} \longrightarrow\ y \\ \longrightarrow\ \infty \end{array}, \quad \text{also } Tt_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Wegen $\|t_n\| = 1$, A kompakt $\exists$ konvergente Teilfolge $\{A\hat{t}_n\}$: $A\hat{t}_n \to t$.
Wegen $T = I - A$ bzw. $I = A + T$ gilt

$$\hat{t}_n = \underset{\underset{0}{\downarrow}}{T\hat{t}_n} + \underset{\underset{t}{\downarrow}}{A\hat{t}_n} \qquad \Longrightarrow\ \hat{t}_n \to t,\ T\hat{t}_n \to Tt,\ \text{also } t \in \operatorname{Ker} T\,. \quad \textbf{W!} \text{ zu } (***)$$

Bemerkung:
Die Ersetzung der x_n durch $x_n - u_n$ ist nur für die Anwendung des Lemmas erforderlich.

Wir haben also: $\|x_n - u_n\|$ beschränkt.

A kompakt $\Longrightarrow$ $\exists$ eine konvergente Teilfolge $\{\tilde{x}_n - \tilde{u}_n\}$: $A(\tilde{x}_n - \tilde{u}_n) \to g$

$I = T + A$ liefert (vgl. $(*)$)

$$\tilde{x}_n - \tilde{u}_n = \underset{\underset{y}{\downarrow}}{T(\tilde{x}_n - \tilde{u}_n)} + \underset{\underset{g}{\downarrow}}{A(\tilde{x}_n - \tilde{u}_n)} \qquad \Longrightarrow\ \tilde{x}_n - \tilde{u}_n \to y + g\,.$$

Beweis 3)

$\operatorname{Ker} T = \{0\}$ $\Longrightarrow$ T bijektiv auf TX $\Longrightarrow$ $\exists T^{-1}$ auf TX und ist linear. Wie im Beweis von 2. zeigt man „T abgeschlossen“, d.h. für jedes abgeschlossene $B \subset X$ ist TB abgeschlossen. (Man ersetze im Beweis 2. X durch B und $\operatorname{Ker} T$ durch $\{0\}$.)

T abgeschlossen $\Longrightarrow$ T^{-1} stetig also T topologischer Isomorphismus von X auf TX.

Beweis 4)
Annahme: $\operatorname{codim} TX = \dim \complement(TX) = \infty$.

$$\Longrightarrow\ \nexists \text{ Teilraum } S \subset X \text{ mit } \dim S < \infty \text{ und } S \oplus TX = X\,. \quad (\oplus\text{= direkte Summe.})$$

$$\Longrightarrow\ \exists\,\{v_n\} \subset X:\ v_n \notin \underbrace{\underbrace{TX}_{\substack{\text{abgeschl.}\\ \text{nach 2.}}}\ \underbrace{\bigoplus_{\nu=1}^{n-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{abgeschl.}}}{[v_\nu]}}_{\substack{\text{abgeschl. nach}\\ \text{Satz 4.14}}}}_{\text{abgeschl. nach Satz 4.14}} \quad =:\ V_{n-1}$$

$$\Longrightarrow\ V_{n-1} \text{ abgeschlossen in } X\,.$$

Nun liefert Lemma 14.3

$$\exists\, w_n \in V_n,\ \|w_n\| = 1\ \wedge\ \|Aw_n - Aw_j\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall\, j \leq n-1\,.$$

$$\Longrightarrow \quad Aw_n \text{ hat keine konvergente Teilfolge } \mathbf{W!} \text{ zu } A \text{ kompakt}\,,$$

also $\operatorname{codim} TX < \infty$. ■

Der folgende Satz ist eine technische Vorbereitung auf den Spektralsatz (Satz 14.7). Er wird dort angewandt auf den Operator A/λ statt A.

Satz 14.5
Sei (wie in 14.4) X normiert, $A \in L(X)$ kompakt, $T = I - A$.

Dann gilt für die Räume $N_k = \operatorname{Ker} T^k$, $F_k = T^k X$, $k = 1, 2, \ldots$

1. $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$, alle N_k sind abgeschlossene und endlichdimensionale Teilräume.
   $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, alle F_k sind abgeschlossen und haben endliche Kodimensionen in X.
2. Es gibt ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $N_n = N_{n+1}$.
   Mit diesem n gilt $N_k = N_n$, $F_k = F_n$ $\forall\, k \geq n$.
3. $X = N_n \oplus F_n$ mit dem n aus 2).
4. Die Abbildung $T\big|_{F_n}$ ist ein topologischer Isomorphismus von F_n auf sich (n gemäß 2)).

Bemerkungen:
zu 1. Ist $X = \mathbb{R}^n$ und A eine quadratische Matrix, so sind die Vektoren, die in N_ν, $\nu > 1$, liegen, Hauptvektoren der Stufe ν.
zu 4. In Satz 14.4,3. wurde nur gezeigt, daß T ein topologischer Isomorphismus von X auf TX ist.

Beweis 1)

$$\left.\begin{array}{rcl}\operatorname{Ker}T & \subset & \operatorname{Ker}T^2\\ \text{bzw. } \operatorname{Ker}T^{n-1} & \subset & \operatorname{Ker}T^n\end{array}\right\} \Longrightarrow N_1\subset N_2\subset\ldots\subset N_n\subset\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r}TX\subset X \text{ also } T^2X\subset TX\\ T^{k+1}X\subset T^kX\end{array}\right\} \Longrightarrow F_1\supset F_2\supset F_3\ \ldots$$

Es ist

$$T^k = (I-A)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}A^i = I-\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}A^i}_{=:\ A_k \text{ kompakt}} =:\ I-A_k$$

Der Rest folgt aus der Anwendung der Teile 1)-4) des vorigen Satzes auf $T^k = I - A_k$.

Beweis 2) (indirekt)
Annahme $N_k \neq N_{k+1} \quad \forall\, k$.

Es ist $x\in N_{k+1} \Longleftrightarrow T^{k+1}x = 0 = T^k(Tx) \Longrightarrow Tx\in N_k$ d.h. $\underline{TN_{k+1}\subset N_k}$.

Alle N_k sind abgeschlossen. Die Voraussetzungen von Lemma 14.3 sind also für N_k und N_{k+1} erfüllt.

$$\Longrightarrow\ \exists\,\{x_k\},\ x_k\in N_k\backslash N_{k-1},\ \|x_k\|=1\ \wedge\ \|Ax_k-Ax_j\|\geq\frac{1}{2}\quad\forall\, j\leq k-1$$

$\Longrightarrow$ $\{Ax_k\}$ enthält keine konvergente Teilfolge. **W!** zu A kompakt .

$\Longrightarrow$ $\exists$ minimales $\overline{n}\in\mathbb{N}:\ N_{\overline{n}+1}=N_{\overline{n}}$.

Behauptung: $N_{k+1}=N_k \quad \forall\, k>\overline{n}$, denn

$$x\in N_{k+1}\Longleftrightarrow T^{k+1}x = 0 = T^{\overline{n}+1}(T^{k-\overline{n}}x) \underset{\substack{\uparrow\\ N_{\overline{n}+1}\ =\ N_{\overline{n}},}}{=} T^{\overline{n}}(T^{k-\overline{n}}x) = T^kx \Longrightarrow x\in N_k$$

also $N_{k+1}\subset N_k$ und wegen 1): $N_k\subset N_{k+1}$ folgt $N_k=N_{k+1}$.

Ebenso zeigt man (wegen $T(F_k)=F_{k+1}$ und Lemma 14.3):

$$\exists \text{ minimales } m:\quad F_k = F_m \quad \forall\, k\geq m\,.$$

Zeige: $n\geq m$ ($m=n$ wird nicht behauptet, m,n sind die Minimalwerte aus 2.).

Annahme $m>n$.
Sei $z\in F_{m-1}=T^{m-1}X \quad\Longrightarrow\quad Tz\in T^mX=F_m=F_{m+1}=T^{m+1}X$ d.h.

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, z\in F_{m-1}\ \exists\, t\in \underset{\substack{\cap\ 1)\\ F_{m-1}}}{F_m}:\quad Tz=Tt\Longrightarrow z-t\in N_1\overset{1)}{\subset} N_n\\ \phantom{\forall\, z\in F_{m-1}\ \exists\, t\in F_m:\quad} \Longrightarrow z-t\in F_{m-1}\underset{\substack{\text{nach 1)}\\ \text{wegen } m>n}}{\subset} F_n\end{array}\right\}\Longrightarrow z-t\in F_n\cap N_n\,.$$

Wir zeigen im Anschluß (siehe unten): (A) $F_n \cap N_n = \{0\}$.

Damit ist $z = t \in F_m$; $\left.\begin{array}{ll}\text{insgesamt :} & F_{m-1} \subset F_m \\ \text{nach 1) :} & F_{m-1} \supset F_m\end{array}\right\} \Longrightarrow F_{m-1} = F_m$ **W!** zur Def. von m,

also gilt $m \leq n$.

(A): Zeige $F_n \cap N_n = \{0\}$.

Sei $y \in F_n \cap N_n \iff \left\{\begin{array}{l} T^n y = 0 \\ \exists\, x \in X : \ y = T^n x \end{array}\right\}$

$$\Longrightarrow T^{2n}x = 0 \iff x \in N_{2n} \overset{\substack{\text{siehe}\\ \text{oben}}}{=} N_n \Longrightarrow T^n x = 0 = y\,.$$

Beweis 3)
Behauptung: $X = F_n \oplus N_n$.

$$\left.\begin{array}{rl} x \in X \text{ beliebig} \Longrightarrow & T^n x \in F_n \\ & F_n \overset{2)}{=} T^n F_n \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \exists\, y \in F_n : T^n y = T^n x \Longrightarrow x - y \in N_n \Longrightarrow x = \underbrace{x - y}_{\in N_n} + \underset{\substack{\in \\ F_n}}{y}\ .$$

Wegen $N_n \cap F_n = \{0\}$ (vgl. (A)) ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis 4)

$$\overset{2)}{\Longrightarrow} \quad F_{n+1} = TF_n = F_n\,, \text{ d.h. } T\big|_{F_n} \text{ surjektiv}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Ker} T\big|_{F_n} \subset N_1 \cap F_n \overset{2)}{\subset} N_n \cap F_n \overset{(A)}{=} \{0\}\,, \text{ d.h. } T\big|_{F_n} \text{ injektiv}$$

$$\xRightarrow{\text{Satz 14.4, 3)}} \overset{\text{Satz 14.4, 3)}}{\Longrightarrow} \quad T\big|_{F_n} : F_n \xrightarrow[\text{nach 2)}]{\text{auf}} F_n \text{ ist topologischer Isomorphismus.} \quad \blacksquare$$

Zusatz 14.6
Unter den Voraussetzungen von Satz 14.5 gilt:

4') $N_1 = \operatorname{Ker} T = \{0\} \Longrightarrow T = I - A$ topologischer Isomorphismus von X auf X.

Denn $\operatorname{Ker} T = 0$, d.h. $Tx = 0 \Longrightarrow x = 0$.

$$\Longrightarrow T^2 x = 0 = T(Tx) \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow x = 0, \text{ usw.}$$
$$\Longrightarrow N_k = N_1 \ \forall\, k \geq 1.$$

$$\Longrightarrow n = 1 \text{ in 2) } \overset{3)}{\Longrightarrow} X = N_1 \oplus F_1 = F_1 \overset{4)}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.} \quad \blacksquare$$

Satz 14.7 Spektralsatz von Riesz-Schauder für kompakte Operatoren
Sei $(X, \| \, \|)$ normiert über $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$ kompakt (d.h. die Voraussetzungen von Satz 14.5).

$\Longrightarrow$

1. Das Spektrum $\sigma(A)$ liegt im Kreis $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|A\|\}$. Es ist entweder endlich oder abzählbar und besitzt keinen Häufungspunkt außer eventuell 0.

   Ist $\dim X = \infty \Longrightarrow 0 \in \sigma(A)$.

2. Jeder von Null verschiedene Spektralwert ist Eigenwert.

3. $\forall\, \lambda \in \sigma(A) \backslash \{0\}$ $\exists!$ Paar $(N(\lambda), F(\lambda))$ komplementärer, abgeschlossener Teilräume von X, d.h. $X = N(\lambda) \oplus F(\lambda)$) mit den Eigenschaften
   - (a) $\dim N(\lambda) < \infty$,
   - (b) $A(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$, und $\exists$ ein minimales $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ mit $(A - \lambda\, I)^{n(\lambda)}\big|_{N(\lambda)} \equiv 0$,
   - (c) $A(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$, und $(A - \lambda\, I)\big|_{F(\lambda)}$ ist topologischer Isomorphismus von $F(\lambda)$ auf sich.

4. Ist $E(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I)$ der Eigenraum zum EW $\lambda \neq 0$

   $$\Longrightarrow \qquad E(\lambda) \subset N(\lambda) \quad (\text{d.h. insbesondere } \dim E(\lambda) < \infty).$$

5. Sind $\lambda, \mu \in \sigma(A) \backslash \{0\}$, $\lambda \neq \mu \Longrightarrow N(\lambda) \subset F(\mu)$.

Bemerkungen

a) 1) bedeutet, daß ein kompakter Operator im ∞-dimensionalen Fall kein topologischer Isomorphismus sein kann (vgl. Definition 14.1), d.h. $\nexists A^{-1} = (A - 0I)^{-1}$.

b) 1) zusammen mit 4) sind für die Anwendung wichtig: In der Lösungstheorie von Operatorgleichungen werden oft Funktionen nach den Eigenfunktionen der Operatoren entwickelt. (vgl. etwa bei der Wellengleichung). Das ist aber nur möglich, wenn es nur höchstens abzählbar viele Eigenwerte mit nur endlich vielen linear unabhängigen Eigenfunktionen gibt.

c) 5) hat in Hilberträumen zur Folge, daß die Eigenvektorräume zu verschiedenen Eigenvektoren paarweise orthogonal sind.

d) In 3) ist $N(\lambda) = N_{n(\lambda)}$, $F(\lambda) = F_{n(\lambda)}$ wobei $n(\lambda)$ das minimale n des vorigen Satzes ist.

Wir beweisen Teil 1) erst nach den Teilen 2) und 3).

Beweis 2) indirekt:

Sei $0 \neq \lambda$ kein EW, d.h. $\nexists$ EV $\neq 0$. $\Longleftrightarrow \{0\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I) = N_1 = \mathrm{Ker}\left(I - \frac{1}{\lambda}\, A\right)$.

Da $\frac{1}{\lambda}\, A$ kompakt, folgt somit nach Zusatz 14.6: $I - \frac{A}{\lambda}$ topologischer Isomorphismus von X auf X, also λ regulär.

Beweis 3)

Wir wenden Satz 14.5 an auf $(A - \lambda\, I) = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}\, A\right) =: T$.

$n(\lambda)$ ist das minimale n des Satzes, $N(\lambda) = N_{n(\lambda)}$, $F(\lambda) = F_{n(\lambda)}$

$\Longrightarrow$

a) $\dim N(\lambda) < \infty$,

b) $A(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$, denn $x \in N_{n(\lambda)} = N_{n(\lambda)+1} \Longrightarrow$

$$0 = \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{n(\lambda)+1} x = \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{n(\lambda)} \left(I - \frac{A}{\lambda}\right) x = \underbrace{\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{n(\lambda)} x}_{=0} - \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{n(\lambda)} \frac{A}{\lambda}\, x$$

$\Longrightarrow \quad Ax \in N_{n(\lambda)}$.

c) $A(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$, denn $\forall\, x \in F(\lambda) = F_{n(\lambda)}\ \exists\, y \in F(\lambda) = F_{n(\lambda)+1}$:

$$(A - \lambda\, I)\, x = y \quad \Longleftrightarrow \quad Ax = \lambda\, x + y \in F(\lambda).$$

A_λ ist nach 4) des vorigen Satzes topologischer Isomorphismus von $F(\lambda)$ auf sich.

Zu zeigen bleibt die *Eindeutigkeit von* $N(\lambda)$ *und* $F(\lambda)$.

Seien also

$$(*) \qquad N', F' \ :\ N' \oplus F' = X = N(\lambda) \oplus F(\lambda).$$

Beachte dazu: N' und F' haben ebenfalls die Eigenschaften a)-c). Diese Eigenschaften werden die Eindeutigkeit sichern.

Es genügt zu zeigen: $N' \subset N(\lambda)$, $F' \subset F(\lambda) \overset{(*)}{\Longrightarrow} N' = N(\lambda)$, $F' = F(\lambda)$.

$$\left.\begin{array}{ll} x\in N' \Longrightarrow & \exists\, y\in N(\lambda),\ z\in F(\lambda)\ :\ x=y+z \\ & \text{b)} \Longrightarrow \exists \text{minimales} k\in\mathbb{N}:\ (A-\lambda\, I)^k\big|_{N'}=0.\text{Setze } m=\max\,(k,n(\lambda)) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\underbrace{(A-\lambda\, I)^m\, x}_{\substack{=0\\ \text{da } m\geq k,\ x\in N'}} \;=\; \underbrace{(A-\lambda\, I)^m\, y}_{\substack{=0\\ \text{da } m\geq n(\lambda),\ y\in N(\lambda)}} + (A-\lambda\, I)^m\, z \quad\Longrightarrow\quad (A-\lambda\, I)^m\, z \;=\; 0$$

$\Longrightarrow$ $z=0$, da $z\in F(\lambda)$ und $(A-\lambda\, I)$ topologischer Isomorphismus von $F(\lambda)$ auf sich nach 3) des vorigen Satzes

$\Longrightarrow$ $x \;=\; y+z \;=\; y\in N(\lambda)\,,$ also $N'\subset N(\lambda)$.

$y'\in F' \Longrightarrow$ $\exists\, x\in N(\lambda),\ y\in F(\lambda)\ :\ y'=x+y$

$$\Longrightarrow \quad (A-\lambda\, I)^{n(\lambda)}y' \;=\; \underbrace{(A-\lambda\, I)^{n(\lambda)}\, x}_{\substack{=0\\ \text{da } x\in N(\lambda)}} + \underbrace{(A-\lambda\, I)^{n(\lambda)}\, y}_{\in F(\lambda)}\,,$$

nun ist

$$F' \overset{\text{c)}}{=} (A-\lambda\, I)\,(F') \underset{\substack{\uparrow\\ \text{c) } n(\lambda)\text{ mal}\\ \text{anwenden}}}{=} (A-\lambda\, I)^{n(\lambda)}\,(F')\subset F(\lambda)\,,$$

also $y'\in F(\lambda)\,.$

Beweis 1)
Konstruiere einen Abzähltbarkeitsalgorithmus für $\sigma(A)\,.$

Laut Satz 14.2 gilt $\sigma(A)\subset\{\,\lambda\in\mathbb{C};\ |\lambda|\leq\|A\|\,\}\,.$

Dieser Kreis wird aufgeteilt in abzählbar viele Kreisringe

$$K_n \;=\; \left\{\lambda\in\mathbb{C}\ :\ 2^{-n}\|A\|<|\lambda|\leq 2^{-n+1}\|A\|\right\}.$$

$$\Longrightarrow \qquad \sigma(A)\backslash\{0\}\;\subset\;\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Zeige: In jedem K_n liegen nur endlich viele Spektralwerte ($=$ EWe nach 2)).

Annahme: $\exists\,\infty$ viele EW $\lambda_i\in K_n\,.$

$\Longrightarrow$ $\exists$ HP $\overline{\lambda}$ von $\{\lambda_i\}$ in $\overline{K}_n$ und $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$, da $\sigma(A)$ abgeschlossen (denn $\rho(A)$ offen nach 14.2).

Dies kann aber nicht stimmen, wenn wir gezeigt haben, daß

$(*)$ $\quad \forall\, \lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}\ \exists\, U \in \mathcal{U}(\lambda):\ A-\mu I$ injektiv (d.h. $\nexists$ EV) $\forall\, \mu \in U,\ \mu \neq \lambda$.

Diese Eigenschaft ist chenumerateteristisch für Punktspektren.

Wegen $X = F(\lambda) \oplus N(\lambda)$ genügt zum Beweis von $(*)$

(i) $(A-\mu I)\big|_{F(\lambda)}$ ist injektiv $\forall\, \mu \in U,\ \mu \neq \lambda$,
und verschärft: (das brauchen wir im Beweis von 5))
(ii) $(A-\mu I)\big|_{N(\lambda)}$ ist injektiv $\forall \mu \in \mathbb{C},\ \mu \neq \lambda$.

(i) indirekt: Annahme:
$\exists\, \{\mu_n\},\ \mu_n \to \lambda \wedge \forall\, \mu_n\ \exists\, x_n \in F(\lambda)\ :\ (A-\mu_n I)\, x_n = 0,$ Œ $\|x_n\| = 1$.

Nun ist

$$\begin{array}{rcl} (A-\mu_n I)\, x_n & = & (A-\lambda I)\, x_n + (\lambda-\mu_n)\, I x_n \ = \ 0 \\ \Longrightarrow & & (A-\lambda I)\, x_n \ = \ (\mu_n-\lambda)\, I x_n \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \lambda \\ \|x_n\| = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\mu_n-\lambda)\, I x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} (A-\lambda I)\, x_n \\ \text{nach Teil 3) gilt} \\ T_\lambda = (A-\lambda I) \text{ ist topologischer Isomorphismus auf } F(\lambda) \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n \to 0$$

W! zu $\|x_n\| = 1\ \forall\, n$.

(ii) Sei $(A-\mu I)\, x = 0$ für $x \in N(\lambda),\ \lambda \neq \mu$; zeige $x = 0$.

$$\begin{array}{lrcl} & (A-\mu I)\, x & = & (\lambda-\mu)\, I x + (A-\lambda I)\, x \ = \ 0 \\ & \Longrightarrow\ (A-\lambda I)\, x & = & (\mu-\lambda)\, I x \\ (**) & \Longrightarrow\ (A-\lambda I)^k x & = & (\mu-\lambda)\,(A-\lambda I)^{k-1} x \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \\ k = n(\lambda) & \Longrightarrow\ (A-\lambda I)^{n(\lambda)} x & \underset{\substack{\uparrow \\ x \in N(\lambda)}}{=} & 0 \ = \ (\mu-\lambda)\,(A-\lambda I)^{n(\lambda)-1} x \end{array}$$

$$\underset{\lambda\neq\mu}{\overset{(**)}{\Longrightarrow}} \quad (\mu-\lambda)^{n(\lambda)-\nu}\,(A-\lambda I)^{\nu} x = 0,\ \ \nu = n(\lambda)-1,\ n(\lambda)-2, \ldots, 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0\,.$$

Insgesamt also: $\sigma(A)$ abzählbar und ein HP existiert höchstens in 0.

Sei $\dim X = \infty$. (indirekt) Annahme: $0 \notin \sigma(A) \Longrightarrow T_0 := (A - 0 \cdot I) = A$ ist topologischer Isomorphismus von X auf sich (nach Zusatz 14.6)

$$\Longrightarrow \quad \exists\, M \subset X \text{ beschränkt und } AM = \overline{K_1(0)}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Urbild abg. Mengen ist abg., da } A \text{ stetig} \\ \text{Urbild beschr. Mengen ist beschr., da } A^{-1} \text{ stetig} \end{pmatrix}$$

$$\overline{K_1(0)} \text{ kompakt, da } A \text{ kompakt} \quad \xRightarrow{\text{Satz 6.4}} \quad \dim X < \infty \;\; \textbf{W!}$$

Beweis 4)

Für $\lambda \neq 0$ gilt wie in Teil 3) des Beweises

$$E(\lambda) \;=\; \operatorname{Ker}(A - \lambda\, I) \;=\; \operatorname{Ker}\left(\frac{A}{\lambda} - I\right) \subset N(\lambda)$$

nach Abschnitt 1) aus Satz 14.5.

Beweis 5)
Wir zeigen zunächst als Hilfsmittel

$$(***) \qquad\qquad \lambda \neq \mu,\;\; \lambda, \mu \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (A - \mu\, I)\,(N(\lambda)) = N(\lambda)\,.$$

Im Beweisteil 1) (ii) wurde gezeigt: $(A - \mu\, I)$ ist injektiv auf $N(\lambda)$ $\forall \mu \neq \lambda$.

Nun gilt $(A - \mu\, I)\,(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$, denn (geschickt rechnen)

$$(A{-}\lambda\, I)^{n(\lambda)}\,(A{-}\mu\, I)\,(N(\lambda)) = (\lambda{-}\mu)\,\underbrace{(A - \lambda\, I)^{n(\lambda)}\,(N(\lambda))}_{=\,0} + \underbrace{(A - \lambda\, I)^{n(\lambda)+1}\,(N(\lambda))}_{=\,0} = 0\,.$$

$$\Longrightarrow \quad (A - \mu\, I)\,(N(\lambda)) \subset N(\lambda)\,.$$

Nun ist $\dim N(\lambda) \;=\; d \;<\; \infty$ und eine injektive Abbildung eines d-dimensionalen Raumes in einem d-dimensionalen Raum ist surjektiv, also bijektiv, also $(A{-}\mu\, I)\, N(\lambda) = N(\lambda)$.

Sei nun

$$\begin{aligned} x \in N(\lambda) \;\; &\Longrightarrow \;\; \exists\, y \in N(\mu),\;\; z \in F(\mu) \;:\;\; x = y + z \quad \text{(nach Beweisteil 3))} \\ &\Longrightarrow \;\; \underset{\substack{\cup \\ N(\lambda) \\ \text{nach } (***)}}{(A - \mu I)^{n(\mu)}\, x} \;\;=\;\; \underset{\substack{=\,0 \\ \text{da } y \in N(\mu)}}{(A - \mu\, I)^{n(\mu)}\, y} \;+\; \underset{\substack{\in\, F(\mu), \\ \text{da } (A - \mu\, I) \\ \text{topologischer Isomorphismus} \\ \text{auf } F(\mu)}}{(A - \mu\, I)^{n(\mu)}\, z} \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$N(\lambda) \;\;\overset{(***)}{=}\;\; (A - \mu\, I)^{n(\mu)}\,(N(\lambda)) \subset F(\mu)\,.$$

Damit ist Satz 6.4 bewiesen. ■

Der folgende Satz (der relativ leicht mit Hilfe von Satz 13.6 bewiesen werden kann, vgl. Wloka) zeigt, daß für die Spektraltheorie kompakter Operatoren die Voraussetzung, daß X ein normierter Raum ist, nicht wesentlich allgemeiner ist, als die, daß X

ein Banachraum ist (vgl. Satz 13.6).

Satz 14.8
Sei $(X, \| \|)$ BR, $X_0 \subset X$ dichter Teilraum, $A_0 : X_0 \xrightarrow[\text{linear}]{\text{kompakt}} X_0$.
Dann gilt für die eindeutige stetige und lineare Fortsetzung $A : X \to X$

$$\sigma(A) \;=\; \sigma(A_0) \text{ und } \forall\, \lambda \in \sigma(A_0) \;:\; \begin{aligned} N(\lambda, A_0) &= N(\lambda, A)\,, \\ E(\lambda, A_0) &= E(\lambda, A)\,, \\ n(\lambda, A_0) &= n(\lambda, A)\,. \end{aligned}$$

Beweis
Aus $\dim X_0 = \infty$ (also auch $\dim X = \infty$) $\xRightarrow{\text{Satz 14.7}}$ $0 \in \sigma(A),\ 0 \in \sigma(A_0)$.

Ist $\dim X_0 < \infty$, so ist X_0 als Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ abgeschlossen, also $X_0 = X$, und $A_0 = A$.

Wir können uns also auf $\lambda \in \sigma(A),\ \lambda \neq 0$ beschränken.

Aus Satz 13.6 ist bekannt: A_0 kompakt $\Longrightarrow A : X \xrightarrow[\text{lin.}]{\text{komp.}} X_0$. Deshalb gilt:

$$0 \neq x \in E(\lambda, A) \xRightarrow{AX \subset X_0} x \in E(\lambda, A_0), \text{ also } \sigma(A) \subset \sigma(A_0) \text{ und } E(\lambda, A) \subset E(\lambda, A_0)\,.$$

Da A Fortsetzung von A_0, ist auch $\sigma(A) \supset \sigma(A_0)$ und $E(\lambda, A) \supset E(\lambda, A_0)$.

Ebenso folgt $\forall\, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} N_k(\lambda, A) &:= \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I)^k = \{x \in X;\ (A - \lambda\, I)^k x = 0\} \\ &\overset{AX \subseteq X_0}{=} \{x \in X_0;\ (A - \lambda\, I)^k x = 0\} \\ &= \{x \in X_0;\ (A_0 - \lambda\, I)^k x = 0\} \;=:\; N_k(\lambda, A_0), \end{aligned}$$

also $N(\lambda, A_0) = N(\lambda, A)$ und somit auch $n(\lambda, A_0) = n(\lambda, A)$. ■

Als Beispiele betrachten wir folgende Aufgaben:

1. Sei $x = \ell^2$. Für $x = (\xi_\nu) \in \ell^2$ sei $y = Ax = (\eta_\nu),\ \eta_\nu = \frac{\xi_\nu}{\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots$
   Zeige: A ist kompakt, 0 gehört zum kontinuierlichen Spektrum (vgl. die Aufschlüsselung nach Definition 14.1). Welches sind die EWe?
2. Aufgabe 1), jedoch mit $\eta_\nu = \frac{\xi_{\nu-1} + \xi_\nu}{2},\ \nu = 2, 3, \ldots,\ \eta_1 := 0$.
   0 gehört zum Residualspektrum.
3. Sei $x_0 \in X_0,\ f_0 \in X^*,\ f_0(x_0) \neq 0$ und $Ax = f_0(x) x_0$.
   Dann besteht das Spektrum aus den EWn 0 und $f_0(x_0)$ und für die Resolventenfunktion gilt
   $$R_\lambda \;=\; -\frac{1}{\lambda} I \;+\; \frac{1}{\lambda(f_0(x_0) - \lambda)}\, A\,.$$

Über das Spektrum der zu einer kompakten Abbildung dualen Abbildung, kann man die folgenden Aussagen 1), 2) beweisen. Als Anwendung des closed-range-theorem (Satz 12.6) formulieren wir die Aussagen 3), 4), die, in Analogie zu einem Satz aus der Theorie der Integralgleichungen, oft „Fredholm'sche Alternative" genannt werden. Allerdings wird die „Alternative", d.h. $\lambda \in \sigma(A)$ bzw. $\lambda \notin \sigma(A)$, erst durch die folgende Bemerkung deutlich.

Satz 14.9 Fredholm'sche Alternative
Sei X normiert über $\mathbb{C}$, $A \in L(X)$ kompakt

$\Longrightarrow$

1. $\sigma(A) = \sigma(A')$ (d.h. also auch gleiche EWe).
2. $0 \neq \lambda \in \sigma(A) \implies \dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, A') \quad (< \infty)$.
3. Sei $\lambda \neq 0$, dann gilt
   - a) zu $y \in X$ $\exists$ Lösung $x \in X$ von $(A - \lambda I)x = y$
     (d.h. $y \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)$)
     $\iff$ $\{A'g = \lambda g,\ g \in X^*\} \implies g(y) = 0$
     (d.h. $E(\lambda, A') = \operatorname{Ker}(A' - \lambda I') \subset \{y\}^\perp$)
   - b) zu $f \in X^*$ $\exists$ Lösung $g \in X^*$ von $(A' - \lambda I')g = f$
     (d.h. $f \in \operatorname{Im}(A' - \lambda I')$)
     $\iff$ $\{Ax = \lambda x,\ x \in X\} \implies f(x) = 0$
     (d.h. $f \in E(\lambda, A)^\perp = \big(\operatorname{Ker}(A - \lambda I)\big)^\perp$)
4. Sei $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$ und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von $E(\lambda, A)$

   $\Longrightarrow$

   Jede Lösung von $(A - \lambda I)x = y$ hat die Gestalt
   $x = \tilde{x} + \sum \alpha_\nu x_\nu$ wo $(A - \lambda I)\tilde{x} = y$.

   Eine entsprechende Aussage gilt für die Lösungen von $(A' - \lambda I')g = f$.

Bemerkung:

Ist $\lambda \notin \sigma(A)\backslash\{0\} \;\to\; E(\lambda, A) \overset{1)}{=} E(\lambda, A') = \{0\}$ und $\{0\} \subset \{y\}^\perp$ in 3a) ist trivial.

Also gelten statt 3a) und 3b) in Satz 14.9

3a'): $\lambda \notin \sigma(A)\backslash\{0\} \;\to\; \forall y \in X \;\; \exists!$ Lösung von $(A - \lambda I)x = y$ (genau eine, denn die Lösungen
x von $(A - \lambda I)x = y$ unterscheiden sich nur um Elemente $\in E(\lambda, A) = \{0\}$).

Entsprechend folgt

3b'): $\lambda \notin \sigma(A)\backslash\{0\} \;\to\; \forall\, f \in X^* \;\; \exists!$ Lösung $g \in X^*$ von $(A' - \lambda\, I')g = f$.

Diese Ergebnisse waren jedoch auch schon vorher bekannt, da $(A - \lambda\, I)$ ein topologischer Isomorphismus ist für $\lambda \notin \sigma(A)\backslash\{0\}$.

Beweis Satz 14.9:

Zum Beweis benutzen wir die Hilfsaussage

$$(*) \qquad \begin{cases} \text{Ist } B \in L(X) \text{ stetig und existiert } B^{-1} \text{ auf } X, \\ \text{so existiert } (B')^{-1} \text{ und es gilt } (B')^{-1} = (B^{-1})'. \end{cases}$$

Beweis

Lemma 12.4, 3)) besagt: $A_1, A_2 \in L(X) \;\to\; (A_2\, A_1)' = A_1'\, A_2'$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Setze } A_1 = B,\ A_2 = B^{-1} \;\Longrightarrow\; I' = (B^{-1}B)' = B'(B^{-1})' \\ \text{und entsprechend unter Vertauschung von } A_1, A_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow\; (B^{-1})' \;=\; (B')^{-1}\,.$$

Mit A kompakt, linear gilt auch (Satz 13.7) A' ist kompakt und linear.

Beweis 1)

$$\lambda \in \rho(A)\,,\ A \text{ kompakt} \;\xRightarrow{\text{Zusatz 14.6}}\; (A - \lambda\, I) \text{ topologischer Isomorphismus auf } X\,.$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow\; (A - \lambda\, I)^{-1} \text{ stetig auf } X \\ &\overset{(*)}{\Longrightarrow}\; \big((A - \lambda\, I)^{-1}\big)' \;=\; (A' - \lambda\, I')^{-1}\,, \end{aligned}$$

d.h. λ regulär für $A \iff \lambda$ regulär für A', also $\rho(A) = \rho(A') \Longrightarrow \sigma(A) = \sigma(A')$.

Beweis 2) Zum Beweis vgl. Wloka S. 220 ff

Beweis 3a)

Sei Œ X ein Banachraum (vgl. Satz 14.8). Dann gilt

$$\begin{aligned} (A - \lambda\, I)x = y \;\iff\; & y \in \operatorname{Im}(A - \lambda\, I) = F_1 \text{ abgeschlossen nach Satz 14.5} \\ & \big\|\;\; \text{Satz 12.7 (closed-range-theorem)} \\ \iff\; & \big[\operatorname{Ker}(A' - \lambda\, I')\big]^{\perp} \ni J(y) = u_y \text{ (kanonische Abbildung)} \\ \iff\; & \forall\, g \in X^* \text{ mit } (A' - \lambda\, I')g = 0 \text{ gilt } u_y(g) \;=\; 0 \;=\; g(y) \end{aligned}$$

Beweis 3b) Wird analog bewiesen.

Beweis 4)

Zwei Lösungen von $(A - \lambda\, I)x = y$ unterscheiden sich nur um ein Element aus $N_1 =$

$E(\lambda, A)$, also die 1. Behauptung von 4). Die Aussage über die Form der Lösungen folgt unmittelbar aus A linear und $\dim E(\lambda, A) < \infty$. ■

Bemerkung:
In Kantorowitch/Akilow S. 426 ff. wird gezeigt, daß Satz 14.9 auch für nicht kompaktes A gilt, sofern $A \in L(X)$, X Banachraum und A^m kompakt für ein $m \in \mathbb{N}$.

Die Fredholm'sche Alternative für Integralgleichungen

Die Fredholm'sche Alternative beschreibt die Fälle

Entweder $0 \neq \lambda \notin \sigma(A)$

$\Downarrow$ Satz 14.9, 3), bzw. Bemerkung 3a'),3b')

$\exists\,!$ Lösung von $(A - \lambda\, I)x = y \ \ \forall\, y \in X$

und

$\exists\,!$ Lösung von $(A' - \lambda\, I')g = f \ \ \forall\, f \in X^*$

oder $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$

$\Downarrow$ Satz 14.7, 2) und Satz 14.9, 1)

λ ist EW von A und A'

$\Downarrow$ Satz 14.9, 2)

$\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, A') < \infty$

$\Downarrow$

$\exists$ Basis von $E(\lambda, A)$ und $E(\lambda, A')$

$\Downarrow$ Satz 14.9, 3)

$(A - \lambda\, I)x = y$ hat genau dann Lösungen wenn $E(\lambda, A') \subset \{y\}^\perp$.

Wir wenden diese Alternative auf Integralgleichungen der Form

$$x(s) - \mu \int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt \;=\; y(s)$$

an.

Bemerkung:
Eigentlich lautet (gemäß Spektralsatz) die zu untersuchende Integralgleichung

$$\int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt - \lambda\, x(s) \;=\; y(s)\,.$$

Laut Konvention (Historie) werden Integralgleichungen jedoch in der vorhergehenden Form angegeben. (Man ersetze λ durch $\mu = \frac{1}{\lambda}$ und y durch $-\frac{1}{\lambda}\, y$.) Die entsprechenden Ersetzungen sind für die adjungierte Gleichung vorzunehmen im Hilbertraumfall.

Man beachte insbesondere, daß dort die konjugiert komplexen EWe auftreten, denn

$$\begin{aligned}
& (A' - \lambda\, I')g = f \;\; \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & A'g(x) - \lambda\, g(x) = f(x) \;\; \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & g(Ax) - \lambda\, g(x) = f(x) \;\; \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & (Ax, g) - \lambda(x, g) = (x, f) \;\text{ im Hilbertraumfall } \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & (Ax, g) - (x, \overline{\lambda} g) = (x, f) \;\; \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & (x, A^*\, g) - (x, \overline{\lambda} g) = (x, f) \;\; \forall\, x \in X \\
\Longleftrightarrow \;\; & (A^* - \overline{\lambda}\, I^*)g = f \;\; \forall\, x \in X\,.
\end{aligned}$$

Jeder der Integraloperatoren der Beispiele 2)–4) nach Definition 13.1 ist kompakt

$$(Ax)\,(s) \;\; = \;\; (Kx)\,(s) \;\; = \;\; \int\limits_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt\,.$$

Ist $k \in C([a,b] \times [a,b])$, so kann man bei Anwendung der Spektralsätze entweder den Raum $(C[a,b],\ \| \, \|_\infty)$ oder $(L_2[a,b],\ \| \, \|_2)$ zugrunde legen. In beiden Fällen sind die EWe $\lambda \neq 0$ und die zugehörigen EEe gleich, denn jedes EE aus $(L_2[a,b],\ \| \, \|_2)$ ist stetig, denn $x(s) = \frac{1}{\lambda}\, Ax(s)$ und Ax sind stetig (vgl. Beispiel 3), 4) nach Definition 13.1).

Im Hilbertraum $L_2[ab,]$ kann man auch den adjungierten Operator zu A angeben (vgl. Beispiel 1 nach Lemma 12.4 und übertrage dies auf den komplexen Fall).

$$(A^*v)\,(s) \;\; = \;\; \int\limits_a^b \overline{k(t,s)}\, v(t)\, dt \quad \text{(Es wird über das 1. Argument von } k \text{ integriert!)}$$

Damit kann man die Fredholm'sche Alternative wie folgt formulieren:

Fredholm'sche Alternative für Integralgleichungen

Entweder besitzt die Integralgleichung (vgl. die vorigen Voraussetzungen)

$$(*) \qquad x(s) - \mu \int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt \;=\; y(s)$$

für jede rechte Seite $y \in L^2[a,b]$ genau eine Lösung $x \in L_2[a,b]$; dann gilt dasselbe auch für die Gleichung (mit dem adjungierten Operator):

$$(**) \qquad v(s) - \overline{\mu} \int_a^b \overline{k(s,t)}\, v(t)\, dt \;=\; u(s)$$

oder

die zu $(*)$ gehörige homogene Gleichung (d.h. $y = 0$) besitzt eine endliche Anzahl ℓ $(\ell \geq 1)$ linear unabhängiger Lösungen. Dann besitzt auch die zu $(**)$ gehörige homogene Gleichung genau ℓ linear unabhängige Lösungen $v_1, \ldots, v_\ell$ und die Ausgangsgleichung $(*)$ hat genau dann Lösungen, wenn gilt

$$\int_a^b y(s)\, \overline{v_i(s)}\, ds \;=\; 0, \qquad i = 1, \ldots, \ell\,.$$

Hinweise zur Anwendung:

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe der Green'schen Funktion auf Randwertaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen übertragen (vgl. z.B. Wloka S. 239 ff). Anwendungen auf die Potentialtheorie findet man z.B. in Riesz-Nagy S. 176 ff.

Wir wenden nun die Spektraltheorie an auf selbstadjungierte kompakte Operatoren in Hilberträumen. Zur Bedeutung der Selbstadjungiertheit beachte auch das Variationsprinzip Satz 12.6.

Selbstadjungierte kompakte Operatoren in Hilberträumen

In unitären Räumen braucht man zur Definition der Selbstadjungiertheit eines Operators A weder seine Linearität noch seine Stetigkeit.

Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ unitär und $A : X \to X$.

Definition

A heißt selbstadjungiert $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(x, Ag) = (Ax, g)\ \forall\, x, g \in X$ (vgl. die Definition 12.2).

Damit kann man zeigen:

Lemma 14.10
Ist $(X,(\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $A : X \xrightarrow{\text{selbstadjungiert}} X$
$\Longrightarrow$

1. A ist linear,
2. A ist stetig.

Beweis 1)

$$\begin{array}{ccccc}
(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2, Ag) & = & \alpha(x_1, Ag) + \beta(x_2, Ag) & \overset{\substack{A \\ \text{selbstadj.}}}{=} & \alpha(Ax_1, g) + \beta(Ax_2, g) \\
\Vert \; {\scriptstyle A \text{ selbstadj.}} & & & & \Vert \\
\big(A(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2), g\big) & & & & (\alpha\, Ax_1 + \beta\, Ax_2, g) \;\forall\, g \in X
\end{array}$$

also A linear.

Beweis 2)
Wir zeigen: A linear und selbstadjungiert $\Longrightarrow$ A graphenabgeschlossen; denn

$$\left.\begin{array}{rcl} x_n & \to & x \\ Ax_n & \to & y \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} (z,y) & = & \lim\limits_{n\to\infty} (z, Ax_n) \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} (Az, x_n) \quad \text{(selbstadjungiert)} \\ & = & (Az, x) \;=\; (z, Ax) \;\forall\, z \in X, \;\text{ also } y = Ax\,. \end{array}$$

Damit folgt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 10.5): A stetig. ■

Bemerkung:
In der Physik sind unbeschränke Operatoren, die nur auf einem Teilraum von X die Selbstadjungiertheitsbeziehung aus obiger Definition erfüllen, von großer Bedeutung (vgl. z.B.: Großmann: Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik I, II; Akad. Verlag Gesellsch. Frankfurt 1970, S. 276 ff). Zur Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren vgl. z.B.: Bachmann/Narici: Functionalanalyiss; Academic Press, New York, 1966).

Wir beschränken uns hier auf kompakte, selbstadjungierte Operatoren. Einige der folgenden Aussagen gelten jedoch auch allgemeiner.

Satz 14.11
Sei $(X,(\cdot,\cdot))$ ein HR und $A : X \xrightarrow[\text{selbstadjungiert}]{\text{kompakt}} X$. Dann gilt

1. Alle Spektralwerte von A sind reell $(\sigma(A) \subset \mathbb{R}) \wedge 0 \neq \lambda \in \sigma(A) \Longrightarrow \lambda$ ist EW.
2. Jeder EW $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$ ist von der Ordnung $n(\lambda) = 1$ (vgl. Satz 14.5, 2)).
3. $\|A\| \in \sigma(A)$ oder $-\|A\| \in \sigma(A)$.
4. Sind $\lambda, \mu \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, $\lambda \neq \mu$, so gilt $E(\lambda) \perp E(\mu)$ (die Eigenräume sind paarweise orthogonal).

Bemerkungen:

zu 1) Im Fall $\dim X < \infty$ sind die (kompakten) selbstadjungierten Abbildungen hermite'sche Matrizen (Aufgabe).

zu 2) $n(\lambda) = 1$ bedeutet $E(\lambda, A) = N_1(\lambda, A) = N_\nu \ \forall \nu \geq 1$ (vgl. Satz 14.5, 1), 2)). Bei Matrizen bedeutet dies: Der Eigenvektorraum hat „maximale Dimension“, d.h. algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit, d.h. $\exists$ vollständiges System von Eigenvektoren.

zu 3) Dies ist eine Existenzaussatz für Eigenwerte und $\|A\|$ ist gleich dem Spektralradius von A.

Beweis 14.11: Alle Spektralwerte $\neq 0$ sind EWe (Satz 14.7, 2)) $\Longrightarrow$

Beweis 1) $\lambda \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} (Ax,x) & = & (\lambda\, x,x) \;=\; \lambda(x,x) \\ \quad\|\ {\scriptstyle \text{selbstadj.}} & & \\ (x,Ax) & = & (x,\lambda\, x) \;=\; \overline{\lambda}(x,x) \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis 2) Wir zeigen: $X = N_1 \oplus F_1$ und mit Hilfe dieser Beziehung $N_1 = N_2$.

Daraus folgt $n(\lambda) = 1$ (vgl. Satz 14.5, 2) und Satz 14.7, 3) Beweis)

Wir zeigen zunächst: Satz 14.9, 3a) (Fredholm'sche Alternative) bedeutet für selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen

$$\operatorname{Im}(A - \lambda\, I) \;=\; E(\lambda, A)^\perp\,,$$

denn:

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} A'g^* = \lambda\, g^*,\;\; g^* \in X^* & \Longrightarrow & g^*(y) = 0 \\ \quad\Updownarrow & & \quad\Updownarrow\ g^* = (\cdot, g) \\ g^*(Ax) = \lambda\, g^*(x)\ \forall\, x \in X & & (y,g) = 0 \\ \quad\Updownarrow\ g^* = (\cdot, g) & & \\ (Ax,g) = \lambda(x,g)\ \forall\, x \in X & & \\ \quad\Updownarrow\ A \ {\scriptstyle \text{selbstadj.}},\ \lambda \in \mathbb{R} & & \\ (x,Ag) = (x,\lambda\, g)\ \forall\, x \in X & & \\ \quad\Updownarrow & & \\ Ag = \lambda\, g & & \end{array}}_{y \;\in\; E(\lambda, A)^\perp}$$

Damit lautet 3a) aus Satz 14.9:

$$F_1 \;=\; \operatorname{Im}(A - \lambda\, I) \;=\; E(\lambda, A)^\perp \;=\; N_1^\perp\,,$$

denn „ $\Longleftrightarrow$ “ in 3a) entspricht den beiden Enthaltenseinsbeziehungen „ $\subset$ “ und „ $\supset$ “.

Nun ist X vollständig, $N_1 = E(\lambda, A)$ abgeschlossener Teilraum (Satz 14.5, 1)), also vollständig.

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Satz 5.7}} \quad X &= E(\lambda,A) \oplus E(\lambda,A)^\perp \\ &= \quad N_1 \oplus \operatorname{Im}(A-\lambda I) \quad (\text{vgl. oben}). \end{aligned}$$

Wir zeigen $N_1 = N_2$ (wegen $N_1 \subset N_2$ (Satz 14.5) genügt es $N_2 \subset N_1$ zu zeigen).
Mit $A_\lambda = A - \lambda I$ sei

$$\begin{aligned} 0 \neq x \notin N_1 \quad &\Longrightarrow \quad x = x_1 + x_2,\ x_1 \in N_1,\ 0 \neq x_2 \in F_1 \Longrightarrow A_\lambda x \;=\; A_\lambda x_2 \neq 0 \\ &\hphantom{\Longrightarrow} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{da } A_\lambda x_2 = 0 \iff x_2 \in N_1) \\ &\Longrightarrow \quad A_\lambda^2 x \;=\; A_\lambda(A_\lambda x_1) \neq 0 \ (\text{denn } A_\lambda^2 x_2 = 0), \quad \text{d.h. } x \notin N_2 \\ &\Longrightarrow \quad A_\lambda x_2 \in N_1 \cap F_1 = \{0\}, \ \mathbf{W!} \end{aligned}$$

d.h. $x \notin N_2$.

Beweis 4)

$$\begin{aligned} \lambda, \mu \in \sigma(A)\backslash\{0\},\ \lambda \neq \mu \ \overset{14.7,\,5)}{\Longrightarrow} \ E(\lambda, A) \ &\overset{2)}{=} \ N(\lambda, A) \subset F(\mu) \ \overset{n(\lambda)=1\ \forall\lambda}{=} \ \operatorname{Im}(A - \mu I) \\ &\overset{2)}{=} \ E(\mu, A)^\perp, \quad \text{also } E(\lambda) \perp E(\mu). \end{aligned}$$

Beweis 3): Idee und Beweisgang: Wir zeigen

1. $\exists\, y \neq 0$ mit $\|y\| = \|A\|$,
2. $A^2 y$ und y sind linear abhängig ($\Longleftrightarrow$ y ist EE zu einem EW k von A^2 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, k\ :\ (A^2 - k\,I)y = 0$),
3. $k = \|A\|^2$.

Mit c) ist der Beweis abgeschlossen wegen $0 = (A^2 - \|A\|^2 I)y = (A + \|A\| I)\,(A - \|A\| I)$ d.h. $+\|A\|$ oder $-\|A\|$ ist EW von A .

Beweis 3): Œ sei $A \neq \Theta$, denn für $A = \Theta$ ist $\lambda = 0$ Spektralwert.

a) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \ \rightarrow\ \exists\,\{x_n\} \subset X,\ \|x_n\| = 1,\ \|Ax_n\| \ \rightarrow\ \|A\|$

A kompakt $\rightarrow$ $\exists$ konvergente TF $A\tilde{x}_n \ \rightarrow\ y$ und $\|y\| = \|A\| \neq 0$, da $A \neq \Theta$.

b) Nun gilt

$$\begin{aligned} \|A\|^2 \ &= \ \lim_{n\to\infty} \|A\tilde{x}_n\|^2 \ = \ \lim_{n\to\infty} (A\tilde{x}_n, A\tilde{x}_n) \ \overset{\overset{A \text{ selbstadj.}}{\downarrow}}{=} \ \lim_{n\to\infty} (A^2\tilde{x}_n, \tilde{x}_n) \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \ \lim_{n\to\infty} \|A^2\tilde{x}_n\| \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \ = \ \lim_{n\to\infty} \|A(A\tilde{x}_n)\| \ = \ \|Ay\|. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(*) \qquad \|A\|^4 = \|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^2y, y) \overset{\text{CSU}}{\leq} \|A^2y\|\,\|y\|$$

$$\leq \|A\|^2\|y\|^2 \overset{\text{a)}}{=} \|A\|^4\,.$$

Die CSU muß also mit dem „ = “ Zeichen gelten

$$(A^2y, y) = \|A^2y\|\,\|y\|\,.$$

Also sind A^2y und y linear abhängig (vgl. Satz 5.2, speziell die folgende Bemerkung).

$$\Longrightarrow \exists\, k \quad : \quad A^2y = ky \ \rightarrow \ k(y,y) = (A^2y, y) \ \rightarrow \ k = \frac{(A^2y, y)}{(y,y)}$$

$$\Longrightarrow A^2y = \frac{(A^2y, y)}{(y,y)} \cdot y = \frac{(Ay, Ay)}{(y,y)} \cdot y = \frac{\|Ay\|^2}{\|y\|^2} \cdot y$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\|A\|^2\|y\|^2}{\|y\|^2} \cdot y = \|A\|^2 y, \quad \text{also } k = \|A\|^2\,.$$

■

Index