

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 6

Abgabetermin: 10.12.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes, beschränktes Gebiet. Es bezeichne

$$X = H_0^1(\Omega) := \text{clos}(C_0^\infty(\Omega)) \text{ bzgl. der } H^1 \text{ - Norm,}$$

wobei für eine offene Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ der Raum $C_0^\infty(S)$ die Menge aller ∞ -oft auf S differenzierbaren Funktionen f bezeichnet, deren Träger $\text{supp} f := \{x \in S; f(x) \neq 0\}$ kompakt in S enthalten ist, kurz $\text{supp} f \subset\subset S$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $f \in X'$ genau ein $u \in X$ gibt mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{X', X} \text{ für alle } v \in X.$$

Die Funktion u heißt dann schwache Lösung des Dirichlet Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \text{ und } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien $f, g \in C^0([a, b])$ und seien $y \in C^0([a, b]), \xi, \xi' \in \mathbb{R}$ gegebene Daten. Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + gx(t) = y(t) \text{ für alle } t \in (a, b], \quad x(a) = \xi, \quad x'(a) = \xi'$$

genau eine Lösung $x \in C^2([a, b])$ besitzt, welche zudem stetig von den Daten (y, ξ, ξ') abhängt. Dabei ist die Norm auf $C^2([a, b])$ gegeben durch $\|x\|_{C^2([a, b])} := \|x\|_{C^0([a, b])} + \|x'\|_{C^0([a, b])} + \|x''\|_{C^0([a, b])}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte (2+2)) (Funktionale auf $C(I)'$). Sei $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall, $x_i \in I (i = 1, \dots, n)$ paarweise verschiedene Punkte und $\alpha_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$. Weisen Sie nach, dass die nachstehenden Abbildungen stetige, lineare Funktionale auf $C(I)$ definieren und bestimmen Sie deren Norm in $C(I)'$.

a) $T(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$

b) $T(f) := \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$

Aufgabe 4: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass durch

$$Tf := \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $X = C^0([-1, 1])$ definiert ist und es kein $f \in X, \|f\|_\infty \leq 1$, gibt, so dass $\|T\|_{X'} = |Tf|$ erfüllt ist.