Prof. Dr. M. Hinze WS 2007/2008

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 4
Abgabetermin: 26.11.2007 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 (2+2) Punkte) (Punktweise Konvergenz in $L(X, Y)$). Sei X Banach Raum, Y normierter Raum. Für $(T_n)_n \subset L(X, Y)$ existiere

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

für alle $x \in X$. Zeigen Sie

a) $T \in L(X, Y)$ mit $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{L(X,Y)}$.

b) $\|T - T_n\|_{L(X,Y)} \to 0$ für $n \to \infty$ kann i.d.R. **nicht** erwartet werden. Tipp: Betrachten Sie $T_n x := (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ auf $l^2(\mathbb{K})$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Volterra Integralgleichung). Sei $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und $(s, t) \mapsto k(s, t)$ eine auf $a \leq s \leq t \leq b$ stetige Funktion (stetiger Kern). Weisen Sie nach, dass die Volterra Integralgleichung 2ter Art

$$f(\bullet) - \int_a^{\bullet} k(\bullet, t) f(t) dt = g(\bullet) \text{ in } C^0(I)$$

für jede gegebene Funktion $g \in C(I)$ eine eindeutige Lösung $f \in C(I)$ besitzt. Dabei ist wie üblich $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\| \bullet \|_\infty$ normiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Kompakte Einbettung). Sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weisen Sie nach, dass dann die Einbettung

$$Id : (C^{0,\beta}(\bar{\Omega}), \| \bullet \|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}) \to (C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \| \bullet \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})})$$

stetig und auch kompakt ist.

Aufgabe 4: (4 (1+1+2) Punkte) Es bezeichne $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Berechnen Sie die Operatornorm $\|A\|$ von A für die Vektornormen i.) $\| \bullet \|_\infty$, ii.) $\| \bullet \|_1$ und iii.) $\| \bullet \|_2$.