Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze
U. Matthes

WS 2003/2004

Numerik der nichtlinearen Optimierung

1. Übungsblatt: 6.11.2003

Aufgabe 1.1: Optimales Design eines Gebäudes (4 Punkte)
Ein quaderförmiges Gebäude soll optimal dimensioniert werden. Bezeichen l die Länge, b die Breite, h die Höhe (über Grund) und t die Tiefe (unter Grund) des Gebäudes. Der Bauherr stellt folgende Anforderungen, wobei zur Vereinfachung die Dicke der Wände und der Böden bzw. Decken vernachlässigt wird:

1. Das Verhältnis der Länge des Gebäudes zu seiner Breite soll dem goldenen Schnitt entsprechen (d.h. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$).
2. Länge und Breite des Gebäudes dürfen jeweils 50 m nicht überschreiten.
3. Alle Stockwerke sollen eine einheitliche Höhe von mindestens 3.50 m haben.
4. Mindestens 10%, aber höchstens 25% des Gebäudes soll unter der Erde liegen.
5. Der Boden des Erdgeschoßes soll ebenerdig sein.
6. Die durch alle Stockwerke des Gebäudes bereitgestellte Bodenfläche soll in der Summe mindestens 10.000 m^2 betragen.
7. Die durchschnittlichen jährlichen Heizkosten werden auf 100 Euro pro m^2 der über Grund liegenden Oberfläche des Gebäudes geschätzt. Die jährlichen Gesamtkosten für Heizung sollen 500.000 Euro nicht überschreiten.

Das Gebäude soll nun unter den angegeben Bedingungen so dimensioniert werden, dass die Menge des für den Bau des Gebäudes auszuhebenden Erdreichs minimal ist.

a) Schreiben Sie dieses Problem in Form eines restingierten Optimierungsproblems.

b) Besitzt das Optimierungproblem zulässige Punkte (d.h. Punkte, welche alle Bedingungen 1.-7. erfüllen)?

c) Besitz das Problem eine optimale Lösung?

Aufgabe 1.2: Kompositon konvexer Funktionen (4 Punkte (2+2))
Sei $g : X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $g(X) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion.

a) Zeigen Sie, dass dann die Komposition $f \circ g : x \in X \mapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$ konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass die Monotonie von f notwendig ist.

Aufgabe 1.3: Konvexität und Differenzierbarkeit (6 Punkte (3+1+2)
Sei $f : X \to I\!R$ differenzierbar auf der offenen konvexen Menge $X \subset I\!R^n$.
Zeigen Sie:

a) (Nachweis Satz 3.5): f ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x) \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1}$$

Tipp: Sei $x_\lambda = x + \lambda(y - x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$.

$\Longrightarrow$: Betrachten Sie den Differenzenquotienten $\frac{f(x_\lambda)-f(x)}{\lambda}$ für $\lambda \to 0^+$
$\Longleftarrow$: Verwenden Sie (1), um für $0 \leq \lambda \leq 1$ zu zeigen:

$$(f(x) - f(x_\lambda)) + \lambda(f(y) - f(x)) \geq 0. \tag{2}$$

Warum folgt daraus die Konvexität von f?

b) f ist genau dann strikt konvex, wenn (1) für alle $x \neq y$ strikt (d.h. mit $>$) gilt. (in Lit. auch streng konvex statt strikt konvex)

c) (Nachweis Satz 3.6): Sei $f : X \to I\!R$ zusätzlich 2-mal stetig differenzierbar:

i) f konvex $\Longrightarrow D^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$

ii) f strikt konvex $\Longrightarrow D^2 f(x) > 0 \quad \forall x \in X$

iii) f gleichmäßig konvex $\Longrightarrow d^T D^2 f(x)\, d \geq \mu \|d\|^2 \quad \forall x \in X$ mit $\mu > 0$

Tipp: a)

Der Abgabetermin für diese Aufgaben ist der 6.11.2003 zu Beginn der Übung. In dieser Übung werden die Aufgaben dann auch bespochen.

Numerische Aufgabe 1:
Sei $\Omega = (0.1)^2$ das Einheitsquadrat. Bestimmen Sie numerisch eine Funktion $q : \overline{\Omega} \to I\!R$, welche auf dem Rand von Ω mit $r(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - \left|x_2 - \frac{1}{2}\right|$ übereinstimmt und deren Graph minimale Oberfläche hat. Es sind die Gesamtfläche des Graphen sowie ein Bild des Graphen auszugeben. Die Programmiersprache ist beliebig.

Vorgehen: Zerlegen Sie das Einheitquadrat Ω in Dreiecke wie in Fig. 1 beschrieben. Damit erhalten Sie eine Triangulierung von Ω. Numerieren Sie die Knoten zeilen- oder spaltenweise. Machen Sie für die diskrete Fläche den in der Vorlesung beschriebenen Ansatz, wobei Sie jetzt allerdings annehmen können, dass jedes Dreieck der Fläeche als Graph einer Funktion $q : \Omega \to I\!R$ über dem entsprechenden Dreieck der Triangulierung parametrisiert werden kann. Stellen Sie eine geeignete Funktion $A : I\!R^n \to I\!R$ zur Berechnung des Flächeninhalts der diskreten Fläche auf (was ist n?). Dabei soll $q(x) = r(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ erfüllt sein. Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des Gradientenverfahrens (Algorithmus 4.4 mit $d = -\nabla A$) unter Verwendung der Armijo Regel ein Minimum von A. Bei Verwendung dieser Regel wird in Schritt iv) von Alg. 4.4 die Schrittweite t_k gemäß

$$t_k = \max\left\{\beta^l; l = 0, 1, 2, \ldots; A(x^k + t\, d^k) \leq A(x^k) + \sigma t \nabla A(x^k)^T d^k\right\}$$

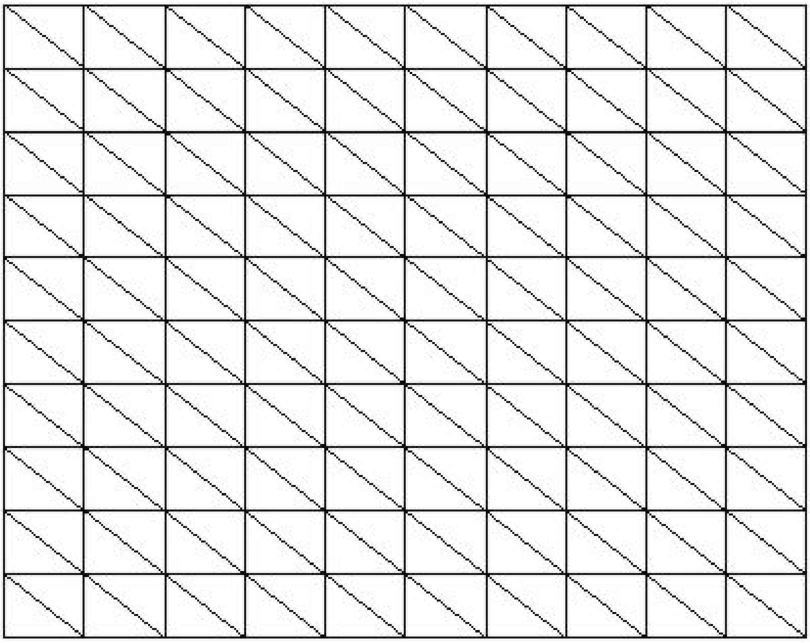

Figure 1: Beispielgitter

mit $\beta \in (0,1), \sigma \in (0,1)$ gewählt. Brechen Sie Ihren Algorithmus ab, falls $\left|\nabla A(x^k)\right| \leq \epsilon \left|\nabla A(x^0)\right|$ mit $\epsilon = 10^{-2}$ erfüllt ist. Geben Sie die Anzahl der Iterationen zusammen mit der Norm des Gradienten und dem Funktionswert A aus. Stellen Sie die Fläche mit einem Graphikprogramm Ihrer Wahl graphisch dar.

Die numerische Aufgabe 1 ist in der 47. Woche (20.11.-21.11.2003) in den Vorangzeiten am Rechner vorzuführen. Es soll in Gruppen von möglichst 2, maximal 3 Studierenden gearbeitet werden.