Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

WS 2003/2004

Numerik der nichtlinearen Optimierung

2. Übungsblatt: 20.11.2003

Aufgabe 2.1: Rayleigh-Quotient (4 Punkte (2+2))

A sei eine symetrische Matrix. Der Rayleigh-Quotient lautet:

$$f(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T A x}{|x|^2}$$

a) Zeigen Sie:

$$\nabla f(v) = 0 \Longleftrightarrow v \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } f(v).$$

b) Zeigen Sie:

$$\lambda_{min}(A) = \frac{v_1^T A v_1}{|v_1|^2} \leq \frac{x^T A x}{|x|^2} \leq \lambda_{max}(A) = \frac{v_2^T A v_2}{|v_2|^2}$$

wobei $Av_1 = \lambda_{min}(A)v_1$, $Av_2 = \lambda_{max}(A)v_2$.

Aufgabe 2.2: (4 Punkte)

Algorithmus 4.4 erzeugt zulässige Schrittweiten $t_k \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) && \forall k \geq 0 \\ &f(x^k + t_k d^k) - f(x^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{|d^k|} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Algorithmus 4.4 erzeugt zulässige Suchrichtungen $d_k \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^k)^T d^k < 0 && \forall k \geq 0 \text{ (Abstieg)} \\ &\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{|d^k|} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \nabla f(x^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Der Algorithmus 4.4 mit STOP $\Longleftrightarrow \nabla f(x^k) = 0$ terminiere nicht endlich und erzeuge zulässige Suchrichtungen und Schrittweiten.

Zeigen Sie: Dann ist jeder Häufungspunkt von $\{x^k\}_{k\in I\!N}$ ein stationärer Punkt.

Aufgabe 2.3: Beispiel für unzulässige Schrittweiten durch die Armijo-Regel (6 Punkte (2+2+2))
Wir betrachten das allgemeine Abstiegsverfahren mit stetig differenzierbarer Zielfunktion $f : I\!R^n \to I\!R$ und Suchrichtungen $d^k = -2^{-k}\nabla f(x^k)$.

a) Weisen Sie nach, dass die Suchrichtungen d^k zulässig sind

b) Zeigen Sie, dass die Armijo-Regel für die oben genannten Suchrichtungen im allgemeinen keine zulässige Schrittweiten erzeugt. Verwenden Sie hierfür das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2}{8}, \quad \text{Startpunkt } x^0 > 0$$

c) Wodurch wird die Unzulässigkeit der Schrittweiten verursacht?

Aufgabe 2.4: (4 Punkte)
Sei $f : I\!R^n \to I\!R$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:
Sind x^* und x^{**} zwei Häufungspunkte einer durch das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 4.4) erzeugten Folge $\{x^k\}_{k\in I\!N}$, dann gilt: $f(x^*) = f(x^{**})$.

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 20.11.2003 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch besprochen.
Beachten Sie bitte, dass in dieser Woche dann auch die erste numerische Aufgabe vorzuführen ist.