Mathematisches Seminar
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Über die lokale Struktur endlicher Gruppen lokaler Charakteristik p vom Rang 2

Diplomarbeit

vorgelegt von:

Matthias Hamann

im Oktober 2007

Betreuer: Prof. Dr. Bernd Stellmacher

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Arbeit gliedert sich in ein Programm ein, das $\mathcal{K}_p$-Gruppen lokaler Charakteristik p untersucht. In [MSS1] wird eine Beschreibung des Programms gegeben. An dieser Stelle wird ein Überblick über die für dieses Programm wichtigen Begriffe gegeben und wie sich die vorliegende Arbeit in das Programm eingliedert.

Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Man sagt, G habe Charakteristik p, falls

$$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$$

gilt, G habe lokale Charakteristik p, falls jede p-lokale Untergruppe von G Charakteristik p hat, und G sei eine $\mathcal{K}_p$-Gruppe, falls jeder einfache Abschnitt einer p-lokalen Untergruppe von G eine der bekannten endlichen einfachen Gruppen ist; also eine abelsche Gruppe, eine alternierende Gruppe, eine Gruppe vom Lie-Typ oder eine der 26 sporadischen Gruppen.

Der wesentliche Schritt bei der Kennzeichnung der endlichen Gruppen lokaler Charakteristik p ist die Bestimmung der Struktur ihrer p-lokalen Untergruppen. Diese Untersuchung gliedert sich in zwei große Teilbereiche: Zum einen wird der Fall untersucht, dass G der Q-uniqueness genügt.

(Q-uniqueness) Es existiert eine nichttriviale p-Untergruppe Q in G mit
(i) $N_G(A) \leq N_G(Q)$ für alle $1 \neq A \leq C_G(Q)$ und
(ii) $C_G(Q) \leq Q$.

Zum anderen wird der Fall betrachtet, in dem eben diese Q-uniqueness nicht gilt. Diese Arbeit ist in Hinsicht dieser zwei Fälle dem ersten zuzuordnen.

Eine Gruppe heißt minimal parabolisch (bzgl. p), falls sie nicht p-abgeschlossen ist und jede p-Sylowuntergruppe in genau einer maximalen Untergruppe liegt. Sei Y_H der größte elementarabelsche p-Normalteiler einer endlichen Gruppe H mit $O_p(H/C_H(Y_H)) = 1$ (vgl. Kapitel 3 für dessen Existenz).

Der Fall, dass eine p-Sylowuntergruppe S von $\widetilde{C} := N_G(Q)$ in genau einer maximalen p-lokalen Untergruppe enthalten ist, wurde in der Arbeit [BHS] untersucht. Wir können also annehmen, dass neben der bereits erwähnten maximalen p-lokalen Untergruppe $\widetilde{C}$ eine weitere maximale p-lokale Untergruppe M existiert. In dieser Situation kann bei geeigneter Wahl von M die Struktur von $M/C_M(Y_M)$ und Y_M

genau angegeben werden, wie es in [MSS2] gemacht wird. Anhand dieser Information wird dann in [MS] der Fall $Y_M \not\leq O_p(\widetilde{C})$ behandelt. Wir beschäftigen uns hier mit der Situation $Y_M \leq O_p(\widetilde{C})$.

In der Arbeit [PPS] wurde für diesen Fall ($Y_M \leq O_p(\widetilde{C})$) gezeigt, dass - bis auf eine kleine Ausnahmesituation - die sogenannte P-uniqueness vorliegt.

(P-uniqueness) Es existiert genau eine minimal parabolische Untergruppe P lokaler Charakteristik p mit $S \leq P$, die nicht in $\widetilde{C}$ liegt.

Auf diesem Ergebnis aufbauend wurde noch in [MMPS] gezeigt, dass - außer in einem Spezialfall - die $\widetilde{P}$-uniqueness gilt.

($\widetilde{P}$-uniqueness) Es existiert höchstens eine minimal parabolische Untergruppe $\widetilde{P}$ lokaler Charakteristik p mit $S \leq P$ und $O_p(\langle P, \widetilde{P} \rangle) = 1$, die nicht in $N_G(O^p(P))$ liegt.

Diese Arbeit benutzt die drei genannten Uniqueness-Eigenschaften als Voraussetzung.

Der Rang n einer Gruppe ist die minimale Anzahl an verschiedenen minimal parabolischen Untergruppen P_i lokaler Charakteristik p, die alle eine gemeinsame p-Sylowgruppe von G enthalten, mit $O_p(\langle P_i | 1 \leq i \leq n \rangle) = 1$. In dieser Arbeit wird der Fall betrachtet, dass der Rang von G gleich 2 ist.

Im Weiteren setzen wir neben den Uniqueness-Eigenschaften noch $Y_P \leq O_p(\widetilde{C})$ voraus (nach Kapitel 3 folgt $Y_P \leq O_p(\widetilde{C})$ aus $Y_M \leq O_p(\widetilde{C})$). Außerdem sei G vom Rang 2. Die einzige Einschränkung gegenüber dieser allgemeinen Situation stellt jedoch noch die Tatsache dar, dass wir hier zusätzlich mit der Annahme arbeiten, dass $\widetilde{C}$ auflösbar ist.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen kann der Satz formuliert werden:

Satz 1.1 *Sei G eine endliche $\mathcal{K}_p$-Gruppe lokaler Charakteristik p vom Rang 2. Es gelten folgende Eigenschaften:*

(i) G erfülle die Q-, P- und $\widetilde{P}$-uniqueness,

(ii) es gelte $Y_P \leq O_p(\widetilde{C})$,

(iii) $\widetilde{C}$ sei auflösbar.

Dann existiert eine minimal parabolische Untergruppe $\widetilde{P}$ *von* $\widetilde{C}$ *mit* $S \leq \widetilde{P}$ *und* $O_p(\langle P, \widetilde{P} \rangle) = 1$ *derart, dass einer der folgenden Fälle gilt:*

(a) Es existiert ein $x \in \widetilde{P}$ *mit* $Y_P \not\leq O_p(P)^x$*;*

(b) es existiert ein $x \in \widetilde{P}$ *und ein* $y \in P^x$ *mit* $Y_P \not\leq O_p(\widetilde{P})^y$*;*

(c) P *und* $\widetilde{P}$ *bilden ein schwaches* BN*-Paar.*

Schwache BN-Paare wurden in [DS] behandelt. Also ist in dieser Situation die Gruppe G schon bekannt und es verbleiben nur noch die Fälle (a) und (b), die noch näher diskutiert werden können. In [DS] entspricht es der Situation, dass $b = 2$ oder $b = 3$ gilt. Diese kann ähnlich bearbeitet werden, wie es dort gemacht wird. Darauf wird jedoch in der vorliegenden Arbeit verzichtet.

Herrn Prof. Stellmacher möchte ich für das interessante Thema und die gute Betreuung meiner Diplomarbeit herzlich danken.

2 Definitionen und die $P!$- und $\widetilde{P}!$-Theoreme

In diesem Kapitel werden noch einige Definitionen und die für diese Arbeit wichtigen $P!$- und $\widetilde{P}!$-Theoreme angegeben.

Definition 2.1 *Es sei* $H^\circ := \langle Q^H \rangle$ *für alle* $H \leq G$.

Definition 2.2 *Sei* $H \in \{S_n, SL_2(q), Sp_{2n}(q)\}$ *und* V *ein endlicher, irreduzibler* $GF(p)H$*-Modul.*

(i) Ist $H = S_n$*, so heißt* V *ein natürlicher* S_n*-Modul, falls* $p = 2$ *und* V *isomorph zum eindeutig bestimmten nicht-trivialen irreduziblen Faktormodul des* $GF(p)S_n$*-Permutationsmoduls ist.*

(ii) Ist $H = SL_2(q)$*, so heißt* V *ein natürlicher* $SL_2(q)$*-Modul, falls* $End_{SL_2(q)}(V) \cong GF(q)$ *und* V *ein* 2*-dimensionaler* $End_{SL_2(q)}(V)SL_2(q)$*-Modul ist.*

(iii) Ist $H = Sp_{2n}(q)$*, so heißt* V *ein natürlicher* $Sp_{2n}(q)$*-Modul, falls* $2n = dim_{End_H(V)}(V)$ *ist und* H *eine nicht-ausgeartete symplektische Form auf dem* $End_H(V)$*-Vektorraum* V *invariant läßt.*

Definition 2.3 *Sei* $T \leq G$ *eine* p*-Gruppe. Dann ist* $B(T) := \Omega_1(Z(J(T)))$ *die Baumann-Untergruppe von* T*, wobei* $J(T)$ *die Thompson-Untergruppe ist.*
Ist $H \leq G$*, so sei* $B(H) := \langle B(T) | T \in Syl_p(H) \rangle$.

Definition 2.4 *Sei* H *eine Gruppe und* V *ein elementarabelscher* p*-Normalteiler von* H*. Sei* $A \leq H$ *derart, dass* $A/C_A(V)$ *eine elementarabelsche* p*-Gruppe ist.*

(a) A *heißt Offender auf* V*, falls* $|V/C_V(A)| \leq |A/C_A(V)|$ *gilt;*

(b) A *heißt Over-Offender auf* V*, falls* $|V/C_V(A)| < |A/C_A(V)|$ *gilt;*

(c) A *heißt Best-Offender auf* V*, falls* $|B||C_V(B)| \leq |A||C_V(A)|$ *für alle* $B \leq A$ *gilt.*

Sei $\mathfrak{O}_H(V)$ *die Menge der Best-Offender auf* V*. Ist* $\mathfrak{O}_H(V) \neq \emptyset$*, so sei* $m_H(V) := \max\{|A/C_A(V)||C_V(A)| | A \in \mathfrak{O}_H(V)\}$*. Es sei* $\mathfrak{A}_H(V)$ *die Menge der inklusionsminimalen Elemente der Menge* $\{A \in \mathfrak{O}_H(V) | |A/C_A(V)||C_V(A)| = m_H(V)\}$.

Theorem 2.5 ($P!$-Theorem, [PPS]) *Sei $P^* := P^\circ O_p(P)$, $S^* := S \cap P^*$ und $Z_0 := \Omega_1(Z(S \cap P^*))$.*
Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $P^*/O_p(P) \cong SL_2(q)$ und Y_P ist ein natürlicher $SL_2(q)$-Modul für $P^*/O_p(P)$, wobei $q = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

(b) $Z_0 \trianglelefteq \widetilde{C}$ und $P \cap \widetilde{C}$ ist die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von P, die S enthält.

(c) Entweder ist P die einzige p-lokale Untergruppe, die nicht in $\widetilde{C}$ liegt und S enthält, oder p ist ungerade und für jede p-lokale Untergruppe H außerhalb von $\widetilde{C}$ gilt $O_p(H) = Y_H \leq B(S)$, $B(H)/Y_H \cong SL_2(q)$ und Y_H ist ein natürlicher $SL_2(q)$-Modul für $B(H)/Y_H$.

Theorem 2.6 ($\widetilde{P}!$-Theorem, [MMPS]) *Es gilt eine der folgenden Aussagen:*

(a) Es existiert höchstens eine minimal parabolische Untergruppe $\widetilde{P}$, die S enthält, sodass P° von $\widetilde{P}$ nicht normalisiert wird und $O_p(\langle P, \widetilde{P}\rangle) \neq 1$ gilt. Für $M_1 := \langle P, \widetilde{P}\rangle^\circ C_S(Y_P)$ gelten dann die folgenden Aussagen:

(a1) $M_1/C_{M_1}(Y_{M_1}) \cong SL_3(q), Sp_4(q)$ oder $Sp_4(2)'$ (und $p = 2$)

(a2) $[Y_{M_1}, M_1]$ ist der entsprechende natürliche Modul für $M_1/C_{M_1}(Y_{M_1})$.

(b) Es existieren mindestens zwei minimal parabolische Untergruppen $\widetilde{P}_1$ und $\widetilde{P}_2$, die S enthalten und P° nicht normalisieren mit $O_p(\langle P, \widetilde{P}_i\rangle) \neq 1$ für $i = 1, 2$. Für $M_i := \langle P, \widetilde{P}_i\rangle^\circ C_S(Y_P)$ gelten dann die folgenden Aussagen:

(b1) $p = 3$ oder $p = 5$ und $O^{p'}(M_1 \cap M_2) = P$

(b2) $M_i/O_p(M_i) \cong SL_3(p)$

(b3) $O_p(M_i)/Z(O_p(M_i))$ und $Z(O_p(M_i))$ sind natürliche $SL_3(p)$-Moduln für $M_i/O_p(M_i)$.

Nach den Voraussetzungen unseres Satzes befinden wir uns also in Teil (c) des $P!$-Theorems im ersten Fall und im $\widetilde{P}!$-Theorem im Teil (a). Da unsere Voraussetzungen denen der obigen Theoreme entsprechen, können wir also die Schlussfolgerungen benutzen und erhalten damit schon erste Informationen über P.

Sei $\widetilde{P}$ eine minimal parabolische Untergruppe lokaler Charakteristik p von $\widetilde{C}$ mit $S \leq \widetilde{P}$ und $O_p(\langle P, \widetilde{P}\rangle) = 1$. Sei $\widetilde{P}^* := O^p(\widetilde{P})S^*$ und M die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von $\widetilde{P}$, die S enthält.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Bedeutung von $\widetilde{P}$ aus dem $\widetilde{P}$!-Theorem eine andere ist, als die hier verwendete. Wird die $\widetilde{P}$-uniqueness einmal gebraucht, so wird die Untergrupppe stets eine andere Bezeichnung tragen.

Weil sich alle Voraussetzungen auf die Gruppe $\langle P, \widetilde{P}\rangle$ übertragen lassen und wir nur über diese Gruppe etwas aussagen möchten, sei angenommen, dass $G = \langle P, \widetilde{P}\rangle$ gilt.

3 Kleine Lemmata und wichtige Sätze

Lemma 3.1 *Sei P eine minimal parabolische Gruppe und $N \trianglelefteq P$ mit $N \leq M$, wobei M die eindeutig bestimmte Untergruppe von P ist, die die p-Sylowgruppe T enthält. Sei $\overline{P} := P/N$. Dann ist $\overline{P}$ eine minimal parabolische Gruppe und es gilt $O_p(\overline{P}) = \overline{O_p(P)}$.*

Beweis [BHS] (3.4). $\square$

Lemma 3.2 *Sei H eine endliche Gruppe der Charakteristik p. Es gilt $H = \langle \widehat{P} | T \leq \widehat{P} \leq H$ minimal parabolisch$\rangle N_H(T)$ für eine p-Sylowuntergruppe T von H. Insbesondere gilt auch $HT = \langle \widehat{P} | T \leq \widehat{P} \leq HT$ minimal parabolisch$\rangle N_H(T)$.*

Beweis [PPS] (1.3). $\square$

Lemma 3.3 *Sei P eine endliche Gruppe der Charakteristik p, $T \in Syl_p(P)$ und $T \leq M \leq P$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Es existiert ein eindeutig bestimmter maximaler elementarabelscher p-Normalteiler Y_P von P, sodass $O_p(P/C_P(Y_P)) = 1$ ist.

(b) $Y_M \leq Y_P$.

(c) Ist P minimal parabolisch, so gilt für jeden Normalteiler N von P: $O^p(P) \leq N$ oder $T \cap N \leq O_p(P)$.

Beweis

(a) [PPS] (1.2)(a).

(b) [PPS] (1.2)(b).

(c) [PPS] (1.3)(b).

$\square$

Lemma 3.4 *Sei P eine endliche, auflösbare, minimal parabolische Gruppe mit $C_P(O_p(P)) \leq O_p(P)$. Dann ist $|\pi(P)| = 2$ und $O^p(P)/O_p(O^p(P))$ eine p'-Gruppe.*

Beweis Der erste Teil folgt aus der Existenz von π-Halluntergruppen in auflösbaren Gruppen; der zweite Teil folgt aus der Lage von Normalteilern in minimal parabolischen Gruppen und der Existenz einer Kompositionsreihe mit q-Faktorgruppen in auflösbaren Gruppen. $\square$

Lemma 3.5 *Sei P eine auflösbare, minimal parabolische Gruppe mit einer p-Sylowgruppe T und einem Normalteiler $N \leq O_p(P)$. Ist $[N, O_p(P) \cap O^p(P)] = 1$, so gilt genau einer der folgenden Fälle:*

(i) $[Z(T), O^p(P)] \neq 1$

(ii) $[N, O^p(P)] = 1$

Beweis [S2] (3.5). □

Lemma 3.6 *Für jede p-lokale, minimal parabolische Untergruppe U mit $O_p(U) \notin Syl_p(U)$ der $SL_3(q)$ gilt $U/O_p(U) \cong SL_2(q)$.*

Beweis Sei $X \cong SL_3(q)$ und U eine p-lokale, minimal parabolische Untergruppe von X. Es gibt bis auf Konjugation nur zwei maximale p-lokale Untergruppen der $SL_3(q)$. Diese sind die Stabilisatoren von Punkten und Ebenen. Also liegt U in einer solchen Untergruppe. Die genannten Untergruppen sind jedoch modulo ihrem O_p genau zur $SL_2(q)$ isomorphe Gruppen. □

Lemma 3.7 *Für jede p-lokale, minimal parabolische Untergruppe U mit $O_p(U) \notin Syl_p(U)$ der $Sp_4(q)$ gilt $U/O_p(U) \cong SL_2(q)$.*

Beweis Die einzigen Untergruppen der $Sp_4(q)$, die die Voraussetzungen erfüllen, sind Stabilisatoren von isotropen Punkten und Ebenen. Diese haben die gewünschte Gestalt. □

Lemma 3.8 *Für jede 2-lokale, minimal parabolische Untergruppe U mit $O_2(U) \notin Syl_2(U)$ der $Sp_4(2)'$ gilt $U/O_2(U) \cong S_3$.*

Beweis Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $Sp_4(2) \cong S_6$ ist, also $Sp_4(2)' \cong A_6$ gilt. In dieser gilt die Behauptung. □

Lemma 3.9 *Sei H eine endliche Gruppe, $p \neq 2$ und V ein treuer $GF(p)H$-Modul. Es operiere H treu und nicht p-stabil auf V. Ist H auflösbar, so ist $p = 3$.*

Beweis [KS] (9.1.4). □

Lemma 3.10 *Sei p eine Primzahl und P eine minimal parabolische Gruppe, die treu auf einer elemantarabelschen p-Gruppe V operiert. Ist $O_p(P) = 1$ und existieren Best-Offender in P auf V, so ist $[C_V(T), P] \neq 1$ für alle $T \in Syl_p(P)$.*

Beweis [BHS] Lemma 5.6. □

Satz 3.11 *Sei p eine Primzahl, P eine minimal parabolische Gruppe, die treu auf einer elementarabelschen p-Gruppe V operiere. Sei $T \in Syl_p(P)$ und $M \leq P$ die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von P, die T enthält. Es gelte $O_p(P) = 1$, P enthalte einen Best-Offender in P auf V und $C_P(C_V(T)) \leq M$. Sei $\mathfrak{D} := \mathfrak{A}_P(V)$. Dann existieren Untergruppen $E_1, \ldots, E_r$ von P, sodass für alle $1 \leq i \leq r$ gilt:*

(a) $P = (E_1 \times \ldots \times E_r)T$,

(b) T *operiert transitiv auf* $\{E_1, \ldots, E_r\}$,

(c) $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D} \cap E_1) \cup \ldots \cup (\mathfrak{D} \cap E_r)$,

(d) $V = C_V(E_1 \times \ldots \times E_r) \prod_{i=1}^{r} [V, E_i]$ *mit* $[V, E_i, E_j] = 1$,

(e) $E_i \cong SL_2(p^n)$ *oder* $p = 2$ *und* $E_i \cong S_{2^n+1}$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$,

(f) $[V, E_i]/C_{[V,E_i]}(E_i)$ *ist ein natürlicher Modul für* E_i.

Beweis [BHS] Theorem 5.5. □

Lemma 3.12 *(L-Lemma) Sei p eine Primzahl und P eine minimal parabolische Gruppe. Sei $T \in Syl_p(P)$ und M die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von P, die T enthält. Sei $A \leq T$ mit $A \not\leq O_p(P)$. Dann existiert eine Untergruppe L, die A enthält, sodass folgende Eigenschaften gelten:*

(a) $AO_p(L)$ *ist in genau einer maximalen Untergruppe* M_0 *von* L *enthalten und es gilt* $M_0 = L \cap M^g$ *für ein* $g \in P$.

(b) $L = \langle A, A^x \rangle O_p(L)$ *für alle* $x \in L \setminus M_0$.

(c) L *liegt in keiner zu* M *konjugierten Untergruppe von* P.

Ist zudem L auflösbar und A elementarabelsch, so gilt $|A/A \cap O_p(L)| = p$.

Beweis Die Aussagen (a)-(c) sind in [PPS] zu finden. Es bleibt also der Zusatz zu zeigen.

Sei dazu $\overline{L} := L/O_p(L)$ und $R := O_{p'}(\overline{L})$. Dann ist $R\overline{T} = \overline{L}$. Angenommen, es ist $|\overline{A}| > p$. Dann operiert $\overline{A}$ teilerfremd auf R und es gilt nach [KS] (8.3.4)

$R = \langle C_R(a) | a \in \overline{A}^\# \rangle$. Wäre $C_R(a) \leq \overline{M}_0$ für alle $a \in \overline{A}^\#$, so wäre $R \leq \overline{M}_0$, also $\overline{L} \leq \overline{M}_0$, was falsch ist. Also existiert ein $a \in \overline{A}^\#$ mit $C_R(a)\overline{A} \not\leq \overline{M}_0$. Andererseits ist $C_{\overline{L}}(a) = \overline{L}$ oder $C_{\overline{L}}(a) = \overline{M}_0$. Es ist also nur der erste Fall auszuschließen, was durch $1 \neq a \in O_p(\overline{L}) = 1$ gemacht wird. Zudem gilt offenbar nach Teil (a), dass L keine p-Gruppe ist, also $|A/(A \cap O_p(L))| \neq 1$ gilt. $\square$

4 Quadratische Operation

In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften bestimmter Gruppen gezeigt, die quadratisch auf einem Modul V operieren.

Lemma 4.1 *Sei H eine endliche Gruppe, $r = 3$ und M ein treuer irreduzibler $GF(r)H$-Modul. Es existiere eine Untergruppe $A \neq 1$ von H mit $H = \langle A^H \rangle$ und $[M, A, A] = 0$. Sei $a \in A$ und K eine a-invariante r'-Untergruppe von H. Ist K abelsch oder $|K|$ gerade, so gilt $[K, a] = 1$.*

Beweis [C] (1.2). □

Lemma 4.2 *Sei $H = WT$ mit $W = O_{p'}(H)$, $T \in Syl_p(H)$ und V ein treuer H-Modul, auf dem T quadratisch operiert. Es gelte $V = \langle C_V(T)^H \rangle$.*

Dann gilt $V = \langle C_V(T_0) || T/T_0| = p \rangle$.

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} H &= WT \\ &= C_H(T)[W, T] \\ &= C_H(T)[\langle C_W(T_0) || T/T_0| = p\rangle, T] \\ &= C_H(T)\langle [C_W(T_0), T] || T/T_0| = p\rangle. \end{aligned}$$

Sei $U \leq T$ mit $|T/U| = p$, $N := C_W(U)$ und $V_0 := \langle C_V(T_0) || T/T_0| = p\rangle$. Es ist also zu zeigen, dass $V = V_0$ gilt. Dazu ist zu zeigen, dass V_0 H-invariant ist, denn dann gilt

$$V \geq V_0 = \langle \langle C_V(T_0) || T/T_0| = p\rangle^H \rangle \geq \langle C_V(T)^H \rangle = V,$$

also $V = V_0$.

Als nächstes wird gezeigt, dass V_0 von $[N, T]$ normalisiert wird: Sei dazu $T_0 \leq T$ mit $|T/T_0| = p$. Dann gilt

$$[T, C_V(T_0), N] \leq [C_V(T), N] \leq [C_V(U), N] \leq C_V(U)$$

und

$$[C_V(T_0), N, T] \leq [V, T] \leq C_V(T) \leq C_V(H),$$

also folgt mit dem 3-Untergruppen-Lemma $[N, T, C_V(T_0)] \leq C_V(U) \leq V_0$. Daher gilt $[N, T, V_0] \leq V_0$. Also wird V_0 von ganz $\langle [C_W(T_0), T] || T/T_0| = p\rangle$ normalisiert und auch von $C_H(T)$, da V_0 T-invariant ist. Also gilt $V_0 = V_0^H$. □

Lemma 4.3 *Sei W eine nicht-abelsche 2-Gruppe mit zyklischem Zentrum. Sei a ein Element der Ordnung 3 mit $[W, a] = W$. Es operiere a quadratisch auf einem treuen W-Untermodul eines $GF(3)\langle a\rangle W$-Moduls. Dann ist $W \cong Q_8$.*

Beweis Da $Z(W)$ abelsch ist, gilt $[Z(W), a] = 1$. Sei $N \trianglelefteq W$ mit $[N, a] = 1$. Dann gilt

$$[N, a, W] = [1, W] = 1 = [N, a] \geq [W, N, a]$$

und daher nach dem 3-Untergruppen-Lemma auch $1 = [a, W, n] = [W, n]$; also ist dann $N \leq Z(W)$. Sei nun $Z(W)N \trianglelefteq W$ mit N a-invariant und $N/Z(W)$ minimal. Dann ist $[N, a] \neq 1$. Von N ist $[N, W]$ ein Normalteiler mit $[N, W] < N$, da N und W 2-Gruppen sind. Weil $[N, W]$ a-invariant ist, folgt aus der Minimalität von $N/Z(W)$: $[N, W] \leq Z(W)$. Es folgt mit dem 3-Untergruppen-Lemma wegen

$$[C_N(a), a, W] = 1 = [Z(W), a] \geq [W, C_N(a), a]$$

auch $1 = [W, a, C_N(a)] = [W, C_N(a)]$, also $C_N(a) \leq Z(W)$ und daher, weil a teilerfremd auf N operiert, $N = [N, a]C_N(a) = [N, a]Z(W)$. Somit ist $Z([N, a]) \leq Z(N)$, und wegen der Minimalität von N gilt $Z(N) \leq Z(W)$. Also ist $Z([N, a]) \leq Z(W)$ und daher zyklisch. Es folgt $[N, a] = W$ oder mit Induktion $[N, a] \cong Q_8$.

Sei zunächst $[N, a] \cong Q_8$. Dann ist $N \cong Q_8 \curlyvee Z(W)$.

Angenommen, es existiert eine Involution $t \in N$, die nicht zentral in N ist. Dann ist $t = c_1 c$ mit $c_1 \in Q_8$ und $c \in Z(W)$, wobei c_1 nicht die zentrale Involution in der Q_8 ist, da diese auch in $Z(W)$ liegt. Dann ist $N = \langle t, t^a, t^{a^2}\rangle Z(W)$, denn es ist $|N/Z(W)| = 4$ und $t^a \neq t$; insbesondere gilt $c_1^a \neq c_1$, da a in N nur $Z(W)$ zentralisiert. Außerdem operiert a nicht auf $\langle c_1\rangle$, da es sonst als 3-Element auf einer C_4 trivial operieren müsste. Also gilt $c_1^a \notin \langle c_1\rangle$ und somit $N = \langle t, t^a, t^{a^2}\rangle Z(W)$. Es ist $[t, W] = \langle z\rangle$, wobei z die Involution aus $Z(W)$ sei, denn es gilt $[t, w]^2 = [c_1, w]^2 = c_1 c^w c_1^{-1} c_1^w = c_1^2 (c^w)^{c^{-1}} c^w$. Da $c_1^2 \in Z(W)$ und $[t, w] \in Z(W)$ ist, folgt $(c^w)^{c^{-1}} c^w \in Z(W) \cap Q_8^w = \langle z\rangle$. Offenbar zentralisiert t nicht W. Daher gilt $[t, W] = \langle z\rangle$. Somit gilt $|W/C_W(t)| = |[t, W]| = 2$, also $|W/C_W(N)| \leq 8$, da $N = \langle t, t^a, t^{a^2}\rangle Z(W)$ ist. Wäre $|W/C_W(N)| = 8$, so wäre $NC_W(N) \trianglelefteq W$ vom Index 2. Also würde $W/NC_W(N)$ von a zentralisiert, weil $NC_W(N)$ von a normalisiert wird. Aber dann wäre $[W, a] < W$, ein Widerspruch. Also gilt $|W/C_W(N)| \leq 4$. Da $NC_W(N)/C_W(N) \leq W/C_W(N)$ und $|NC_W(N)/C_W(N)| = 4$ ist, folgt $|W/C_W(N)| = 4$ und somit auch $W = NC_W(N) = [N, a]C_W(N)$.

Als nächstes wird gezeigt, dass $[N,a] \cap C_W(N) = \langle z \rangle$ ist. Sei dazu $C := [C_W(N), a]$. Dann ist $C \leq C_W(N)$ und $C[N,a] = W$, da $W = [W,a]$ ist. Zudem wird C von C und N, also W normalisiert. Eine wichtige Eigenschaft von p-Gruppen zeigt: $C \cap Z(W) \neq 1$, also $\langle z \rangle \leq C \leq C_W(N)$. Da offenbar auch die Umkehrung gilt nach der Struktur der Q_8, folgt $[N,a] \cap C_W(N) = \langle z \rangle$. Insbesondere ist $C = C_W(N)$, da sonst $CN < C_W(N)N$. Wäre $C_W(N) \leq [N,a]$, so wäre $W = N$, was dem Fall $[N,a] < W$ widerspricht. Also ist nach Induktion $C_W(N) \cong Q_8$ wegen $C = C_W(N)$ und somit $W = Q_8 \curlyvee Q_8$. Sei $c \in N$ und $C_1 \in C_W(N)$ mit $o(c) = 4 = o(c_1)$. Dann ist $(cc_1)^2 = c^2 c_1^2 = zz = 1$, also ist $t := cc_1$ eine Involution. Somit ist $\langle t^{\langle a \rangle} \rangle \langle z \rangle$ eine Gruppe der Ordnung 8 mit mindestens vier Involutionen. Sie ist abelsch oder isomorph zur D_8. Wäre sie abelsch, so folgt ein Widerspruch zu Lemma 4.1. Also ist sie isomorph zur D_8 und a-invariant. Es existiert eine eindeutig bestimmte zyklische Untergruppe der Ordnung 4. Diese wird von a invariant gelassen, also zentralisiert, da a nur trivial auf der C_4 operieren kann. Weil andererseits auch $D_8/C_4 \cong C_2$ a-invariant ist, wird es aus gleichem Grund zentralisiert. Wegen teilerfremder Operation wird die ganze D_8 zentralisiert. Insbesondere werden dann auch die Projektionen der D_8 in eine Q_8 zentralisiert, was $[Q_8, a] = Q_8$ widerspricht.

Sei $c \in Z(W)$ mit $o(c) = 4$, und $c_1 \in [N,a]$ mit $o(c_1) = 4$. Dann ist $(c_1 c)^2 = c_1^2 c^2 = zz = 1$. Weil so eine Involution - wie eben gezeigt - nicht existiert, gilt $|Z(W)| = 2$ und wegen $N = [N,a]Z(W)$, folgt $N \cong Q_8$. Da $[c, W] = \langle z \rangle$ für $c \in N$ mit $o(c) = 4$ ist, folgt $|W/C_W(Nc)| = 2$, also $|W/C_W(N)| \leq 8$. Analog dem letzten Fall folgt auch hier ein Widerspruch, sodass $N = W$ gilt.

Da W' ein a-invarianter echter Normalteiler von W ist, gilt $W' \leq Z(W)$, also $W/Z(W)$ abelsch. Seien $x, y \in W \setminus Z(W)$ mit $xZ(W) \neq yZ(W)$ und $xy \neq yx$.

Dann gilt

$$[x,y]^2 = x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}yy^{-1}xx^{-1}yy^{-1}x = 1,$$

denn $y^{-1}x \in Z(W)$. Also ist $[x,y] = z$ und daher $W' = \langle z \rangle$. Sei $\overline{W} := W/W'$. Da $\overline{W}$ abelsch ist, gilt $\overline{W} = C_{\overline{W}}(a) \times [\overline{W}, a]$. Weil $[W,a] = W$ ist, ist auch $[\overline{W}, a] = \overline{W}$, also $C_{\overline{W}}(a) = 1$. Wegen $\overline{Z(W)} \leq C_{\overline{W}}(a)$ folgt $\overline{Z(W)} = 1$, also $W' = Z(W)$ und daher $|Z(W)| = 2$. Sei $\overline{d} \in \overline{W}$ eine Involution. Da $\overline{W}$ abelsch ist, ist $\langle \overline{d}^{\langle a \rangle} \rangle$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4, denn $[\overline{d}, a] \neq 1$. Weil das Urbild von $\langle \overline{d}^{\langle a \rangle} \rangle$ ein a-invarianter Normalteiler von W ist, folgt $\overline{W} = \langle \overline{d}^{\langle a \rangle} \rangle$. Daher ist

W eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung 8 mit $|Z(W)| = 2$, also auch nicht elementarabelsch. Da, wie gesehen, auf einer D_8 ein Element der Ordnung 3 nur trivial operieren kann, folgt $W \cong Q_8$. $\square$

Lemma 4.4 *Sei a ein Element der Ordnung 3. Sei V ein nicht-trivialer, irreduzibler treuer W-Untermodul eines $GF(3)\langle a\rangle W$-Moduls mit $W \cong Q_8$, $[W,a] = W$, $[V,a,a] = 0$ und $[V,a] \neq 0$. Dann wird V von a normalisiert.*

Beweis Angenommen, a normalisiert V nicht. Dann ist $V \cap V^a = 0$, da $V \cap V^a$ ein W-Modul, aber V irreduzibel ist. Sei $V^* := V \oplus V^a$. Dann ist

$$V^* = V + [V,a] = V^a + [V,a] = V^a + [V,a]^a = V^{*\,a}.$$

Sei $v \in V$. Es gilt

$$v + v^a + v^{a^2} = (v - v^a) + (-v^a + v^{a^2}) = (v - v^a) - (v - v^a)^a = v - v^a - v + v^a = 0,$$

denn $[v,a]$ wird wegen $[v,a,a] = 0$ von a zentralisiert. Da $[a,W] = W$ ist, existiert ein $w \in W$, sodass aw zu a konjugiert, $aw \notin \langle w\rangle$ und o.B.d.A. $o(w) = 4$ ist. Es gilt $0 = v + v^{aw} + v^{(aw)^2}$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$, also $v^{aw} + v^{w^{-1}a^{-1}} = -v = v^a + v^{a^{-1}}$ wegen $(aw)^2 = (aw)^{-1} = w^{-1}a^{-1}$. Folglich gilt $-v^a + v^{aw} = v^{a^{-1}} - v^{w^{-1}a^{-1}}$. Da nun $v^{w^{-1}} \in V$ ist, folgt $v^{w^{-1}a^{-1}} \in V^{a^{-1}}$, also $v^{a^{-1}} - v^{w^{-1}a^{-1}} \in V^{a^{-1}}$. Andererseits ist aber auch $v^{aw} \in V^a$, also $-v^a + v^{aw} \in V^a$. Wegen $V^a \cap V = 0$ folgt $-v^a + v^{aw} = 0$ und somit $v^a = v^{aw}$, also $v^a \in C_{V^a}(\langle w\rangle)$. Da $\langle w\rangle \trianglelefteq W$, ist $C_{V^a}(\langle w\rangle)$ ein W-Modul, also wegen der Irreduzibilität von V^a gleich 0 oder V^a. Es kann nicht V^a sein, weil dann w trivial auf V^a operierte, aber wegen $v^{a^{-1}} - v^{w^{-1}a^{-1}} = 0$, also $v \in C_V(w^{-1})$, auch $(w^{-1})^a \notin \langle w\rangle$ trivial auf V^a operierte, und somit ganz W, was der Voraussetzung $V \neq 0$ widerspräche. Also ist $0 = C_{V^a}(\langle w\rangle)$ und daher $v^a = 0$, also $v = 0$, was der Wahl von v widerspricht und das Lemma zeigt. $\square$

Lemma 4.5 *Sei a ein Element der Ordnung 3. Sei W eine 2-Gruppe mit $W = [W,a]$ und V ein treuer W-Untermodul eines $GF(3)\langle a\rangle W$-Moduls. Es gelte $[V,a,a] = 1 \neq [V,a]$.*

Dann gilt $C_W(a) = Z(W) = \Phi(W) = \Omega_1(Z(W))$.

Beweis Sei U ein irreduzibler W-Untermodul von V und $\overline{W} := W/C_W(U)$. Nach [KS](5.3.7) enthält jede abelsche 2-Gruppe mindestens zwei Involutionen, wenn sie nicht zyklisch ist. Angenommen also, dass $Z(\overline{W})$ nicht zyklisch ist. Dann existieren 2 Involutionen in $Z(\overline{W})$. Insbesondere gilt nach (8.3.4)[KS]:

$$U = \sum_{t \in \Omega_1(Z(\overline{W}))} C_U(t).$$

Da $C_U(t) \neq U$ für alle $t \in \Omega_1(Z(\overline{W}))$ nach Wahl von $\overline{W}$ ist, existieren zwei Involutionen t_1 und t_2 mit $C_U(t_1) \not\leq C_U(t_2) \not\leq C_U(t_1)$. Insbesondere ist $C_U(t_1)$ $\overline{W}$-invariant. Also gilt $C_U(t_1) = 0$ nach der Irreduzibilität von U - ein Widerspruch zu $C_U(t_1) \not\leq C_U(t_2)$. Somit ist $Z(\overline{W})$ zyklisch und nach Lemma 4.3 gilt $\overline{W} \cong Q_8$. Also gilt $\Phi(\overline{W})^2 = 1$. Da $\Phi(W)$ in dem Urbild A von $\Phi(\overline{W})$ liegt, gilt $\Phi(W)^2 \leq A^2 \leq C_W(U)$. Zudem ist $C_{\overline{W}}(a)^2 = 1$, also gilt mit B als dem Urbild von $C_{\overline{W}}(a)$: $C_W(a)^2 \leq B^2 \leq C_W(U)$. Da die Operation von W auf V halbeinfach ist nach dem Satz von Maschke (vgl. z.B. [KS] (8.4.6)), folgt $\Phi(W)^2 \leq C_W(V) = 1$ und $C_W(a)^2 \leq C_W(V) = 1$. Also sind $\Phi(W)$ und $C_W(a)$ elementarabelsch.

Nach Lemma 4.1, folgt $Z(W) \leq C_W(a) \geq \Phi(W)$. Insbesondere gilt damit $Z(W) = \Omega_1(Z(W))$.

Als nächstes wird gezeigt: $C_W(a) \leq Z(W)$. Dafür wird zunächst gezeigt, dass $C_W(a) \trianglelefteq W$ gilt. Sei $W_1 := N_W(C_W(a))$. Es gilt $W_1 = C_W(a)[W_1, a]$, da W_1 a-invariant ist. Sei $W_2 := [W_1, a]$. Dann gilt $[a, C_W(a), W_1] = 1 = [W_1, C_W(a), a]$, also nach dem 3-Untergruppen-Lemma auch $[W_2, C_W(a)] = 1$. Weil $C_W(a)$ elementarabelsch ist, folgt $C_W(a) \leq Z(W_1)$. Wie für W gilt auch für W_1: $C_{W_1}(a) \geq Z(W_1)$ nach Lemma 4.1, also $C_W(a) = Z(W_1)$. Somit ist $C_W(a) = Z(W_1) \trianglelefteq N_W(W_1)$. Da W eine 2-Gruppe ist, folgt $W = W_1$, also $C_W(a) \trianglelefteq W$. Nun gilt $[C_W(a), W] = [W, a, C_W(a)]$. Da $[a, C_W(a), W] = 1 = [W, C_W(a), a]$, folgt auch hier mit dem 3-Untergruppen-Lemma $[C_W(a), W] = 1$, also $C_W(a) \leq Z(W)$ und daher $C_W(a) = Z(W)$.

Weil $W/\Phi(W)$ elementar abelsch ist, gilt

$$W/\Phi(W) = [W/\Phi(W), a] \times C_{W/\Phi(W)}(a).$$

Da aber $W = [W, a]$ gilt, folgt $[W/\Phi(W), a] = W/\Phi(W)$, also $C_{W/\Phi(W)}(a) = 1$. Daher ist $C_W(a)\Phi(W)/\Phi(W) = 1$ und somit $\Phi(W) = C_W(a)$. □

Lemma 4.6 *Sei a ein Element der Ordnung 3. Sei W eine 2-Gruppe mit $[W, a] = W$ und V ein treuer W-Untermodul eines $GF(3)\langle a\rangle W$-Moduls. Es gelte $[V, a, a] = 0 \neq [V, a]$.*

Dann ist $W \cong \bigtimes_{i=1}^{r} Q_8$ *für ein* $r \in \mathbb{N}$ *und* a *lässt die einzelnen Faktoren invariant.*

Beweis Sei $\overline{W} := W/Z(W)$. Da $Z(W) = \Phi(W)$ nach dem Lemma 4.5 ist, ist $\overline{W}$ elementarabelsch. Sei $t \in \overline{W}$. Dann ist $\overline{K}_1 := \langle t, t^a, t^{a^2} \rangle$ eine a-invariante Untergruppe von $\overline{W}$ mit Ordnung höchstens 8. Auf einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 8 kann ein Element der Ordnung 3 nicht fixpunktfrei operieren. Da die Operation von a auf $\overline{W}$ nach dem Satz von Maschke halbeinfach ist, folgt, dass $\overline{K}_1$ die Ordnung 4 haben muss. Durch Induktion auf das a-invariante Komplement von $\overline{K}_1$ in $\overline{W}$ folgt $\overline{W} = \overline{K}_1 \times \ldots \times \overline{K}_r$ mit $\overline{K}_i$ a-invarianten Gruppen der Ordnung 4. Dann existieren minimale Urbilder K_i von $\overline{K}_i$ in W mit $[K_i, a] = K_i$.

Es wird als nächstes gezeigt, dass $|K_i'| = 2$ gilt: Seien $t_1, t_2, t_3 \in K_i \setminus Z(W)$ mit $\bar{t}_i \notin \langle \bar{t}_j \rangle$ für $i \neq j$. Dann gilt $[t_i, t_j z] = [t_i, t_j]$ für alle $z \in Z(W)$. Insbesondere kann also $t_1^a = t_2$ und $t_2^a = t_3$ angenommen werden. Es gilt

$$[t_2, t_3] = t_2^{-1} t_3^{-1} t_2 t_3 = (t_1^{-1} t_2^{-1} t_1 t_2)^a = [t_1, t_2],$$

da $[t_1, t_2] \in Z(W) = C_W(a)$. Analog gilt $[t_2, t_3] = [t_1, t_3]$. Also folgt $|K_i'| = 2$. Daher ist $K_i \cong Q_8$. Wäre $W \neq K_1 \cdots K_r$, so wäre $Z(W) \not\leq K_1 \cdots K_r$. Insbesondere wäre aber $W = (K_1 \cdots K_r) Z(W)$, was $W = [W, a]$ wegen $Z(W) = C_W(a)$ widerspricht. Also gilt $W = K_1 \cdots K_r$ mit $K_i \cong Q_8$. Es reicht somit zu zeigen, dass $K_i \cap K_j = 1$ ist, weil dann $W = K_1 \times \ldots \times K_r$ gilt.

Sei also angenommen, dass $K_i \cap K_j \neq 1$ ist. Dann gilt $K_i \cap K_j = Z(K_i) = Z(K_j) = Z(K_i K_j)$. Insbesondere ist $Z(K_i K_j)$ zyklisch und es gilt $[K_i K_j, a] = K_i K_j$. Dies widerspricht jedoch Lemma 4.3, in dem gezeigt wurde, dass dann $K_i K_j \cong Q_8$ gilt. □

Lemma 4.7 *Sei* t *ein Element der Ordnung* 3 *von* H *und* $F = [W, t]$ *mit* $W = O_{3'}(H)$. *Sei* V *ein treuer* $GF(3)H$*-Modul, auf dem* t *quadratisch operiert. Sei* F *eine* 2*-Gruppe und* $|[V, t]| \leq 3^2$.

Dann gilt einer der folgenden Fälle:

(a) $|[V, F]| = 3^2$ *und* $F \cong Q_8$.

(b) $|[V, F]| = 3^4$ *und* $F \cong Q_8$ *oder* $F \cong Q_8 \times Q_8$.

Beweis Nach Lemma 4.6 gilt $F = Q_1 \times \ldots \times Q_s$ für ein $s \in \mathbb{N}$ mit $Q_i \cong Q_8$. Sei $V_i := [V, Q_i]$. Wegen $|[V, t]| \leq 3^2$ folgt $|V_i| = 3^2$ oder $|V_i| = 3^4$.

Sei zunächst $|V_1| = 3^2$. Dann gilt $[V_1, Q_i] = 1$ für $i > 1$, da sonst V_1 von dem Produkt der Involutionen in Q_1 und Q_i zentralisiert würde, aber daher und wegen $V = [V, Q_j] \times C_V(Q_j)$ ganz V von dem Produkt zentralisiert würde, was der treuen Operation von H auf V widerspräche. Wegen $|[V, t]| \leq 9$ folgt $r \leq 2$.

Sei nun $|V_1| = 3^4$. Dann existiert höchstens ein Q_i mit $i > 1$, sodass $[V_1, Q_i] \neq 1$, da nur Automorphismen aus $GL_4(3)$ auf V operieren, falls es $3'$-Elemente sind. Wegen $|GL_4(3)|_2 = 2^9$ folgte sonst, dass $Q_1 \times Q_i \times Q_j$ eine 2-Sylowgruppe von $GL_4(3)$ wäre, was aber nicht der Struktur einer solchen entspricht. O.B.d.A. gelte $i = 2$. Wäre $s > 2$, so folgt $[V, Q_3, t] = 1$, weil $[V, Q_3]$ t-invariant ist und $|[V, t]| \leq 3^2$ gilt. Außerdem ist $[V, t, Q_3] \leq [V_1, Q_3] = 1$ und daher folgt mit dem 3-Untergruppen-Lemma $1 = [Q_3, t, V] = [Q_3, V]$, was der treuen Operation von H auf V widerspricht. □

Lemma 4.8 *Sei t eine Involution von H und $F = [W, t]$ mit $W = O_{2'}(H)$. Sei V ein treuer $GF(2)H$-Modul, auf dem t quadratisch operiert. Sei F eine r-Gruppe für eine Primzahl r und $|V/C_V(t)| \leq 2^2$.*

Dann gilt einer der folgenden Fälle:

(a) $|[V, F]| = 2^2$ *und* $F \cong C_3$.

(b) $|[V, F]| = 2^4$, $|V/C_V(t)| = 2^2$ *und* $F \cong C_3$, C_5 *oder* $C_3 \times C_3$.

(c) $|[V, F]| = 2^6$, $|V/C_V(t)| = 2^2$, $[Z(F), t] = 1$ *und* F *ist eine extraspezielle Gruppe der Ordnung* 3^3.

Beweis [S2] (1.3). □

5 Eigenschaften von P und $\widetilde{P}$

Lemma 5.1 *Jede p-Untergruppe T von G enthält höchstens ein Konjugiertes von Q. Insbesondere ist Q das einzige Konjugierte in $\widetilde{C}$.*

Beweis [PPS] (1.6). □

Lemma 5.2 *Es gilt $S^* = B(S)$ oder $B(S) \leq O_p(P)$.*

Beweis [PPS] (3.1). □

Lemma 5.3 *Es gilt $Z(P) = 1$.*

Beweis Es ist $Z(P) \leq Y_P$, da $C_P(O_p(P)) \leq O_p(P)$ ist. Jedoch operiert $P^*/O_p(P)$ fixpunktfrei auf Y_P, weil Y_P ein natürlicher Modul ist. □

Lemma 5.4 *Ist $O_p(P) \neq Y_P$, so ist $O_p(O^p(P)) \not\leq O_p(\widetilde{P})$.*

Beweis Sei $O_p(O^p(P)) \leq O_p(\widetilde{P})$. Es wird gezeigt, dass dann $O_p(P) = Y_P$ gilt. Wegen $Z(O^p(P)O_p(\widetilde{P})) = 1$ gilt nach [S1] Theorem 1 $[O_p(O^p(P)O_p(\widetilde{P})), O^p(P)] = Y_P$. Also gilt mit teilerfremder Operation

$$\begin{aligned} Y_P &\leq [O_p(P), O^p(P)] \\ &= [O_p(P), O^p(P), O^p(P)] \\ &\leq [O_p(O^p(P)O_p(\widetilde{P})), O^p(P)] \\ &= Y_P, \end{aligned}$$

also $Y_P = [O_p(P), O^p(P)]$. Sei $x \in P$ ein p'-Element. Dann gilt nach teilerfremder Operation $O_p(P) = C_{O_p(P)}(x)Y_P$. Weil $Y_P = \Omega_1(Z(O_p(P)))$ ist, ist $\Phi(O_p(P)) \leq C_{O_p(P)}(x)$. Somit gilt $\Phi(O_p(P)) \leq C_{O_p(P)}(O^p(P))$. Es ist $\Phi(O_p(P)) = 1$ und damit $O_p(P) = \Omega_1(Z(O_p(P))) = Y_P$ oder $\Phi(O_p(P)) \neq 1$. Im zweiten Fall gilt $1 \neq \Phi(O_p(P)) \cap Z(S) \leq \Phi(O_p(P)) \cap Y_P$ und daher $C_{Y_P}(O^p(P)) \neq 1$, was Lemma 5.3 widerspricht. □

Bemerkung 5.5 *Nach Lemma 5.4 ist es ermöglich, für den Rest des Beweis anzunehmen, dass $[Z_0, O^p(\widetilde{P})] = 1$ gilt, weil ansonsten schon der erste Fall unseres Satzes folgt.*

Lemma 5.6 *Es gilt $Y_{\widetilde{P}} \leq Z_0$.*

Beweis Angenommen, es gälte $Y_{\widetilde{P}} \not\leq Z_0$. Da $Y_{\widetilde{P}} \leq Y_{\widetilde{C}} \leq O_p(\widetilde{C}) \leq S^*$ gilt und somit $S^* \not\leq C_S(Y_{\widetilde{P}})$, ist $C_S(Y_{\widetilde{P}}) = O_p(\widetilde{P})$ und $O_p(\widetilde{P}) \not\geq S^*$.

Ist $J(S) \leq O_p(\widetilde{P})$, so ist $B(S) = C_S(\Omega_1(Z(J(S)))) \leq C_S(Y_{\widetilde{P}}) = O_p(\widetilde{P})$, da $\Omega_1(Z(J(S))) \geq Y_{\widetilde{P}}$ ist. Also gilt $B(S) \trianglelefteq \widetilde{P}$. Nach Lemma 5.2 folgt $B(S) = S^*$ oder $B(S) \leq O_p(P)$. Wäre $B(S) \leq O_p(P)$, so wäre $B(S) \trianglelefteq P$, also $1 \neq B(S) \trianglelefteq \langle P, \widetilde{P} \rangle = G$, ein Widerspruch. Andererseits gilt $S^* = B(S) \leq O_p(\widetilde{P})$, was auch einen Widerspruch darstellt. Somit gilt $J(S) \not\leq O_p(\widetilde{P})$.

Sei $\widehat{P} := \widetilde{P}/O_p(\widetilde{P})$, $A \in \mathfrak{A}(\widetilde{P})$ mit $A \not\leq O_p(\widetilde{P})$. Nach Lemma 3.1 ist $\widehat{P}$ eine minimal parabolische Gruppe. Zudem gilt $[Y_{\widetilde{P}}, A] \neq 1$ und aus Lemma (9.2.9)(a) [KS] folgt wegen der treuen Operation von $\widehat{P}$ auf $Y_{\widetilde{P}}$: $A \in \mathfrak{O}_{\widetilde{P}}(V)$, also $\mathfrak{O}_{\widetilde{P}}(V) \neq \emptyset$ und dann auch $\mathfrak{O}_{\widehat{P}}(V) \neq \emptyset$. Somit folgt aus dem Lemma 3.10, dass $[C_{Y_{\widetilde{P}}}(\widehat{S}), \widehat{P}] \neq 1$ ist, also $[\Omega_1(Z(S)), \widehat{P}] \neq 1$ und somit $[\Omega_1(Z(S)), \widetilde{P}] \neq 1$; also gilt insbesondere $[\Omega_1(Z(S)), O^p(\widetilde{P})] \neq 1$. Da $\Omega_1(Z(S)) \leq Z_0$ ist, gilt aber $[\Omega_1(Z(S)), O^p(\widetilde{P})] \leq [Z_0, O^p(\widetilde{P})] = 1$. Ein Widerspruch. □

Lemma 5.7 *Sei $g \in G$. Dann ist $Z_0 \cap Z_0^g = 1$ oder $Z_0 = Z_0^g$.*

Außerdem ist $Y_P \cap Y_P^g \in \{1, Z_0^h, Y_P\}$ für ein $h \in P$.

Beweis Sei $1 \neq x \in Z_0 \cap Z_0^g$. Dann gilt nach der Q-uniqueness $C_H(x) \leq \widetilde{C}$ und $C_H(x) \leq \widetilde{C}^g$, da $Z_0 \leq Z(Q)$ ist. Also sind Q und Q^g in $C_H(x)$ und daher auch in $\widetilde{C}$. Nach Lemma 5.1 gilt somit $Q = Q^g$. Insbesondere ist $g \in N_G(Q) = \widetilde{C}$. Da $Z_0 \trianglelefteq \widetilde{C}$, folgt $Z_0 = Z_0^g$.

Sei nun $1 \neq Y_P \cap Y_P^g$. Dann existiert ein $1 \neq h \in Y_P \cap Y_P^g$. Da

$$Y_P = \bigcup_{x \in P} Z_0^x$$

ist, folgt aus dem ersten Teil $Z_0^y \leq Y_P \cap Y_P^g$ für ein $y \in P$. Ist $Y_P \cap Y_P^g \neq Z_0^y$, so existiert ein $h' \in Y_P \cap Y_P^g \setminus Z_0^y$. Dieses liegt in einem Z_0^x. Da dann $Z_0^x \leq Y_P$ und $Z_0^x \leq Y_P^g$, folgt $Y_P = Y_P^g$. □

Lemma 5.8 *$N_G(S)$ normalisiert P.*

Beweis Nach der Q-uniqueness ist $N_G(\Omega_1(Z(S))) \leq \widetilde{C}$. Außerdem ist $\Omega_1(Z(S)) \trianglelefteq N_G(S)$, also folgt $N_G(S) \leq \widetilde{C}$. Mit der P-uniqueness folgt wegen $P^x \not\leq \widetilde{C}$ für alle $x \in N_G(S)$, dass $P^x = P$ gilt und somit die Behauptung. □

Lemma 5.9 *(a) Es gilt $N_G(Y_P)^\circ = N_G(O^p(P))^\circ = P^\circ$.*

(b) Sei $N := N_G(Y_P)$. Es ist $[C_N(Y_P), P^\circ] \leq O_p(N) \leq O_p(P)$.

Beweis Sei $H := N_G(Y_P)$. Da $N_G(Y_P) \geq N_G(O^p(P))$, genügt es, $H^\circ = P^\circ$ zu zeigen. Es ist $P \leq N_G(Y_P))$ transitiv auf $Y_P^\#$. Nach dem Frattini-Argument gilt also $H = C_H(y)P$ für alle $y \in Y_P^\#$. O.B.d.A. sei $y \in Z_0$ gewählt. Dann ist nach der Q-uniqueness $Q \trianglelefteq C_H(y)$ und somit gilt $\langle Q^H \rangle = \langle Q^{C_H(y)}, Q^P \rangle = \langle Q, Q^P \rangle = \langle Q^P \rangle$, also (a).

Es ist $C_N(Z_0) \geq C_N(Y_P)$ und $Q \trianglelefteq C_N(Z_0)$. Somit gilt

$$[Q, C_N(Y_P)] \leq Q \cap C_N(Y_P) \leq O_p(C_N(Y_P)) \leq O_p(N).$$

Es folgt

$$[Q^x, C_N(Y_P)] = [Q, C_N(Y_P)]^x \leq O_p(N)^x = O_p(N)$$

für alle $x \in P$ und daher (b). □

Lemma 5.10 *Es gilt $Q = O_p(C)$.*

Beweis Trivialerweise gilt $Q \leq O_p(C)$. Wegen $O_p(C) \operatorname{char} C \trianglelefteq \widetilde{C}$ folgt $O_p(C) \trianglelefteq \widetilde{C}$, also die Behauptung. □

Lemma 5.11 *Es sei $O_p(P) \neq Y_P$. Es gelte $C_{\overline{C}}(O_{p'}(\overline{C})) \leq O_{p'}(\overline{C})$ für $\overline{C} := \widetilde{C}/Q$.*

Dann existiert eine minimal parabolische Untergruppe $\widehat{P}$ von $\widetilde{C}$ mit $S \leq \widehat{P}$, $O_p(\langle P, \widehat{P} \rangle) = 1$ und $[O_p(\widehat{P}), O^p(\widehat{P})] \leq Q$.

Beweis Sei $\overline{R} := O_{p'}(\overline{C})$. Wegen $C_{\overline{C}}(\overline{R}) \leq \overline{R}$, gilt $[\overline{R}, \overline{S}] \neq 1$. Nach Lemma 3.2 ist $RS = \langle \widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_m \rangle N_R(S)$ mit minimal parabolischen Untergruppen $\widehat{P}_i$ von RS. Weil $[N_{\overline{R}}(\overline{S}), \overline{S}] \leq \overline{R} \cap \overline{S} = 1$ ist, folgt wegen $[\overline{R}, \overline{S}] \neq 1$: $\langle \widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_m \rangle \neq 1$.

Sei zunächst $\widehat{P}_i \leq N_G(O^p(P))$ für $i = 1, \ldots, m$. Wie in Lemma 5.9 gezeigt wurde, gilt $N_G(O^p(P))^\circ = P^\circ$. Zudem ist $[P^\circ, O^p(\widehat{P}_i)] \leq O_p(N_G(Y_P))$ nach dem gleichen Lemma, da Y_P von $O^p(\widehat{P}_i)$ zentralisiert wird, weil nur p-Automorphismen nicht trivial auf Y_P operieren und zugleich Z_0 zentralisieren. Folglich läßt P° ganz $O^p(\widehat{P}_i)O_p(N_G(Y_P))$ invariant. Somit ist

$$O_p(\langle O^p(\widehat{P}_i), P^\circ \rangle) \geq O_p(O^p(\widehat{P}_i)O_p(N_G(Y_P))) \neq 1.$$

Dann ist aber auch $O_p(\langle P, O^p(\widehat{P}_i) \rangle) \neq 1$, weil $O^p(\widehat{P}_i)$ und P° von S normalisiert wird. Nach Lemma 5.8 gilt $N_R(S) \leq N_R(P)$.

Als nächstes wird gezeigt, dass P° auch $O^p(N_R(S))Q$ normalisiert, also ganz R. Nach Wahl von R wird Z_0 von $N_R(S)$ zentralisiert. Sei φ ein nicht-trivialer Automorphismus auf Y_P, der Z_0 zentralisiert. Ist $\varphi \in GL(Y_P)$, so ist φ ein p-Element. Ist φ nicht aus $GL(Y_P)$, so induziert φ eine semilineare Abbildung, also wird insbesondere Z_0 nicht elementweise festgelassen. Somit folgt $O^p(N_R(S)) \leq C_R(Y_P)$. Es gilt nun $[Q, C_R(Y_P)] \leq O_P(C_R(Y_P)) \leq Q$. Wegen $[P^\circ, C_R(Y_P)] \leq P^\circ \cap C_G(Y_P) \leq O_p(P)$ wird $C_R(Y_P)O_p(P)$ von P° normalisiert. Insbesondere gilt $O^p(C_R(Y_P)) = O^p(C_R(Y_P)O_p(P))$ nach der Wahl von R, also folgt

$$\begin{aligned} [Q^g, O^p(C_R(Y_P))] &= [Q, O^p(C_R(Y_P))]^g \\ &\leq O_p(O^p(C_R(Y_P)))^g \\ &= O_p(O^p(C_R(Y_P))) \\ &\leq Q \end{aligned}$$

für alle $g \in P^\circ$, da mit $C_R(Y_P)O_p(P)$ auch $O^p(C_R(Y_P)O_p(P))$ normalisiert wird. Es gilt somit $[P^\circ, O^p(C_R(Y_P))] \leq Q$. Es ist aber mit $O^p(N_R(S)) \leq C_R(Y_P)$ auch $O^p(N_R(S)) \leq O^p(C_R(Y_P))$, also $[P^\circ, O^p(N_R(S))] \leq Q$. Somit wird R von P° normalisiert, und es folgt, da auch R von $\widetilde{C}$ normalisiert wird: $O_p(R) = 1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $C_C(O_p(C)) \leq O_p(C)$.

Sei nun $\widehat{P}_i \not\leq N_G(O^p(P))$ für ein $\widehat{P}_i$; dieses sei o.B.d.A. $\widehat{P}_1$. Es ist

$$[O_p(\widehat{P}_1), O^p(\widehat{P}_1)] \leq O_p(O^p(\widehat{P}_1)) = O_p(R) \leq O_p(C) = Q.$$

Wäre $O_p(\langle \widehat{P}_1, P\rangle) = 1$, so folgt die Behauptung für $\widehat{P} := \widehat{P}_1$. Also sei $O_p(\langle \widehat{P}_1, P\rangle) \neq 1$. Es gilt, dass $\widehat{P}_1$ die eindeutig bestimmte Untergruppe der $\widetilde{P}$-uniqueness ist. Sei $Q^* := O_p(O^p(P^\circ))$. Als nächstes wird gezeigt, dass $[\overline{Q}^*, \overline{O_p(\widetilde{P})}] = 1$ gilt. Nach den Lemmata 3.6, 3.7 und 3.8 gilt $O^p(\widehat{P}_1)/O_p(O^p(\widehat{P}_1)) \cong O^p(P)/Q^* \cong SL_2(q)$. Da $\widehat{P}_1$ auflösbar ist, folgt $q = 2$ oder $q = 3$. Also muss auch $\widehat{P}_1/O_p(\widehat{P}_1) \cong SL_2(q)$ gelten, da es keine Körperautomorphismen $\neq 1$ auf $GF(2)$ und $GF(3)$ gibt. Somit folgt $|Q^*/(Q^* \cap O_p(\widehat{P}_1))| \leq p$. Da $Q^* \cap O_p(\widehat{P}_1) \leq Q$ ist, folgt $|\overline{Q}^*| \leq p$, also $[\overline{Q}^*, \overline{O_p(\widetilde{P})}] = 1$, da eine p-Gruppe auf einer p-Gruppe der Ordnung p operiert. Nach Lemma 5.4 gilt $Q^* \not\leq O_p(\widetilde{P})$. Sei $H := [O^p(\widetilde{P}), Q^*]$. Dann ist $H \trianglelefteq \widetilde{P}$, da H $O^p(\widetilde{P})$- und S-invariant ist. Wegen der Eigenschaften von Normalteilern in minimal parabolischen Gruppen folgt $O^p(\widetilde{P}) = O^p(H)$, also $H = O^p(\widetilde{P})$, oder $H \cap S \leq O_p(\widetilde{P})$. Der zweite Fall wird zum Widerspruch geführt: Es ist nach Lemma 3.4 $O^p(\widetilde{P})/O_p(O^p(\widetilde{P}))$ eine p'-Gruppe. Also operiert Q^* teilerfremd auf $\overline{O^p(\widetilde{P})} := O^p(\widetilde{P})/O_p(O^p(\widetilde{P}))$ und somit gilt $\overline{O^p(\widetilde{P})} = [\overline{O^p(\widetilde{P})}, Q^*]C_{\overline{O^p(\widetilde{P})}}(Q^*)$. Weil $S \cap H \le O_p(\widetilde{P})$ ist, gilt $SH \le M$. Da das Urbild von $[\overline{O^p(\widetilde{P})}, Q^*]$ in SH liegt, folgt wegen $O^p(\widetilde{P}) \not\le M$, dass auch $C_{\overline{O^p(\widetilde{P})}}(Q^*) \not\le \overline{M}$ gilt. Es folgt $\overline{O^p(\widetilde{P})} \le C_{\overline{O^p(\widetilde{P})}}(Q^*)$ und daher $[O^p(\widetilde{P}), Q^*] \le O_p(\widetilde{P})$. Also wird $O_p(\widetilde{P})Q^*$ von $SO^p(\widetilde{P}) = \widetilde{P}$ normalisiert und daher gilt $Q^* \le O_p(\widetilde{P})$, was in Lemma 5.4 ausgeschlossen wurde. Es gilt also $H = O^p(\widetilde{P})$.

Sei nun wieder $\overline{C} := C/O_p(C)$. Dann gilt $[\overline{Q}^*, \overline{O_p(\widetilde{P})}] = 1$, wie oben gezeigt, also $[\overline{Q}^*, \overline{O_p(\widetilde{P})}, \overline{O^p(\widetilde{P})}] = 1$ und $[\overline{O_p(\widetilde{P})}, \overline{O^p(\widetilde{P})}, \overline{Q}^*] \le [\overline{O_p(\widetilde{P})}, \overline{Q}^*] = 1$ und somit nach dem 3-Untergruppen-Lemma auch $1 = [\overline{Q}^*, \overline{O^p(\widetilde{P})}, \overline{O_p(\widetilde{P})}] = [\overline{O^p(\widetilde{P})}, \overline{O_p(\widetilde{P})}]$. Also gilt $[O_p(\widetilde{P}), O^p(\widetilde{P})] \le O_p(C) = Q$. □

Bemerkung 5.12 *Das Lemma 5.11 besagt, dass wir unsere Wahl von $\widetilde{P}$ verändern können, um weiterhin alle Eigenschaften des alten $\widetilde{P}$ zu behalten, aber eine mächtige Eigenschaft hinzu zu bekommen. In dem Folgenden wird die Bedeutung von $\widetilde{P}$ durch die von $\widehat{P}$ ersetzt.*

5.1 Eine wichtige Situation

In diesem Abschnitt wird eine Situation beschrieben, in der der Satz 3.11 gilt.

Definition 5.13 *$\widetilde{P}$ genüge der CGT-Situation, falls für $V := \langle Y_P^{\widetilde{P}} \rangle / Z_0$ und $\overline{P} := \widetilde{P}/O_p(\widetilde{P})C_{\widetilde{P}}(V)$ die Schlussfolgerungen von Satz 3.11 mit den dortigen Bezeichnungen gelten.*

L_i sei stets das Urbild von K_i und $\overline{V} := V/C_V(\overline{P})$.

Lemma 5.14 *Es gilt $O_p(\overline{P}^*) = 1$.*

Beweis Sei D das Urbild von $O_p(\overline{P}^*)$. Dann gilt $\overline{D} \operatorname{char} \overline{P}^* \trianglelefteq \overline{P}$, also $D \trianglelefteq \widetilde{P}$. Da $\widetilde{P}$ minimal parabolisch ist, gilt $O^p(\widetilde{P}) \le D$ oder $D \cap S \le O_p(\widetilde{P})$. Angenommen, es gälte $O^p(\widetilde{P}) \le D$. Dann gilt $O^p(\widetilde{P}^*) \le O^p(\widetilde{P}) \le S^* C_{\widetilde{P}^*}(V)$, da $O^p(\widetilde{P}) \le \widetilde{P}^*$, und somit $[O^p(\widetilde{P}^*), Y_P] \le [S^* C_{\widetilde{P}^*}(V), Y_P] \le Z_0 \le Y_P$. Daher ist $Y_P \trianglelefteq \langle P, O^p(\widetilde{P}^*)\rangle = G$, ein Widerspruch. Also ist $D \cap S \le O_p(\widetilde{P})$ und folglich $D \cap S \le O_p(\widetilde{P}) \cap S^* \le O_p(\widetilde{P}^*) \le D \cap S^*$. Somit gilt $[D \cap S^*, Y_P] \le Z_0$, also $D \cap S^* = O_p(\widetilde{P}^*) \le C_{\widetilde{P}^*}(V)$. Daher gilt $\overline{D} = O_p(\overline{P}^*) \le \overline{C_{\widetilde{P}^*}(V)} = 1$. □

Lemma 5.15 *$\widetilde{P}$ genügt der CGT-Situation, falls ein nicht-trivialer Offender A in $\widetilde{P}^*$ auf $V := \langle Y_P^{\widetilde{P}} \rangle / Z_0$ existiert. Zudem gilt dann $K_1 \times \ldots \times K_r \le \widetilde{P}^*$.*

Beweis Da jeder nicht-triviale Offender einen nicht-trivialen Best-Offender enthält, sei A o.B.d.A. ein Best-Offender. Sei $\overline{P} := \widetilde{P}/C_{\widetilde{P}}(V)$. Dann ist nach Lemma 5.14 $O_p(\overline{P}^*) = 1$ und $\overline{P}$ minimal parabolisch wegen Lemma 3.1. Es ist also $\overline{P} = (O_p(\overline{P}) \times \overline{P}^*)\overline{S}$. Sei $W := C_V(O_p(\overline{P}))$ und $\widehat{P} := \overline{P}/C_{\overline{P}}(W)$. Dann ist $\widehat{A}$ ein Offender auf W. Also ist zu zeigen, dass $\widehat{A} \neq 1$ ist. Da $A \not\leq O_p(\widetilde{P})$, folgt $\langle A^{\widetilde{P}}\rangle \geq O^p(\widetilde{P})$. Wäre $\widehat{A} = 1$, so wäre $[O(\overline{P}), W] = 1$. Es wäre daher $C_V(O_p(\overline{P})) \leq C_V(O^p(\overline{P}))$. Das $P \times Q$-Lemma lieferte mit $[O^p(\overline{P}), V] = 1$ einen Widerspruch. Also ist $\widehat{A}$ ein nichttrivialer Offender auf W. Insbesondere ist mit 3.1 auch $\widehat{P}$ minimal parabolisch.

Als nächstes wird gezeigt, dass $O^p(C_{\widetilde{P}}(W)) \leq C_{\widetilde{P}}(V)$ ist. Weil es in minimal parabolischen Gruppen mit nur trivialem p-Normalteiler keine Over-Offender gibt, gilt $|W/C_W(\widehat{A})| = |\widehat{A}/C_{\widehat{A}}(W)| = |\widehat{A}|$. Nach dem ersten Absatz gilt zusätzlich noch $|\overline{A}| = |\widehat{A}|$; also gilt $|W/C_W(\overline{A})| = |\overline{A}|$. Da auch $|V/C_V(\overline{A})| \leq |\overline{A}|$ gilt, folgt $|V/C_V(\overline{A})| = |W/C_W(\overline{A})|$. Also ist $[V, \overline{A}] \leq W$ und insbesondere $[V, O^p(C_{\widetilde{P}}(W))] \leq [V, \langle A^{\widetilde{P}}\rangle] \leq W$. Wegen der teilerfremden Operation gilt daher $[V, O^p(C_{\widetilde{P}}(W))] = 1$. Somit folgt $\overline{P}^* \cong \widehat{P}^*$.

Da $N \geq O^p(\overline{P})$ oder $O_p(\overline{P}) \geq N \cap \overline{S}$ für Normalteiler N in der minimal parabolischen Gruppe $\overline{P}$ gilt und $C_{\overline{P}}(W) \not\geq O^p(\overline{P})$ ist, folgt $O_p(\widehat{P}) = 1$. Somit folgt mit Lemma 3.10 die Struktur von $\widehat{P}$ aus Satz 3.11).

Weil in einer $SL_2(\widetilde{q})$ nur die ganze p-Sylowgruppe einen Offender bildet und in der S_{2^m+1} ein Offender von Transpositionen erzeugt wird (vgl z.B. [BHS](2.15)), folgt $K_1 \times \ldots \times K_r \leq \widehat{P}^*$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass statt W auch V die Zerlegung aus Satz 3.11 besitzt. Dazu ist zu zeigen, dass

$$V = C_V(K_1 \times \ldots \times K_r) \prod_{i=1}^{r} [V, K_i]$$

gilt. Es ist $[Y_P/Z_0, O^p(\widetilde{P})] \leq [V, O^p(\widetilde{P})] \leq W$ und $[Y_P/Z_0, S] \leq Y_P/Z_0$. Also ist $W(Y_P/Z_0)$ $\widetilde{P}$-invariant und somit $W(Y_P/Z_0) = V$. Da

$$[V, O^p(K_i)] = [V, O^p(K_i), O^p(K_i)] \leq [W, O^p(K_i)]$$

und $[Y_P/Z_0, \overline{S}^*] = 1$ ist, folgt wegen $K_1 \times \ldots \times K_r \leq \widehat{P}^*$, dass $[V, K_i] = [W, K_i]$ und daher auch $V = C_V(K_1 \times \ldots \times K_r) \prod_{i=1}^{r} [V, K_i]$ gilt. □

Generalvoraussetzung 5.16 *Außer im Satz 5.25 genüge $\widetilde{P}$ im Rest dieses Kapitels stets der CGT-Situation.*

Lemma 5.17 *Für alle* $\overline{y} \in Y_P/Z_0$ *und für alle* $i \leq r$ *gilt* $[K_i, \overline{y}] \neq 1$.

Beweis Angenommen, es gälte $[K_i, \overline{y}] = 1$. Es kann $y \in Z_0^g$ für ein $g \in \widetilde{P}$ angenommen werden. Es gilt somit $C_G(y) \geq Q^g$ und $C_G(y) \geq O^p(L_i)$, da L_i quadratisch auf $\langle y \rangle$ operiert und somit $L_i/C_{L_i}(y)$ eine p-Gruppe ist. Es normalisiert $O^p(L_i)$ sowohl $O_p(\widetilde{P})$ als auch $O_p(\widetilde{P})^g$ wegen der Q-uniqueness und der Eindeutigkeit von Q in $\widetilde{C}$ (Lemma 5.1). Es ist $\langle O_p(\widetilde{P}), O_p(\widetilde{P})^g \rangle$ ein Normalteiler von P, liegt also über $O^p(P)$. Es ist daher $N_G(O^p(P)) \geq \langle S, L_i \rangle = \widetilde{P}$ und folglich $N_G(Y_P) \geq \langle P, S, L_i \rangle = \langle P, \widetilde{P} \rangle = G$, was $O_p(G) = 1$ widerspricht. □

Der Fall $K_i \cong SL_2(\widetilde{q})$ und $\widetilde{q} \neq 2$

In diesem Abschnitt sei $K_i \cong SL_2(\widetilde{q})$ und $\widetilde{q} \neq 2$.

Lemma 5.18 *Es gilt* $M \leq N_G(O^p(P))$.

Beweis Es gilt $M = \langle \widehat{P} \leq M | \widehat{P}$ ist minimal parabolisch mit $S \leq \widehat{P} \rangle N_M(S)$ nach Lemma 3.2 und $N_M(S) \leq N_G(O^p(P))$ nach Lemma 5.8.

Nach dem $\widetilde{P}$!-Theorem existiert - da wir uns laut Voraussetzung im Fall (a) befinden - maximal eine eindeutig bestimmte minimal parabolische Untergruppe $\widehat{P}$ von $\widetilde{C}$ mit $S \leq \widehat{P}$ und $\widehat{P} \not\leq N_G(O^p(P))$.

Angenommen, es gilt $M \not\leq N_G(O^p(P))$. Dann muss es wegen der obigen Darstellung von M ein solches $\widehat{P}$ in M geben, welches dann eindeutig bestimmt ist. Es gilt dann für $\widetilde{M} := \langle Q^h | h \in G$ mit $Q^h \leq \langle P, \widehat{P} \rangle \rangle O_p(P)$: $\widetilde{M}/C_{\widetilde{M}}(Y_{\widetilde{M}}) \cong SL_3(p^n)$, $Sp_4(p^n)$ oder $Sp_4(2)'$. Da $q \neq 2$, kann der letzte Fall nicht eintreten.

Es wird jetzt zunächst gezeigt: $M \cap \widetilde{P}^* \leq N_G(S^*)$.

Angenommen, dies wäre falsch. Dann existiert ein K_i derart, dass $\overline{M \cap \widetilde{P}^*}$ zwei verschiedene p-Sylowgruppen von $\overline{K_i}$ enthält. Da $K_i \cong SL_2(\widetilde{q})$ schon von je zwei solchen erzeugt wird, gilt $\overline{K_i} \leq \overline{M \cap \widetilde{P}^*}$. Weil $\overline{S^*}$ transitiv auf den K_i operiert, folgt $K_1 \times \ldots \times K_r \leq \overline{M \cap \widetilde{P}^*}$, also $(M \cap \widetilde{P}^*)S \geq O^p(\widetilde{P})S = \widetilde{P}$; ein Widerspruch.

Insbesondere ist dann $M \cap P^*$ auflösbar, also auch $\widehat{P}$. Aus Ordnungsgründen ist $P^*/C_{P^*}(Y_{\widetilde{M}})$ eine p-lokale Untergruppe. Wäre $(\widehat{P} \cap \widetilde{M})/C_{\widehat{P} \cap \widetilde{M}}(Y_{\widetilde{M}})$ keine p-lokale Untergruppe, so gälte

$$O_p(\widetilde{P}^*) \leq O_p(\widehat{P} \cap \widetilde{M}) \leq C_{\widehat{P} \cap \widetilde{M}}(Y_{\widetilde{M}}) \cap S^* \leq O_p(P)$$

und daher

$$O_p(P) = O_p(\widetilde{P}^*) O_p(P) \trianglelefteq \langle \widetilde{P}^*, P \rangle = G,$$

was $O_p(G) = 1$ widerspräche.

Sei nun zunächst $\widetilde{M}/C_{\widetilde{M}}(Y_{\widetilde{M}}) \cong SL_3(q)$. Es folgt aus Lemma 3.6, dass $SL_2(q) \cong O^p(P)/O_p(O^p(P)) \cong O^p(\widehat{P})/O_p(O^p(\widehat{P}))$ gilt. Da $O^p(\widehat{P})/O_p(O^p(\widehat{P}))$ auflösbar ist, folgt $q \leq 3$. Nach Voraussetzung gilt jedoch auch $q \neq 2$, also gilt $q = 3$. Nun gilt jedoch einerseits für $T \in Syl_2(O^p(\widehat{P})/O_p(O^p(\widehat{P})))$, dass dies eine abelsche Gruppe ist, da es wegen $\widehat{P} \cap \widetilde{P}^* \leq N_G(S^*)$ im direkten Produkt zyklischer Gruppen liegt, aber andererseits ist $T \in Syl_2(SL_2(3))$ eine Quaternionengruppe - ein Widerspruch.

Sei also $\widetilde{M}/C_{\widetilde{M}}(Y_{\widetilde{M}}) \cong Sp_4(q)$. Wie oben folgt auch jetzt

$$SL_2(q) \cong O^p(P)/O_p(O^p(P)) \cong O^p(\widehat{P})/O_p(O^p(\widehat{P}))$$

nach Lemma 3.7. Daher liegt hier analog dem Fall $SL_3(q)$ der Widerspruch vor. □

Lemma 5.19 *Es ist $r = 1$.*

Beweis Es ist nach Lemma 5.17 $[K_i, \widetilde{y}] \neq 1$ für alle $i \leq r$ und alle $\widetilde{y} \in Y_P/Z_0$. Also ist $\overline{Y_P} \cong Y_P/Z_0$. Aus dem gleichen Lemma folgt, dass $\overline{Y_P}$ eine echte Diagonale in $\overline{V}$ ist und $\overline{Y_P} \cap \overline{V_i} = 1$ für alle $i \leq r$ unter der Annahme, dass $r \neq 1$ ist. Insbesondere gilt $[\widetilde{K_i}, \overline{Y_P}] \leq \overline{Y_P} \cap \overline{V_i} = 1$ für eine $(\widetilde{q} - 1)$-Gruppe $\widetilde{K_i}$ in K_i, die $\overline{S}^*$ normalisiert. Insbesondere zentralisiert $\widetilde{K_i}$ auch die Projektion von $\overline{Y_P}$ auf den Modul $\overline{V_i}$, da $\overline{V}$ die direkte Summe der $\overline{V_j}$ ist. Weil jedoch in dem natürlichen Modul $\overline{V_i}$ kein Element von $\widetilde{K_i}$ festgelassen wird, folgt $|\overline{Y_P}| = 1$, ein Widerspruch. □

Lemma 5.20 *Es gilt $q = \widetilde{q}$.*

Beweis Sei $X \leq N_{\widetilde{P}^*}(S^*)$ mit $|X| = q - 1$ und $\overline{X} = N_{K_1}(\overline{S}^* \cap K_1)$. Dann ist $X \leq M$, also insbesondere $X \leq N_G(O^p(P))$, und daher normalisiert X auch Y_P. Dann ist nach Lemma 5.17 $[K_1, \overline{y}] \neq 1$ für alle $\overline{y} \in Y_P/Z_0$, also $Y_P/Z_0 \cong \overline{Y_P/Z_0}$. Es ist $\overline{Y_P/Z_0} \leq C_{\overline{V}}(\overline{S}^* \cap K_1)$. Andererseits operiert $\overline{X}$ transitiv auf $C_{\overline{V}}(\overline{S}^* \cap K_1)$. Da aber $\overline{Y_P/Z_0}$ normalisiert wird, folgt $\overline{Y_P/Z_0} = C_{\overline{V}}(\overline{S}^* \cap K_1)$, also $q = \widetilde{q}$. □

Lemma 5.21 *Es gilt $\widetilde{P}^*/C_{\widetilde{P}^*}(V) \cong SL_2(q)$.*

Beweis Es ist $Y_P/Z_0 \cong Y_P C_V(\widetilde{P}^*)/C_V(\widetilde{P}^*)$. Da S^* das erste zentralisiert, zentralisiert es auch das zweite.

Sei $\overline{t} \in \overline{S}^*$. Es ist zu zeigen: $\overline{t} \in K_1$. Da $\overline{t}$ trivial auf $\overline{Y_P/Z_0}$ operiert, operiert $\overline{t}$ wie ein innerer Automorphismus auf K_1. Also existiert ein $\overline{s} \in K_1$ mit $\overline{x}^{\overline{t}} = \overline{x}^{\overline{s}}$ für alle $\overline{x} \in K_1$. Somit operiert $\overline{t}\overline{s}^{-1}$ trivial auf K_1 und daher auch auf $\overline{V}$. Da $\overline{Y_P/Z_0}$ von $\overline{t}$ und $\overline{t}\overline{s}^{-1}$ zentralisiert wird, macht dies auch $\overline{s}$. Also liegt $\overline{s}$ in K_1 und dort im Zentralisator eines 1-dimensionalen Unterraums von $\overline{V}$, also liegt es in $\overline{S}^* \cap K_1$. Daher liegt auch $\overline{t}\overline{s}^{-1}$ in $\overline{S}^*$, also kann $\overline{t}$ als $\overline{t}\overline{s}^{-1}$ gewählt werden und dann gilt $\overline{s} = 1$. Sei nun $\overline{x} \in K_1$. Dann gilt $[\overline{Y_P/Z_0}^{\overline{x}}, \overline{t}] = [\overline{Y_P/Z_0}^{\overline{x}}, \overline{t}^{\overline{x}}] = [\overline{Y_P/Z_0}, \overline{t}]^{\overline{x}} = 1^{\overline{x}} = 1$. Also zentralisiert $\overline{t}$ ganz $\langle (Y_P/Z_0)^{\widetilde{P}} \rangle = V$. Da $\widetilde{P}^*/C_{\widetilde{P}^*}(V)$ treu auf V operiert, folgt $\overline{t} = 1$, also $\overline{t} \in K_1$. □

Der Fall $K_i \cong S_{2^m+1}$

In diesem Abschnitt gelte $K_i \cong S_{2^m+1}$ und $p = 2$.

Lemma 5.22 *Es ist* $[O^2(M), Y_P] = 1$.

Beweis Es ist $\overline{Y_P/Z_0} \leq C_{\overline{V}}(\overline{S}^*)$ wegen der Eindeutigkeit der Projektionen in die Untermoduln $\overline{V_i}$. Diese Projektionen werden jeweils von der zu S_{2^m} isomorphen Untergruppe von K_i zentralisiert. Es gilt also $[O^2(M), \overline{Y_P}] = 1$. Somit folgt $1 = [Y_P/Z_0, O^2(M), O^2(M)] = [Y_P/Z_0, O^2(M)]$ und daher $1 = [Y_P, O^2(M), O^2(M)] = [Y_P, O^2(M)]$. □

Lemma 5.23 *Es gilt* $M \leq N_G(O^2(P))$.

Beweis M normalisiert Y_P. Also ist $Y_P \trianglelefteq H := \langle M, P \rangle$. Es ist $O^2(M) \leq C_H(Y_P)$. Also gilt aufgrund der Q-uniqueness und der Eindeutigkeit von Q in $\widetilde{C}$ (Lemma 5.1), dass Q^x für alle $x \in H$ von $C_H(Y_P)$ normalisiert wird. Daraus folgt wegen $O^2(P) \leq \langle Q^x | x \in P \rangle$ die Behauptung. □

Lemma 5.24 *Es gilt* $q = 2$.

Beweis Sei $1 \neq \overline{z} \in \overline{Y_P/Z_0}$, $\overline{z} = \overline{z_1} \cdots \overline{z_r}$ mit eindeutig bestimmten $\overline{z_i} \in \overline{V_i}$. Es ist zu zeigen: $[\overline{z_i}, \overline{S}^*] = 1$.

Es ist $[\overline{z_i}, \overline{S}^*] \leq \overline{V_i}$. Wegen $[\overline{z}, \overline{S}^*] = 1$ folgt daher $[\overline{z_i}, \overline{S^*}] = 1$. Nach Lemma 5.17 gilt $[K_i, \overline{z}] \neq 1$. Also ist auch $\overline{z_i} \neq 1$. Da aber in dem zu S_{2^m+1} natürlichen Modul nur ein Element von der 2-Sylowgruppe festgelassen wird - ist $\{v_1, \ldots, v_{2^m+1}\}$ eine Basis, so operiert eine 2-Sylowgruppe nur auf 2^m Basiselementen, also o.B.d.A. auf $\{v_1, \ldots, v_{2^m}\}$ und v_{2^m+1} wird daher festgelassen - ist $\overline{z_i}$ eindeutig bestimmt. Es folgt daher $|\overline{Y_P}| = 2$. Es ist $|\overline{Y_P}| = |Y_P/Z_0|$, da sonst ebenfalls mit Lemma 5.17 ein Widerspruch folgte. Es gilt also $2 = |\overline{Y_P}| = q$, wie behauptet. □

Als eine Konsequenz der Lemmata 5.21 und 5.24 folgt die Hauptaussage dieses Kapitels:

Satz 5.25 *Es existiere ein Offender A in P^* auf V. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $\overline{P} \cong SL_2(q)$

(ii) $\overline{P} = \overline{S} \bigtimes_{i=1}^{r} K_i$ *und* $q = 2$ *mit* $K_i \cong S_{2^m+1}$ *für ein* $m \in \mathbb{N}$

6 Der Nebenklassengraph

Es wird der Nebenklassengraph Γ zu den Untergruppen P und $\widetilde{P}$ von G betrachtet. Die Eckenmenge des Graphen sei $\{Px, \widetilde{P}x | x \in G\}$ und zwischen je zwei Ecken α, β liegt genau dann eine Kante, wenn $\alpha \cap \beta \neq 1$ und $\alpha \neq \beta$ gilt. Sei $d(\alpha, \beta)$ die Abstandsfunktion auf dem Graphen und $\Delta(\delta) := \{\alpha | d(\alpha, \delta) = 1\}$ die Menge der Nachbarn von δ.

Es sei für eine Ecke α folgendes definiert: G_α sei der Stabilisator der Ecke α, $Q_\alpha := O_p(G_\alpha)$, $E_\alpha := O^p(G_\alpha)$ und $Z_\alpha := Y_{G_\alpha}$. Es sei $R_\delta := Z_0^g$, $V_\delta := \langle Z_\beta | \beta \in \Delta(\delta) \rangle$ und $W_\delta := \langle V_{\delta'} | d(\delta, \delta') = 2 \rangle$ für $G_\delta = \tilde{P}^g$. Sei $W_\delta := \langle V_{\delta'} | \delta' \in \Delta(\delta) \rangle$, falls $G_\delta = P^g$ für ein $g \in G$. Sei $S_{\delta\delta'} \in Syl_p(G_\delta \cap G_{\delta'})$ für $\delta' \in \Delta(\delta)$.

Es werden jetzt noch einige wichtige allgemeine Lemmata zum Nebenklassengraphen aufgeführt:

Lemma 6.1 *(a) Die Operation von G auf Γ zerfällt in zwei Bahnen; dabei ist P ein Repräsentant der einen und $\widetilde{P}$ ein Repräsentant der anderen Bahn. Jeder Eckenstabilisator G_α ist zu P oder $\widetilde{P}$ konjugiert.*

(b) Die Operation von G auf den Kanten ist transitiv. Jeder Kantenstabilisator ist zu $P \cap \widetilde{P}$ konjugiert.

(c) G_α operiert transitiv auf $\Delta(\alpha)$; insbesondere ist $|\Delta(\alpha)| = |G_\alpha : G_\alpha \cap G_\beta|$ für $\beta \in \Delta(\alpha)$.

(d) $(P \cap \widetilde{P})_G$ ist der Kern der Operation von G auf Γ, wobei $(P \cap \widetilde{P})_G$ der größte Normalteiler von G ist, der in $P \cap \widetilde{P}$ liegt.

Beweis [KS] (10.3.1). □

Lemma 6.2 *Γ ist genau dann zusammenhängend, wenn $G = \langle P, \widetilde{P} \rangle$ gilt.*

Beweis [KS] (10.3.2). □

Dieses Lemma ist genau der Grund, der der Wahl von G als $\langle P, \widetilde{P} \rangle$ zugrunde liegt (vgl. Kapitel 2).

Lemma 6.3 *Sei $\{\alpha, \beta\}$ eine Kante von Γ und $U \leq G_\alpha \cap G_\beta$. Es gelte eine der folgenden Aussagen:*

(1) $N_{G_\delta}(U)$ *operiert transitiv auf* $\Delta(\delta)$ *für* $\delta \in \{\alpha, \beta\}$.

(2) $U \trianglelefteq G_\alpha$ *und* $U \trianglelefteq G_\beta$.

Dann operiert U *trivial auf* Γ.

Beweis [KS] (10.3.3). □

Sei $b := \min\{d(\alpha, \alpha') | \alpha, \alpha' \in \Gamma \text{ und } Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}\}$, wobei Γ die Menge der Ecken bezeichne. Seien zusätzlich $\alpha, \alpha' \in \Gamma$ mit $b = d(\alpha, \alpha')$. Der kürzeste Weg von α nach α' sei durch $(\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+b)$ bzw. $(\alpha'-b, \ldots, \alpha'-1, \alpha')$ bezeichnet.

O.B.d.A. darf nach Lemma 6.1 $G_\alpha = P$ und $G_{\alpha+1} = \widetilde{P}$ oder $G_\alpha = \widetilde{P}$ und $G_{\alpha+1} = P$ angenommen werden.

Lemma 6.4 *Es existiert ein kritisches Paar.*

Beweis Angenommen, für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ gilt $Z_\alpha \leq Q_\beta$. Sei $N := \langle Z_\alpha^G \rangle$ für ein $\alpha \in \Gamma$. Da für alle $g \in G$ ein $\alpha' \in \Gamma$ mit $Z_\alpha^g = Z_{\alpha'}$ existiert, gilt $N \leq Q_\beta$ für alle $\beta \in \Gamma$. Insbesondere ist N eine nichttriviale p-Gruppe mit $N \trianglelefteq \langle P, \widetilde{P} \rangle = G$, ein Widerspruch zu $O_p(G) = 1$. □

Lemma 6.5 *Es ist* $G_\alpha \neq \widetilde{P}$.

Beweis Angenommen, es gilt $G_\alpha = \widetilde{P}$. Dann ist $Z_\alpha = Y_{\widetilde{P}} \leq Z_0 \leq Y_P = Z_{\alpha+1}$. Aus $Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}$ folgt somit $Z_{\alpha+1} \not\leq Q_{\alpha'}$; ein Widerspruch zur Minimalität von b. □

7 Der nicht-kommutative Fall

In diesem Kapitel sei $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$ angenommen.

Lemma 7.1 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Es ist $C_{S_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}) = Q_{\alpha'}$ für alle $S_{\alpha'} \in Syl_p(G_{\alpha'})$.

(b) (α', α) ist ein kritisches Paar.

Beweis Es ist $Q_{\alpha'} \leq C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'})$. Wäre $C_{S_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}) > Q_{\alpha'}$, so wäre $E_{\alpha'} \geq C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'})$, und wegen der Definition von $Z_{\alpha'}$ folgt dann $C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}) = G_{\alpha'}$ - im Widerspruch zu $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$. Also gilt (a).

Für (b) genügt zu zeigen: $Z_{\alpha'} \not\leq Q_\alpha$. Angenommen, es gälte $Z_{\alpha'} \leq Q_\alpha$. Da nach (a) $Z_\alpha \leq \Omega_1(Z(Q_\alpha))$ gilt, folgt $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = 1$, im Widerspruch zu $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$. Somit gilt (b). □

Lemma 7.2 *Ist $G_\alpha = P$, so ist $G_{\alpha'} = P^x$ für ein $x \in G$. Insbesondere ist b gerade.*

Beweis Angenommen, es ist $G_{\alpha'} = \tilde{P}^x$ für ein $x \in G$. Sei $Z := \Omega_1(Z(S))$. Weil $Z \leq Z_0 \leq Z(O^p(\tilde{P}))$ ist, gilt $Z \trianglelefteq O^p(\tilde{P})S = \tilde{P}$. Also ist $Z^x \trianglelefteq G_{\alpha'}$.

Sei $\overline{G_{\alpha'}} := G_{\alpha'}/C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}) = G_{\alpha'}/Q_{\alpha'}$. Es ist $C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'}) \neq G_{\alpha'}$, da $Z_\alpha \leq G_{\alpha'}$ und $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$. Daher ist nach Lemma 3.1 $\overline{G_{\alpha'}}$ eine minimal parabolische Gruppe. Es gilt $\mathfrak{O}_{\overline{G_{\alpha'}}}(Z_{\alpha'}) \neq \emptyset$ und $O_p(\overline{G_{\alpha'}}) = 1$ und somit folgt aus Lemma 3.10: $[C_{Z_{\alpha'}}(\overline{S^x}), \overline{G_{\alpha'}}] \neq 1$ und somit $[C_{Z_{\alpha'}}(S^x), G_{\alpha'}] \not\leq C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'})$.

Es gilt aber $[C_{Z_{\alpha'}}(S^x), G_{\alpha'}] \leq [Z_{\alpha'}, G_{\alpha'}] \leq Z_{\alpha'} \leq C_{G_{\alpha'}}(Z_{\alpha'})$ - ein Widerspruch. □

Lemma 7.3 *Es ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = R_{\alpha+1}$.*

Beweis Sei $R := [Z_\alpha, Z_{\alpha'}]$. Angenommen, $R_{\alpha+1} \not\leq Z_{\alpha'}$. Dann ist $Z_\alpha = RR_{\alpha+1}$.

Wäre $[R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] = R_{\alpha+1}$, so gälte

$$1 = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}, Z_{\alpha'}] \geq [R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}, Z_{\alpha'}] = [R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] = R_{\alpha+1},$$

ein Widerspruch. Also gilt $[R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] < R_{\alpha+1}$ und somit folgt

$$R = [RR_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] = [R, Z_{\alpha'}][R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] = [R_{\alpha+1}, Z_{\alpha'}] < R_{\alpha+1}.$$

Da R ein $SL_2(p^n)$-Modul ist, folgt $R = 1$ wegen $|R| < p^n$, was $R \neq 1$ widerspricht. Also gilt $R_{\alpha+1} \leq Z_{\alpha'}$.

Wäre $R \neq R_{\alpha+1}$, so gälte $Z_\alpha = RR_{\alpha+1} = Z_{\alpha'}$. Ein Widerspruch dazu, dass (α, α') ein kritisches Paar ist. $\square$

Lemma 7.4 *Es gilt* $R_{\alpha+1} = R_{\alpha'-1}$.

Beweis Da auch (α', α) ein kritisches Paar ist, gilt: $R_{\alpha+1} = [Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = [Z_{\alpha'}, Z_\alpha] = R_{\alpha'-1}$. $\square$

Lemma 7.5 *Es existiert ein* $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$ *mit* $R_{\alpha-1} \neq R_{\alpha+1}$.

Beweis Angenommen, es wäre $R_{\alpha-1} = R_{\alpha+1}$ für alle $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha)$. Dann ist $R_{\alpha+1} \trianglelefteq G_\alpha = P$, also ist $R_{\alpha+1} = Z_0 \trianglelefteq \langle P, \tilde{P} \rangle = G$. Dieser Widerspruch zu $O_p(G) = 1$ zeigt die Behauptung. $\square$

Lemma 7.6 *Es ist* $b = 2$.

Beweis Angenommen, es gälte $b > 2$. Dann ist $V_{\alpha-1} \leq Q_{\alpha+1}$. Da $[E_{\alpha+1}, Q_{\alpha+1}] \leq Q$ ist, gilt $V_{\alpha-1}Q = V_\mu Q$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha+2)$. Weil $d(\mu, \alpha'-1) \leq b-1$, ist $V_\mu \leq Q_{\alpha'-1}$. Außerdem ist $O_p(C_{\alpha+1}) = Q = O_p(C_{\alpha'-1})$ und somit gilt $V_{\alpha-1} \leq V_\mu Q \leq Q_{\alpha'-1} \leq G_{\alpha'}$. Es ist daher $[Z_{\alpha'}, V_{\alpha-1}] = R_{\alpha'-1} = R_{\alpha+1} \leq V_{\alpha-1}$. Es ist $\langle G_{\alpha-1} \cap G_\alpha, Z_{\alpha'} \rangle = G_\alpha$, weil die maximale Untergruppe $H \leq P$, die S enthält, eine normale p-Sylowgruppe besitzt und daher $\langle G_{\alpha-1} \cap G_\alpha, Z_{\alpha'} \rangle > H$ ist. Folglich gilt

$$V_{\alpha-1} \trianglelefteq \langle G_{\alpha-1}, Z_{\alpha'} \rangle = \langle G_{\alpha-1}, G_\alpha \rangle = G,$$

ein Widerspruch. $\square$

8 Der kommutative Fall

In diesem Kapitel sei $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = 1$.

Lemma 8.1 *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Es gilt $C_{S_\alpha}(Z_\alpha) = Q_\alpha$ für $S_\alpha \in Syl_p(G_\alpha)$.

(b) b ist ungerade.

(c) Es gilt $\widetilde{C}_{\alpha'} \neq \widetilde{C}_{\alpha+1}$.

(c') Es ist $b \neq 1$.

(d) Es gilt $R_{\alpha'} \cap R_{\alpha+1} = 1$.

(e) Es gilt $R_{\alpha'-2}R_{\alpha'} = Z_{\alpha'-1}$.

(f) Es gilt $O_p(E_\alpha) \not\leq Q_{\alpha+1}$.

Beweis Wäre $C_{S_\alpha}(Z_\alpha) > Q_\alpha$, so wäre $C_{G_\alpha}(Z_\alpha) \geq E_\alpha$, also $C_{G_\alpha}(Z_\alpha) = G_\alpha$ nach der Definition von Z_α. Dann wäre also $R_{\alpha+1} \trianglelefteq \langle G_\alpha, G_{\alpha+1}\rangle = G$, was $O_p(G) = 1$ widerspricht. Damit folgt (a).

Angenommen, b wäre gerade. Dann ist $G_{\alpha'} = P^g$ für ein $g \in G$. Da $Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}$, ist dies ein Widerspruch zu (a), mit dem (b) gezeigt wurde. Wäre $\widetilde{C}_{\alpha'} = \widetilde{C}_{\alpha+1}$, so wäre $Y_P \leq Y_H \leq O_p(\widetilde{C}) = O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}) = O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}) \leq Q_{\alpha'}$ für eine maximale p-lokale Untergruppe H von G, die P enthält. Dies ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass (α, α') ein kritisches Paar ist. (c') folgt daraus unmittelbar.

Angenommen, es ist $R_{\alpha+1} \cap R_{\alpha'} \neq 1$. Sei $1 \neq z \in Z_{\alpha+1} \cap Z_{\alpha'}$. Es gilt $Q^*_{\alpha+1} \leq C_G(Z_{\alpha+1}) \leq C_G(z) \leq \widetilde{C}_{\alpha+1}$ und $Q^*_{\alpha'} \leq C_G(Z_{\alpha'}) \leq C_G(z) \leq \widetilde{C}_{\alpha'}$. Es folgt $z \in Z(O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1})) \cap Z(O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}))$. Aus der Q-uniqueness folgt $\widetilde{C}_{\alpha'} = \widetilde{C}_{\alpha+1}$, was ein Widerspruch zu (a) ist. Damit wurde (d) gezeigt.

Sei $x \in E_{\alpha'-1}$ mit $(\alpha'-2)^x = \alpha'$. Wäre $R_{\alpha'} = R_{\alpha'-2}$, so wäre $\widetilde{C}_{\alpha'} = \widetilde{C}_{\alpha'-2}$, also nach Lemma 5.11

$$[Q_{\alpha'-2}, E_{\alpha'-2}] \leq O_p(\widetilde{C}_{\alpha'-2}) = O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}) \leq O_p(G_{\alpha'}).$$

Weil $Z_\alpha \leq Q_{\alpha'-2}$ gilt, würde $Z_\alpha O_p(\widetilde{C}_{\alpha'-2})$ von $E_{\alpha'-2}$ normalisiert, also

$$Z_\alpha O_p(\widetilde{C}_{\alpha'-2}) = (Z_\alpha O_p(\widetilde{C}_{\alpha'-2}))^x = Z_\alpha^x O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}) \leq Q_{\alpha'},$$

da $d(\alpha^x, \alpha') \leq b - 3 + 1 < b$ ist, was $Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}$ widerspräche. Somit gilt (e).

(f) folgt direkt mit (b) und (c') aus Lemma 5.4. □

Lemma 8.2 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1}$ *ist nicht normal in* $G_{\alpha+1}$.

(b) $O_p(E_{\alpha+1}) \not\leq Q_\alpha$. *Insbesondere ist* $E_\alpha \leq \langle O_p(E_{\alpha+1})^{G_\alpha} \rangle$.

(c) $Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \not\leq Q_\mu$ *für jedes* $\mu \in \Delta(\alpha+1)$ *mit* $\langle Q_\mu, G_\alpha \cap G_{\alpha+1} \rangle = G_{\alpha+1}$.

Beweis Es sei angenommen, dass $Q_0 := Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \trianglelefteq G_{\alpha+1}$ gelte. Da $Q_\alpha \not\leq Q_{\alpha+1}$ ist, folgt $E_{\alpha+1} \leq \langle Q_\alpha^{G_{\alpha+1}} \rangle$. Es ist $Q_0 = O_p(\langle Q_\alpha^{G_{\alpha+1}} \rangle) \geq O_p(E_{\alpha+1})$. Weil

$$[V_{\alpha+1}, O_p(E_{\alpha+1})] \leq [V_{\alpha+1}, Q_0] = [Z_\alpha^{G_{\alpha+1}}, Q_0^{G_{\alpha+1}}] = \langle [Z_\alpha, Q_0]^{G_{\alpha+1}} \rangle = 1$$

gilt, folgt wegen $[R_{\alpha+1}, G_{\alpha+1}] = 1$ mit Lemma 3.5, angewendet auf $G_{\alpha+1}$ mit dem Normalteiler $V_{\alpha+1}$, $[V_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}] = 1$. Damit gilt insbesondere $[Z_\alpha, G_{\alpha+1}] = 1$, also $Z_\alpha \trianglelefteq \langle G_\alpha, G_{\alpha+1} \rangle$, ein Widerspruch. Daraus folgt (a).

Sei nun $O_p(E_{\alpha+1}) \leq Q_\alpha$ angenommen. Dann ist $Q_0 \trianglelefteq G_{\alpha+1}$, was (a) widerspricht. Es folgt (b) mit der Eigenschaft von Normalteilern in minimal parabolischen Gruppen.

Sei zuletzt $Q_0 \leq Q_\mu$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha+1)$ mit $\langle Q_\mu, G_\alpha \cap G_{\alpha+1} \rangle = G_{\alpha+1}$ angenommen. Dann ist $Q_0 = Q_\mu \cap Q_{\alpha+1}$. Also ist Q_0 normal in $G_{\alpha+1}$, was (a) widerspricht. □

Lemma 8.3 $C_G(V_{\alpha+1})$ *ist eine* p*-Gruppe.*

Beweis Sei $E := O^p(C_G(V_{\alpha+1}))$. Es ist $[E, E_\alpha] \leq EQ_\alpha$, da $E \leq C_G(Z_\alpha)$ ist und Lemma 5.9 (b) gilt. Außerdem gilt $E = O^p(EQ_\alpha)$, weil E von Q_α normalisiert wird. Damit gilt $[E, E_\alpha] = [O^p(EQ_\alpha), E_\alpha] \leq O^p(EQ_\alpha) = E$. Also ist $E \trianglelefteq \langle E_\alpha, G_{\alpha+1} \rangle = G$. Somit muss wegen $O_p(G) = 1$ auch $O_p(E) = 1$ gelten. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass $C_G(V_{\alpha+1}) \leq C_{\alpha+1}$ ist und $C_{\alpha+1}$ lokale Charakteristik p hat, denn es ist $[E, O_p(C_{\alpha+1})] \leq E \cap O_p(C_{\alpha+1}) = 1$. □

Lemma 8.4 *Es gilt* $p = q$.
Insbesondere ist $P = P^*$.

Beweis Sei L die Gruppe aus dem L-Lemma (Lemma 3.12), angewendet auf Z_α in $G_{\alpha'}$. Dann ist $|Z_\alpha / Z_\alpha \cap O_p(L)| \leq p$. Sei zudem $\widetilde{L}$ die Gruppe aus dem L-Lemma, angewendet auf $V_{\alpha'}$ in $G_{\alpha+1}$. Dann gilt ebenso $|V_{\alpha'} / V_{\alpha'} \cap O_p(\widetilde{L})| \leq p$. Zudem gilt $[Z_\alpha \cap O_p(L), V_{\alpha'} \cap O_p(\widetilde{L})] \leq R_{\alpha+1} \cap R_{\alpha'} = 1$ und daher gilt $|Z_\alpha| = p^2$, also $p = q$.

Der Zusatz folgt unmittelbar daraus, dass $|Z_0| = p$ ist, aber $C_{Z_0}(S) \neq 1$ gilt und $S \cap P^* = C_S(Z_0)$ und $P = SP^*$ ist. □

Lemma 8.5 *Es gilt $p = 2$ oder $p = 3$.*

Beweis Sei $p \neq 2$. Nach Lemma 5.14 operiert $G_{\alpha+1}$ treu und nicht p-stabil auf $V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}$. Mit Lemma 3.9 folgt die Behauptung. □

8.1 Der Fall $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$ und $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$

Lemma 8.6 *Es gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $|[V_{\alpha+1}, x]| \leq p$ *für alle* $x \in V_{\alpha'}$.

(ii) $|[V_{\alpha'}, y]| \leq p$ *für alle* $y \in V_{\alpha+1}$.

(iii) $R_{\alpha'} \leq [V_{\alpha+1}, x]$ *für ein* $x \in V_{\alpha'}$.

(iv) $R_{\alpha+1} \leq [V_{\alpha'}, y]$ *für ein* $y \in V_{\alpha+1}$.

Insbesondere gilt immer $|[V_{\alpha+1}, x]| \leq p^2$ *und* $|[V_{\alpha'}, y]| \leq p^2$ *für alle* $x \in V_{\alpha'}$ *und alle* $y \in V_{\alpha+1}$.

Beweis Es gilt $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$ und $V_{\alpha+1} \not\leq Q_{\alpha'}$ und nach Lemma 4.2 $V_{\alpha'}/R_{\alpha'} = \langle C_{V_{\alpha'}/R_{\alpha'}}(A) | |V_{\alpha+1}/A| = p\rangle$, sowie $V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1} = \langle C_{V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}}(A) | |V_{\alpha'}/A| = p\rangle$. Daher existiert ein $A \leq V_{\alpha+1}$ mit $|V_{\alpha+1}/A| = p$ sowie $C_A \not\leq Q_{\alpha+1}$ für das Urbild C_A von $C_{V_{\alpha'}/R_{\alpha'}}(A)$. Sei $x \in C_A$. Dann gilt $|[V_{\alpha+1}, x]R_{\alpha'}/R_{\alpha'}| = p$, da A von $xR_{\alpha'}$ zentralisiert wird. Es folgt $|[V_{\alpha+1}, x]| = p$ oder $R_{\alpha'} \leq [V_{\alpha+1}, x]$.

Analog folgt $|[V_{\alpha'}, y]| = p$ oder $R_{\alpha+1} \leq [V_{\alpha'}, y]$ für ein $y \in V_{\alpha+1}$. Es folgt die Behauptung. □

Sei im folgenden $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$ und $[V_{\alpha+1}, V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}] \neq 1$ oder $[V_{\alpha'}, V_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha'}] \neq 1$, also insbesondere $R_{\alpha+1} \leq V_{\alpha'}$ oder $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$. O.B.d.A. kann $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha'-1}$ angenommen werden.

Lemma 8.7 *Es gilt $W_{\alpha+1} \leq G_{\alpha'}$.*

Beweis Es gilt $[W_{\alpha+1}, Z_{\alpha'-1}] \leq [W_{\alpha+1}, V_{\alpha+1}][W_{\alpha+1}, Z_{\alpha'-3}] = 1$, da nach Lemma 8.1 (e) $R_{\alpha'} \neq R_{\alpha'-1}$ gilt. Folglich ist $W_{\alpha+1} \leq C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})$. Nach Lemma 5.9 (b) wird $C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})Q_{\alpha'-1}$ von $E_{\alpha'-1}$ normalisiert; also folgt

$$W_{\alpha+1} \leq C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})Q_{\alpha'-1} \leq (C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})Q_{\alpha'-1})^x \leq G_{\alpha'}$$

mit $x \in E_{\alpha'-1}$ derart, dass $(\alpha'-2)^x = \alpha'$ gilt. $\square$

Lemma 8.8 *Ist $X \cong C_3 \times C_3$, $Q_8 \times Q_8$ oder eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 27, so ist $W_\alpha = V_{\alpha+1} C_{W_\alpha}(X)$.*

Beweis Sei $\overline{W}_\alpha := W_\alpha / C_{W_\alpha}(X)$. Angenommen, es gilt $|\overline{W}_\alpha| \geq p^2$. Es ist nach Lemma 4.2 $V = \langle C_V(\overline{W}) | |\overline{W}_\alpha/\overline{W}| = p \rangle$. Somit existiert ein $\overline{W} \leq \overline{W}_\alpha$, sodass $|\overline{W}_\alpha/\overline{W}| = p$ und $\overline{W}_\alpha = \overline{W}\langle \overline{t} \rangle$ ist und das Urbild V_1 von $C_V(\overline{W})$ nicht in $V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}$ liegt. Es gilt $[C_V(\overline{W}), \overline{W}_\alpha] = [C_V(\overline{W}), \langle \overline{t} \rangle]$, also $[V_1, \overline{W}] \leq [V_1, \langle \overline{t} \rangle] = [V_1, \langle t \rangle] R_{\alpha'}$. Es folgt

$$[V_1, W_\alpha] \leq [V_1, W][V_1, \langle t \rangle] \leq R_{\alpha'} V_{\alpha+1} \leq V_{\alpha+1} \leq W_\alpha.$$

Dies gilt insbesondere für alle $\delta \in \Delta(\alpha+1)$. Also insbesondere für eines mit $\langle G_\delta \cap G_{\alpha+1}, V_1 \rangle = G_{\alpha+1}$. Es folgt $W_\delta \trianglelefteq \langle G_\delta, G_{\alpha+1} \rangle = G$, ein Widerspruch. Also ist $|\overline{W}_\alpha| = p$ und damit $W_\alpha = V_{\alpha+1} C_{W_\alpha}(X)$. $\square$

Lemma 8.9 *Gilt $W_\alpha = V_{\alpha+1} C_{W_\alpha}(Q_1)$ und $|\overline{V}_1| \geq p^4$, so ist $b = 3$.*

Beweis Angenommen, es gälte $b > 3$. Wegen $|\overline{V}_1| \geq p^4$ gilt $|[\overline{V}_1, V_{\alpha+1}]| = p^2$, also $V_1 \not\leq Q_{\alpha+1}$. Es gilt $[\overline{V}_1, V_{\alpha+1}, W_\alpha] = 1$, da $[V_1, V_{\alpha+1}] \leq V_{\alpha+1}$ und W_α elementarabelsch ist. Insbesondere ist $[\overline{V}_1, C_{W_\alpha}(Q_1)] = 1$, weil $[V_{\alpha+1}, W_\alpha, \overline{V}_1] = 1$ ist, also auch $[\overline{V}_1, W_\alpha, V_{\alpha+1}]$, und es nicht zwei Elemente der Ordnung p gibt, die auf Vektorräumen der Ordnung p^2 gleich operieren. Es folgt $[V_1, W_\alpha] \leq [V_1, V_{\alpha+1}] R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$. Dies gilt insbesondere für ein $\delta \in \Delta(\alpha+1)$ mit $\langle V_1, G_\delta \cap G_{\alpha+1} \rangle = G_{\alpha+1}$. Dieses δ existiert, weil sonst V_1 in dem Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $G_{\alpha+1}$ liegt, die eine p-Sylowgruppe enthalten. Da dies ein Normalteiler ist, der offenbar nicht $E_{\alpha+1}$ enthält, ist $V_1 \leq Q_{\alpha+1}$, was - wie gezeigt - falsch ist. Somit ist W_δ normal in G_δ und $G_{\alpha+1}$, also in G, was $O_p(G) = 1$ widerspricht. $\square$

Lemma 8.10 *Es gilt $b = 3$, falls $[O_{p'}(\overline{G}_{\alpha'}), t] \cong Y$ mit $Y = Q_8$ oder $Y = C_3$ für ein $t \in V_{\alpha+1}$.*

Beweis Sei $b > 3$. Es ist $Q_1 := [O_{p'}(\overline{G}_{\alpha'}), t] \geq [Q_1^w, t] = [Q_1, t]^w = Q_1^w$, also $Q_1 = Q_1^w$ für alle $w \in W_\alpha$. Sei $V := [V_{\alpha'}/R_{\alpha'}, Q_1]$, V^* das Urbild von V und $R := [V, t]$. Es ist $R \leq [V_{\alpha+1}, V_{\alpha'}] \leq V_{\alpha+1}$, und daher gilt

$$[V^*, W_\alpha] = [V^*, V_{\alpha+1} C_W(Q_1)] = [V^*, V_{\alpha+1}][V^*, C_{W_\alpha}(Q_1)] \leq R R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}.$$

Wäre $V^* \not\leq Q_{\alpha+1}$, so existierte ein $\delta \in \Delta(\alpha+1)$ mit $G_{\alpha+1} = \langle G_{\alpha+1} \cap G_\delta, V^* \rangle$ und damit wäre $[W_\delta, V^*] \leq V_{\alpha+1} \leq W_\delta$, also $W_\delta \trianglelefteq \langle G_\delta, V^* \rangle = \langle G_\delta, G_{\alpha+1} \rangle = G$. Also kann $V^* \leq Q_{\alpha+1}$ angenommen werden. Dann ist aber $R = R_{\alpha+1}$, da $[V^*, V_{\alpha+1}] \leq R_{\alpha+1}$ gilt und $p = q$ ist. Es ist somit $V^* \leq G_\delta$ für alle $\delta \in \Delta(\alpha+1)$. Insbesondere existiert ein $\delta \in \Delta(\alpha+1)$ mit $V^* \not\leq Q_\delta$, da sonst $R = 1$ folgt, was $R = R_{\alpha+1}$ widerspräche.

Es ist

$$|\langle t \rangle / C_{\langle t \rangle}(\overline{V}_{\alpha'})| = |\langle t \rangle| = p = |\overline{R}_{\alpha+1}| = |[\langle t \rangle, \overline{V}_{\alpha'}]| = |\overline{V}_{\alpha'} / C_{\overline{V}_{\alpha'}}(\langle t \rangle)|.$$

Also kann Satz 5.25 angewendet werden, und es folgt $O_{p'}(\overline{G}_{\alpha'}) \cong O^p(SL_2(3))$ oder $O_{p'}(\overline{G}_{\alpha'}) \cong O^p(\bigtimes_{i=1}^{r} S_3)$ wegen $q = p \in \{2,3\}$. Seien V und V^* in dieser Situation wie oben.

Sei $\overline{W}_\delta := W_\delta / Z_\delta$. Dann ist $[\overline{W}_\delta, V^*] \leq \overline{R_{\alpha+1} R_{\alpha'}} = \overline{R}_{\alpha'}$. Weil $\alpha+1$ und α' die gleiche Struktur haben, kann gegebenenfalls $\alpha+1$ mit α' vertauscht werden, damit $[\overline{W}_\delta, V^*] \neq 1$ gilt. Sei nun $L := \langle V^*, V^{*g} \rangle$ für ein $g \in G_\delta$, sodass $LQ_\delta = G_\delta$ gilt. Dann ist, weil L von zwei Konjugierten von V^* erzeugt wird, $|\overline{W}_\delta / C_{\overline{W}_\delta}(L)| \leq p^2$, und wegen $|\overline{W}_\delta / C_{\overline{W}_\delta}(L)| \neq 1$ folgt somit $|\overline{W}_\delta / C_{\overline{W}_\delta}(L)| = p^2$, da $L/O_p(L) \cong SL_2(p)$ ist. Es ist $|\overline{V}_{\alpha+1} / C_{\overline{V}_{\alpha+1}}(L)| \neq 1$, weil sonst $[\overline{W}_\delta, V^*] = 1$ gälte. Außerdem ist $|\overline{V}_{\alpha+1} / C_{\overline{V}_{\alpha+1}}(L)| \neq p^2$, da $\overline{V}_{\alpha+1}$ von V^* zentralisiert wird. Somit ist die Ordnung gleich p. Es ist $V_{\alpha+1} \cap V_{\delta-1}$ das Urbild von $C_{\overline{V}_{\alpha+1}}(L)$, weil dieses Urbild von L normalisiert wird, also in dem Schnitt liegt, und andererseits der Schnitt modulo Z_δ von den zugehörigen V^* und V^{*h} mit $h \in G_\delta$ zentralisiert wird. Folglich ist $|V_{\delta-1} / (V_{\alpha+1} \cap V_{\delta-1})| = p$ wegen der Transitivität von L auf $\Delta(\delta)$. Somit gilt $V_{\alpha+1} \cap V_{\delta-1} \trianglelefteq \langle Q_{\alpha+1}, Q_{\delta-1} \rangle Q_\delta = G_\delta$.

Diese Situation kann nun von δ auf $\alpha'-1$ übertragen werden, und man erhält damit: $V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2} \trianglelefteq G_{\alpha'-1}$ und $|V_{\alpha'} / V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = p$.

Sei nun $H := \langle Q_{\alpha'}, Q_{\alpha'-2} \rangle$ und $U := O_p(H)$. Dann folgt $[V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}, H] \leq R_{\alpha'} R_{\alpha'-2} = Z_{\alpha'-1}$, da Letzteres nach Lemma 8.1 (e) gilt. Wegen $V^* \not\leq Q_\delta$ folgt $V^* \not\leq V_{\alpha'-2}$, also $|V^*/V^* \cap V_{\alpha'-2}| = p$. Wegen $|V| = p^2$, also $|V^*| = p^3$ folgt $V^* \cap V_{\alpha'-2} = R_{\alpha+1} R_{\alpha'}$, denn nur diese liegen in Q_δ. Es gilt $[R_{\alpha+1}, U] = [R_{\alpha+1} Z_{\alpha'-1} U] \trianglelefteq H$, da $[R_{\alpha+1}, Q_{\alpha'}] \leq R_{\alpha'}$ und $[R_{\alpha+1}, Q_{\alpha'-2}] \leq R_{\alpha'-2}$ gilt. Da außerdem $Z_{\alpha'-1} \geq [R_{\alpha+1}, U]$ gilt, folgt aus der Irreduzibilität des Moduls $Z_{\alpha'-1}$: $[R_{\alpha+1}, U] = 1$ oder $[R_{\alpha+1}, U] = Z_{\alpha'-1}$.

Sei zunächst $[R_{\alpha+1}, U] = 1$. Dann ist

$$R_{\alpha+1} \leq \Omega_1(Z(U)) =: W = Z_{\alpha'-1} \times C_W(O^p(H)) = Z_{\alpha'-1} \times C_W(E_{\alpha'-1}),$$

weil $W = Z_{\alpha'-1} \times C_W(A)$ für jede p'-Untergruppe A von $E_{\alpha'-1}$ gilt und daher $W = Z_{\alpha'-1}C_W(E_{\alpha'-1})$ ist. Das direkte Produkt folgt dann wegen $C_{Z_{\alpha'-1}}(E_{\alpha'-1}) = 1$. Weil eine p-Sylowgruppe $C_W(E_{\alpha'-1})$ normalisiert und einen nicht-trivialen Zentralisator hat, folgt, falls $C_W(E_{\alpha'-1}) \neq 1$ gilt, dass $Z(G_{\alpha'-1}) \neq 1$ ist, was Lemma 5.3 widerspricht. Somit ist $W = Z_{\alpha'-1}$ und $R_{\alpha+1} \leq Z_{\alpha'-1}$. Dann ist aber insbesondere $Z_{\alpha'-1} = R_{\alpha+1}R_{\alpha'} \leq V^*$, weil $R_{\alpha+1} \neq R_{\alpha'}$ gilt. Da V^* $E_{\alpha'}$-invariant ist, folgt $V^* = V_{\alpha'}$, also $r = 1$.

Sei nun $[R_{\alpha+1}, U] = Z_{\alpha'-1}$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $[R_{\alpha+1}, u] = R_{\alpha'-2}$. Somit folgt $V^*V^{*u} \geq [R_{\alpha+1}, u] = R_{\alpha'-2}$ und es folgt $Z_{\alpha'-1} \leq V^*V^{*u}$. Da hier V^*V^{*u} ebenfalls $E_{\alpha'}$-invariant ist, folgt in dieser Situation $r \leq 2$ und damit die Behauptung, da in den Fällen $r = 1$ wegen $V_{\alpha'} = V^* \leq Q_{\alpha+1}$ ein Widerspruch vorliegt zu dem Fall, in dem wir uns befinden und auch der Fall $r = 2$ schnell zum Widerspruch geführt werden kann: Wegen $|V_{\alpha'}/V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = p$ und $|V^*/V^* \cap V_{\alpha'-2}| = p$ folgt $V^{*u} \leq V_{\alpha'-2} \leq Q_{\alpha+1}$ und damit $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$. □

Lemma 8.11 *Es gilt $b = 3$.*

Beweis Sei $b > 3$. Sei $t \in V_{\alpha+1}$ mit $[t, V_{\alpha'}] \not\leq R_{\alpha'}$. Dann ist nach Lemma 8.6 $|[V_{\alpha'}, t]| \leq p^2$. Aus dem Lemma 4.7 und dem Lemma 4.8 folgt, dass einer der folgenden Fälle für $X := [O_{p'}(G_{\alpha'}), t]$ eintritt:

(i) $X \cong Q_8$

(ii) $X \cong Q_8 \times Q_8$

(iii) $X \cong C_3$

(iv) $X \cong C_3 \times C_3$

(v) $X \cong C_5$

(vi) X ist eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 27

Lemma 8.8 zeigt, dass in den Fällen (ii), (iv) und (vi) $W_\alpha = V_{\alpha+1}C_{W_\alpha}(X)$ gilt. Weil W_α wegen $b > 3$ elementarabelsch ist, folgt auch bei (v) $W_\alpha = V_{\alpha+1}C_{W_\alpha}(X)$. In all diesen Fällen gilt $b = 3$ nach Lemma 8.9, was der Annahme widerspricht.

Es bleiben also die Fälle (i) und (iii) übrig. Bei diesen liefert Lemma 8.10 das Gewünschte. □

8.2 Der Fall $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$, $R_{\alpha+1} \not\leq V_{\alpha'}$ und $R_{\alpha'} \not\leq V_{\alpha+1}$

In diesem Abschnitt sei $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$ und sowohl $R_{\alpha+1} \not\leq V_{\alpha'}$ als auch $R_{\alpha'} \not\leq V_{\alpha+1}$.

Lemma 8.12 *Es ist $V_{\alpha+1}$ ein Offender auf $V_{\alpha'}$.*

Beweis Da auch $(\alpha'+1, \alpha+1)$ für ein $\alpha'+1 \in \Delta(\alpha')$ ein kritisches Paar ist, gelte o.B.d.A. $|V_{\alpha+1}/C_{V_{\alpha+1}}(V_{\alpha'})| \geq |V_{\alpha'}/C_{V_{\alpha'}}(V_{\alpha+1})|$. Es ist

$$V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1} \leq C_{V_{\alpha'}}(V_{\alpha+1}) \leq C_{V_{\alpha'}/R_{\alpha'}}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1},$$

denn es gilt $[V_{\alpha+1}, V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}] \leq R_{\alpha+1}$ und wegen der Operation von $V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}$ auf den Z_δ mit $\delta \in \Delta(\alpha+1)$ gilt zudem $[Z_\delta, V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}] = 1$ oder $= R_{\alpha+1}$, wobei letzteres wegen $R_{\alpha+1} \not\leq V_{\alpha'}$ und $V_{\alpha+1} \leq G_{\alpha'}$ nicht möglich ist. Somit gilt also $V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1} = C_{V_{\alpha'}}(V_{\alpha+1})$. Analog folgt $V_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha'} = C_{V_{\alpha+1}}(V_{\alpha'})$.

Es gilt mit $\overline{V_{\alpha'}} := V_{\alpha'}/R_{\alpha'}$ daher

$$\begin{aligned}
|\overline{V_{\alpha'}}/C_{\overline{V_{\alpha'}}}(V_{\alpha+1})| &\leq |\overline{V_{\alpha'}}/\overline{C_{V_{\alpha'}}(V_{\alpha+1})}| \\
&= |\overline{V_{\alpha'}}/\overline{V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}}| \\
&= |V_{\alpha'}/V_{\alpha'} \cap Q_{\alpha+1}| \\
&= |V_{\alpha'}/C_{V_{\alpha'}}(V_{\alpha+1})| \\
&\leq |V_{\alpha+1}/C_{V_{\alpha+1}}(V_{\alpha'})| \\
&= |V_{\alpha+1}/V_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha'}| \\
&= |V_{\alpha+1}/C_{V_{\alpha+1}}(\overline{V_{\alpha'}})|
\end{aligned}$$

und folglich die Behauptung. □

Lemma 8.13 *Es gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong SL_2(3)$

(ii) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong \overline{S} \bigtimes_{i=1}^{r} K_i$ *mit* $K_i \cong S_3$ *für ein* $r \in \mathbb{N}$.

Beweis Mit Lemma 8.12 folgt nach Satz 5.25 mit Lemma 8.3 und der Auflösbarkeit von $\widetilde{P}$ die Behauptung. □

8.3 Der Fall $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$

In diesem Abschnitt sei $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$.

Lemma 8.14 *Es ist* $[Z_\alpha, V_{\alpha'}] = R_{\alpha+1}$.

Beweis Angenommen, $[Z_\alpha, V_{\alpha'}] \neq R_{\alpha+1}$. Dann gilt $[Z_\alpha, V_{\alpha'}] = 1$ wegen $V_{\alpha'} \leq G^*_{\alpha}$, also $Z_\alpha \leq C_{S^*_{\alpha'\alpha'-1}}(V_{\alpha'}) \leq \bigcap_{\delta\in\Delta(\alpha')} Q_\delta \leq Q_{\alpha'}$, ein Widerspruch. □

Lemma 8.15 *Z_α ist ein Offender auf $V_{\alpha'}/R_{\alpha'}$.*

Beweis Angenommen, es gälte $[Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}, V_{\alpha'}] \neq 1$. Dann ist $R_{\alpha'} = [Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}, V_{\alpha'}] \leq R_{\alpha+1}$, da $Z_\alpha \cap Q_{\alpha'} = Z_\alpha \cap Q^*_{\alpha'}$ und $[Q^*_{\alpha'}, Z_\delta] = R_{\alpha'}$ für alle $\delta \in \Delta(\alpha')$ gilt. Aus Ordnungsgründen folgt daher $R_{\alpha'} = R_{\alpha+1}$. Es gilt aber $O_p(\widetilde{C}) \leq Q_{\alpha'}$ wegen der Maximalität und der Eindeutigkeit (Lemma 5.1) von $\widetilde{C}$ bzw. Q. Somit folgt $Y_P \not\leq Q$, was ein Widerspruch zu $Y_P \leq Y_H \leq Q$ für ein maximales p-lokales H mit $P \leq H$ darstellt. Also gilt $[Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}, V_{\alpha'}] = 1$. Da

$$C_{S^*_{\alpha'-1\alpha'}}(V_{\alpha'}) \leq \bigcap_{\delta\in\Delta(\alpha')} Q_\delta \leq Q_{\alpha'}$$

ist, gilt $C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'}) = Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}$. Es gilt $V_{\alpha'} \leq Q^*_{\alpha+1} \leq S^*_{\alpha\alpha+1}$, also $C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'}) = Z_\alpha$ oder $C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'}) = R_{\alpha+1}$. Im ersten Fall wäre $Z_\alpha \leq C_{S^*_{\alpha'-1\alpha'}}(V_{\alpha'}) \leq Q_{\alpha'}$, was der Definition eines kritischen Paares widerspräche. Also gilt $R_{\alpha+1} = C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'}) = Z_\alpha \cap Q_{\alpha'}$. Es folgt mit $\overline{V_{\alpha'}} := V_{\alpha'}/R_{\alpha'}$:

$$\begin{aligned}
|\overline{V_{\alpha'}}/C_{\overline{V_{\alpha'}}}(Z_\alpha)| &\leq |V_{\alpha'}/C_{V_{\alpha'}}(Z_\alpha)| \\
&= |V_{\alpha'}/(V_{\alpha'} \cap Q_\alpha)| \\
&\leq q \\
&= |Z_\alpha/R_{\alpha+1}| \\
&= |Z_\alpha/(Z_\alpha \cap Q_{\alpha'})| \\
&\leq |Z_\alpha/C_{Z_\alpha}(\overline{V_{\alpha'}})|.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.16 *Es gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong SL_2(3)$ *und* $q = 3$

(ii) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong \overline{S} \bigtimes_{i=1}^{r} K_i$ *mit* $K_i \cong S_3$ *für ein* $r \in \mathbb{N}$ *und* $q = 2$.

Beweis Wegen Lemma 8.15 folgt nach Satz 5.25 mit Lemma 8.3 und der Auflösbarkeit von $\widetilde{P}$ die Behauptung. □

8.4 Die Bestimmung von b

Bemerkung 8.17 *Nach den Lemmata 8.11, 8.13 und 8.16 gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $b = 3$

(ii) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong SL_2(3)$ *und* $q = 3$

(iii) $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cong \overline{S} \bigtimes_{i=1}^{r} K_i$ *mit* $K_i \cong S_3$ *für ein* $r \in \mathbb{N}$ *und* $q = 2$.

Lemma 8.18 *Sei* $b > 3$ *und* $\varrho \in \Gamma$ *mit* $d(\varrho, \alpha+1) = p$. *Es existiere ein* $t \in C_{G_{\alpha+1}}(V_\varrho)$, $x \in [E_{\alpha+1}, t]$ *und* $A \leq V_\varrho^x$, *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $[A, t] \leq V_{\alpha+1}$,

(ii) $\langle G_{\alpha+1} \cap G_\nu, t\rangle = G_{\alpha+1}$ *für* $\nu \in \Delta(\alpha+1) \cap \Delta(\varrho^x)$,

(iii) $|[V_{\alpha+1}, t]R_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}| = p$.

Dann gilt $A \leq V_{\alpha+1}$.

Beweis Es darf - ggf. nach Konjugation durch $G_{\alpha+1}$ - angenommen werden, dass $\nu = \alpha$ ist. Sei $\alpha - 1 := \varrho^x$. Angenommen, es gälte $A \not\leq V_{\alpha+1}$. O.B.d.A. kann $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1} \leq A$ angenommen werden. Sei $T := \langle (t^x)^{Q_\alpha}\rangle$, $F := \langle Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}, t\rangle$, $Q_F := O_p(O^p(F))$, $\overline{G}_{\alpha+1} := G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1}$, $\overline{V}_{\alpha+1} := V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}$ und $V_a := [\langle a\rangle V_{\alpha+1}, Q_F]R_{\alpha+1}$ für alle $a \in A$.

Nach der Voraussetzung ist $t \not\in Q_{\alpha+1}$ und $[V_{\alpha-1}, T] = 1$, weil $[V_{\alpha-1}, t^x] = [V_\varrho, t]^x = 1$ ist. Insbesondere gilt dann $T \leq Q_{\alpha-1}$, da $C_{G_{\alpha-1}}(V_{\alpha-1}/R_{\alpha-1}) = Q_{\alpha-1}$ ist nach Lemma 8.3.

Die Struktur von $G_{\alpha+1}$ ist durch die Bemerkung 8.17 bekannt:

$$\overline{E}_{\alpha+1}\overline{T} = K_1 \times \ldots \times K_r \text{ mit } K_i \cong SL_2(p),$$

$$[\overline{V}_{\alpha+1}, \overline{E}_{\alpha+1}] = \overline{V}_1 \times \ldots \times \overline{V}_r \text{ mit } \overline{V}_i = [\overline{V}_{\alpha+1}, K_i] \text{ und } |\overline{V}_i| = p^2.$$

O.B.d.A. gelte $[\overline{E}_{\alpha+1}, t] \leq K_1$, also $\overline{x} \in K_1$ und

$$O^p(\overline{F}) = \langle O^p(K_1)^y | y \in \overline{Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}}\rangle.$$

Weil Q_F F-invariant ist, ist es auch V_a, und es gilt $V_a \leq [V_{\alpha+1}, O^p(F)]R_{\alpha+1}$, weil

$$[\langle a\rangle V_{\alpha+1}, Q_F]R_{\alpha+1} \leq [\langle a\rangle V_{\alpha+1}, O^p(F)]R_{\alpha+1} \leq [V_{\alpha+1}, O^p(F)]R_{\alpha+1}$$

ist, wobei die letzte Ungleichung wegen $[F, \langle a \rangle] \leq V_{\alpha+1}$ und teilerfremder Operation gilt. Weil $G_\alpha/Q_\alpha \cong SL_2(p)$ ist, gilt $|Q_F/Q_F \cap Q_\alpha| \leq p$. Wegen $R_{\alpha+1} \leq V_a \cap V_{\alpha-1}$ und $[\langle a \rangle V_{\alpha+1}, Q_F] \leq Q_F$ folgt $|V_a/V_a \cap V_{\alpha-1}| \leq p$.

Es sei $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha-1}| = p$ angenommen. Dann ist $V_{\alpha-1} = A$ und

$$[\langle Q_\alpha, t \rangle, V_{\alpha-1}V_{\alpha+1}] \leq V_{\alpha-1}V_{\alpha+1}[A, t] = V_{\alpha-1}V_{\alpha+1},$$

also wird $V_{\alpha-1}V_{\alpha+1}$ von $\langle Q_\alpha, t \rangle$ normalisiert. Weil $G_\alpha \cap G_{\alpha+1} = Q_\alpha Q_{\alpha+1}$ ist, folgt $E_{\alpha+1} \leq \langle Q_\alpha, t \rangle$ aus der Voraussetzung (ii). Mit Lemma 8.2 (b) folgt $W_\alpha = V_{\alpha-1}V_{\alpha+1}$ und damit $W_\alpha \trianglelefteq \langle G_\alpha, E_{\alpha+1} \rangle = G$ - ein Widerspruch. Es folgt also $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}| \geq p^2$.

Sei nun angenommen, dass $V_a \neq R_{\alpha+1}$ gilt. Wegen

$$R_{\alpha+1} \leq V_a \leq [V_{\alpha+1}, O^p(F)]R_{\alpha+1}$$

ist dann $[V_a, O^p(F)] \neq 1$. Weil $O^p(\overline{F}) = \langle O^p(K_i)^y | y \in \overline{Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1}} \rangle$ ist, gilt $V_1 \leq V_a$. Es folgt $V_a = V_1(V_a \cap V_{\alpha-1})$ wegen $|V_a/V_a \cap V_{\alpha-1}| \leq p$ und $V_1 \not\leq V_{\alpha-1}$. Außerdem ist $[V_a, T] = [V_1, T] \leq V_1$, weil $\overline{T} \leq K_1 \times \ldots \times K_r$ gilt. Da $[O^p(\overline{F}), \overline{F}] = O^p(\overline{F})$ gilt, folgt $O^p(\overline{F}) = O^p(K_1)$, also $F/O_p(F) \cong SL_2(p)$. Mit

$$V_a \leq [V_{\alpha+1}, O^p(F)]R_{\alpha+1} = V_1 R_{\alpha+1} = V_1$$

gilt deswegen $V_a = V_1$.

Es ist $Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \trianglelefteq Q_\alpha$ und $\overline{S} = \overline{Q}_\alpha$. Weil $\overline{Q}_\alpha$ transitiv auf den K_i operiert und $O^p(\overline{F}) = K_1$ von $\overline{Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}}$ normalisiert wird, normalisiert $\overline{Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}}$ alle einzelnen K_i. Es gilt $T \leq Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \leq TQ_{\alpha+1}$ und daher folgt wegen $[V_{\alpha-1}, T] = 1$:

$$[V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] = [V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \cap Q_{\alpha+1}] \leq R_{\alpha-1} \cap R_{\alpha+1} = 1.$$

In G_α ist $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}$ normal. Außerdem ist $O_p(E_\alpha) \leq \langle (Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1})^{G_\alpha} \rangle$. Daher folgt

$$[V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}, O_p(E_\alpha)] \leq \langle [V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1}]^{G_\alpha} \rangle = 1.$$

Da nach Lemma 5.3 $Z(G_\alpha) = 1$ ist, gilt $Z(E) = 1$ für $E := \langle E_\alpha, V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha-1} \rangle$.

Sei nun angenommen, dass $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1} \neq Z_\alpha$ gälte. Für $W := \Omega_1(Z(O_p(E)))$ gilt dann $W = [W, E] \times W_0$ mit $W_0 := C_W(E)$, denn E operiert teilerfremd auf W, weil W von der in E normalen p-Sylowgruppe zentralisiert wird. Somit ist $C_{W_0}(S_{\alpha'\alpha'-1}) \neq 1$ und dann folgt mit $1 \neq C_{W_0}(S_{\alpha'\alpha'-1}) \leq Z(G_{\alpha'-1}) = 1$ ein Widerspruch. Es gilt also $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1} = Z_\alpha$.

Aus $|V_a/V_a \cap V_{\alpha-1}| \leq p$ und $V_a = V_1$ folgt $|V_1/V_1 \cap V_{\alpha-1}| \leq p$. Weil $|V_1| = p^3$ ist, folgt $V_1 \cap V_{\alpha-1} = Z_\alpha$, also $Z_\alpha \leq V_1$ und damit $V_1 = V_{\alpha+1}$. Nun folgt aber mit $p \geq |V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}| = p^2$ ein Widerspruch. Damit wurde $V_a = R_{\alpha+1}$ für alle $a \in A$ gezeigt. Daher gilt $[A, Q_F] \leq R_{\alpha+1}$.

Wäre $Q_F \not\leq Q_\alpha$, so wird A von $\langle Q_{\alpha-1}Q_\alpha, Q_F\rangle = G_\alpha$ normalisiert, also wäre $A \leq V_{\alpha+1}$, ein Widerspruch zur Annahme. Somit ist $Q_F \leq Q_\alpha$. Sei

$$Q_F^* := \bigcap_{y \in F} (Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1})^y \text{ und } \overline{Q}_{\alpha+1} := Q_{\alpha+1}/Q_F^*.$$

Dann ist

$$Q_{\alpha-1} \cap Q_{\alpha+1} = Q_{\alpha-1} \cap Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \leq O_p(F)$$

und daher $Q_{\alpha-1} \cap Q_{\alpha+1} \leq Q_F^*$. Damit gilt

$$[Q_{\alpha+1} \cap Q_\alpha, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] \leq Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1} \leq Q_F^*,$$

also $[\overline{Q_{\alpha+1} \cap Q_\alpha}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] = 1$. Weil $|Q_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1} \cap Q_\alpha| = p$ ist, folgt $F/C_F(\overline{Q}_{\alpha+1}) \cong SL_2(p)$ und, dass $Q_{\alpha+1} \cap Q_\alpha$ von $C_F(\overline{Q}_{\alpha+1})$ normalisiert wird. Nach Lemma 8.2 (c) muss $C_F(\overline{Q}_{\alpha+1})$ eine p-Gruppe sein, weil nach Lemma 8.3 $C_{G_{\alpha+1}}(V_{\alpha+1})$ eine p-Gruppe ist und ein p'-Element $Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1}$ in ein Q_μ konjugierte, welches mit $G_\alpha \cap G_{\alpha+1}$ ganz $G_{\alpha+1}$ erzeugte. Also ist $F/O_p(F) \cong SL_2(2)$ und $O^p(\overline{F}) = O^p(K_1)$. Es folgt wieder $Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \leq TQ_{\alpha+1}$ und $[V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] = 1$ und damit $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1} = Z_\alpha$. Außerdem gilt

$$[A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] = [A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \cap Q_{\alpha+1}] \leq R_{\alpha-1}.$$

Mit $[A, Q_F] \leq R_{\alpha+1}$ gelten folgende Ungleichungen:

$$[t, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}, A] \leq [Q_F, A] \leq Z_{\alpha+1}$$

$$[A, t, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}] \leq [V_{\alpha+1}, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}] \leq R_{\alpha+1}.$$

Das 3-Untergruppen-Lemma liefert:

$$[A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}, t] \leq R_{\alpha+1}.$$

Weil außerdem $[A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}, Q_{\alpha-1} \cap Q_\alpha] = 1$ ist, folgt, dass $[A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}]R_{\alpha+1}$ unter F invariant gelassen wird. Wegen der Voraussetzung (ii) ist Z_α nicht normal in F. Daher muss $[A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}] = [A, Q_\alpha \cap Q_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha-1}] = 1$ gelten.

Wegen $G_\alpha/Q_\alpha \cong SL_2(p)$, ist $|Q_{\alpha-1}/Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1}| = p$ und daher $|A/C_A(Q_{\alpha-1})| \leq p$. Also gilt $A = Z_\alpha C_A(Q_{\alpha-1})$, und wegen $A \neq Z_\alpha$ gilt zudem $C_A(Q_{\alpha-1}) \neq R_{\alpha-1}$. Es ist $Z_\alpha \leq A \leq [V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]Z_\alpha = V_{\alpha-1}$ und nach der Struktur von $G_{\alpha-1}$ und $V_{\alpha-1}$ gilt $C_{[V_{\alpha-1},E_{\alpha-1}]}(Q_{\alpha-1}) = R_{\alpha-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |C_{V_{\alpha-1}}(Q_{\alpha-1})/R_{\alpha-1}| &= |C_{V_{\alpha-1}}(Q_{\alpha-1})[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]/[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]| \\ &= |C_A(Q_{\alpha-1})[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]/[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]| \\ &= |C_A(Q_{\alpha-1})/R_{\alpha-1}|. \end{aligned}$$

Das liefert $C_A(Q_{\alpha-1}) = C_{V_{\alpha-1}}(Q_{\alpha-1})$ und $A = Z_\alpha C_{V_{\alpha-1}}(Q_{\alpha-1})$.

Sowohl Z_α als auch $C_{V_{\alpha-1}}(Q_{\alpha-1})$ wird von $G_\alpha \cap G_{\alpha'-1}$ normalisiert und damit ganz A. Weil nach Voraussetzung $[A, t] \leq V_{\alpha+1}$ gilt, wird $AV_{\alpha+1}$ von $\langle Q_\alpha, F\rangle \geq E_{\alpha+1}$ normalisiert. Sei nun $V_a^* := [\langle a\rangle V_{\alpha+1}, O_p(E_{\alpha+1})]R_{\alpha+1}$ für alle $a \in A$. Dann gilt analog wie für V_a: $|V_a^*/V_a^* \cap V_{\alpha-1}| \leq p$ und $V_a^* = R_{\alpha+1}$ oder $Z_\alpha \leq V_a^*$. Wäre $Z_\alpha \leq V_a^*$, so gälte $V_a^* = [V_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}]$ wie für V_a und $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha-1}| = p$, was erneut $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}| \geq p^2$ widerspräche. Also ist $V_a^* = R_{\alpha+1}$. Es folgt $[A, O_p(E_{\alpha+1})] \leq R_{\alpha+1}$. Mit Lemma 8.2 (b) folgt $[A, E_\alpha] \leq Z_\alpha$, also $A \leq V_{\alpha+1}$, was der Annahme zu Beginn widerspricht und die Behauptung zeigt. □

Lemma 8.19 *Sei $b > 3$, $t \in V_{\alpha+1} \setminus Q_{\alpha'}$ mit $|[V_{\alpha'}, t]R_{\alpha'}/R_{\alpha'}| = p$ und $[V_{\alpha'}, t] \leq V_{\alpha'-2}$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $p = 2$, $|V_{\alpha'}| = 2^3$ und $r = 1$,

(ii) $p = 2$, $|V_{\alpha'}| = 2^5$, $r = 2$ und $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = 2^3$,

(iii) $p = 3$ und $|V_{\alpha'}| = 3^3$.

Beweis Sei $R := [V_{\alpha'}, t]$. O.B.d.A. gelte $R \leq V_1$. Da $[RZ_{\alpha'-1}, Q_{\alpha'}] \leq R_{\alpha'} \leq Z_{\alpha'-1}$ und $[RZ_{\alpha'-1}, Q_{\alpha'-2}] \leq [V_{\alpha'-2}, Q_{\alpha'-2}] \leq R_{\alpha'-2} \leq Z_{\alpha'-1}$ ist, gilt $[R, \langle Q_{\alpha'-2}, Q_{\alpha'}\rangle] \leq Z_{\alpha'-1}$ und $RZ_{\alpha'-1} \trianglelefteq \langle Q_{\alpha'-2}, Q_{\alpha'}\rangle =: H$. Es ist $H \geq E_{\alpha'-1}$, da $R_{\alpha'} \neq R_{\alpha'-2}$ ist und daher $O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}) \neq O_p(\widetilde{C}_{\alpha'-2})$ nach der Eindeutigkeit von Q in $\widetilde{C}$ (Lemma 5.1). Da nach Lemma 5.3 $Z(G_\alpha) = 1$ ist, gilt $Z(E) = 1$ für $E := \langle Q_{\alpha'}, Q_{\alpha'-2}\rangle$ und damit analog wie in Lemma 8.18: $R \not\leq Z(O_p(E))$

Also existiert ein $w \in O_p(E)$ mit $[w, R]R_{\alpha'} = Z_{\alpha'-1}$. Damit gilt dann aber $Z_{\alpha'-1} \leq V_1V_1^w$, woraus $r \leq 2$ wegen $[E_{\alpha'}, V_1V_1^w] \leq V_1V_1^w$ folgt. Ist $V_1 = V_1^w$, so folgt (i) und (iii). Ist $V_1 \neq V_1^w$, so folgen aus (ii) die ersten beiden Eigenschaften. Wegen $r = 2$ gilt auch $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-1}| \leq 2^3$ und wegen $V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2} \geq Z_{\alpha'-1}R$ gilt zudem $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = 2^3$. □

Lemma 8.20 *Sei $b > 3$, $p = 2$ und $r = 1$.*
Dann gilt $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}| = 2$.

Beweis Sei $\alpha-1 \in \Delta(\alpha)\backslash\{\alpha+1\}$, $R := [V_{\alpha+1}, V_{\alpha'}]$, $R_0 := [V_{\alpha-1}, V_{\alpha'-2}]$. Da $|Z_\alpha| = 4$ ist und 3 unter $G_{\alpha+1}$ Konjugierte von Z_α in $V_{\alpha+1}$ existieren, folgt $|V_{\alpha+1}| \leq 2^4$ und $|[V_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}]| = 2^3$. Also muss nur noch der Fall
(∗) $|V_{\alpha+1}| = 2^4$, $V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1} = Z_\alpha$ und $Z_\alpha \not\leq [V_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}]$
zum Widerspruch geführt werden. Sei dazu zunächst angenommen, dass $R_0 = 1$ gelte. Dann ist

$$V_{\alpha-1} \leq C_{G_{\alpha'-2}}(V_{\alpha'-2}) \leq C_{Q_{\alpha'-2}}) \leq C_{G_{\alpha'-1}}(Z_{\alpha'-1}) \leq Q_{\alpha'-1} \leq G_{\alpha'}.$$

Also ist $[V_{\alpha-1}, R] = 1$ wegen $r = 1$. Es ist daher $[V_{\alpha-1}, V_{\alpha'}] \leq RR_{\alpha'}$. Weil $|V_{\alpha'}/Z_{\alpha'-1}R| = 2$ und $[V_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-1}R] = 1$ ist, existiert ein $A \leq V_{\alpha-1}$ mit $|V_{\alpha-1}/A| = 2$ und $[V_{\alpha'}, E_{\alpha'}, A] = R$.

Sei nun noch angenommen, dass $[V_{\alpha'}, E_{\alpha'}] \leq Q_{\alpha+1}$ ist. Dann ist $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$, da $V_{\alpha'} = [V_{\alpha'}, E_{\alpha'}]Z_{\alpha'-1}$ ist. Also gilt $R = R_{\alpha+1}$ und $E_\alpha \leq \langle Q_{\alpha-1}, [V_{\alpha'}, E_{\alpha'}]\rangle$. Es folgt

$$[A, E_\alpha] \leq [A, Q_{\alpha-1}][A, [V_{\alpha'}, E_{\alpha'}]] \leq R_{\alpha-1}R_{\alpha+1} = Z_\alpha.$$

Daher ist $AV_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}$, was (∗) widerspricht.

Also ist $[V_{\alpha'}, E_{\alpha'}] \not\leq Q_{\alpha+1}$. mit $\varrho := \alpha+3$, $t \in [V_{\alpha'}, E_{\alpha'}]\backslash Q_{\alpha+1}$ und $\varrho^x = \alpha-1$ folgt mit den Bezeichnungen von Lemma 8.18 $A \leq V_{\alpha+1}$, was auch hier (∗) widerspricht. Also ist $R_0 \neq 1$.

Sei zunächst $b = 3$. Dann ist $RZ_{\alpha+2} \leq V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha'}$. Mit (∗) folgt $R \leq Z_{\alpha+1}$, also $Z_{\alpha+2} \leq [V_{\alpha'}, E_{\alpha'}]$, ein Widerspruch zu (∗) mit α' statt $\alpha+1$.

Sei nun also $b \geq 5$. Dann ist $[R_0, V_{\alpha'}] \leq [V_{\alpha'-2}, V_{\alpha'}] = 1$. Es sei angenommen, dass $R_0 \not\leq Z_\alpha$ gilt. Dann gilt $|V_{\alpha-1}/R_0Z_\alpha| = 2$ und $[V_{\alpha'-2}, Z_\alpha R_0] = 1$. Also existiert ein $A \leq V_{\alpha'-2}$ mit $|V_{\alpha'-2}/A| = 2$ und $[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}, A] = R_0$. Wäre $[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}] \leq Q_{\alpha'-2}$, so gälte $R_0 = R_{\alpha'-2}$ und $E_{\alpha'-1} \leq \langle Q_{\alpha'}, [V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]\rangle$. Also folgte $[A, E_{\alpha'-1}] \leq Z_{\alpha'-1}$ und damit $A \leq V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}$, was (∗) widerspräche. Somit ist $[V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}] \not\leq Q_{\alpha'-2}$. Mit den Bezeichnungen $\varrho := \alpha'-4$, $t \in [V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}] \setminus Q_{\alpha'-2}$ und $(\alpha'-4)^x = \alpha'$ folgt aus Lemma 8.18 $A \leq V_{\alpha'-2}$, was wiederum (∗) widerspricht. Es folgt daher $R_0 \leq Z_\alpha$.

Damit folgt $Z_\alpha \leq [V_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}]$ oder $V_{\alpha'-2} \leq Q_{\alpha-1}$ und $R_0 = R_{\alpha-1}$. Der erste Fall widerspricht (∗) mit $\alpha-1$ statt $\alpha+1$. Im zweiten Fall gilt $[Z_\alpha, V_{\alpha'}] \leq$

$[V_{\alpha'-2}, V_{\alpha'}][R_{\alpha+1}, V_{\alpha'}] = 1$ und daher $Z_\alpha \leq Q_{\alpha'}$, was der Definition eines kritischen Paares widerspricht. □

Lemma 8.21 *Sei* $|V_{\alpha+1}/V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}| = p$.

Ist $p = 2$, *so gilt* $b = 3$, $|V_{\alpha+1}| = 2^3$ *und* $r = 1$.

Ist $p = 3$, *so gilt* $b \leq 7$ *und* $|V_{\alpha+1}| = 3^3$.

Beweis Sei $t \in V_{\alpha+1} \setminus Q_{\alpha'}$. Dann ist $[V_{\alpha'}, t] \leq V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2} = C_{V_{\alpha'}}(t)$ wegen $C_{V_{\alpha'}}(t) \neq V_{\alpha'}$. Außerdem ist $|[V_{\alpha'}, t]R_{\alpha'}/R_{\alpha'}| = 2$ nach der Struktur von $G_{\alpha'}$. Mit Lemma 8.19 folgt dort der Fall (i) oder (iii), da (ii) wegen $|V_{\alpha'}/V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = 2$ entfällt. Es bleibt also nur noch $b = 3$ bzw. $b \leq 7$ zu zeigen.

Sei $b > 3$ angenommen. Sei $R := [V_{\alpha'}, Z_\alpha]$. Dann ist $|R| = p$ und $R \leq Z_{\alpha'-1}$, da $|Z_\alpha/C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'})| = p$, $R \leq V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}$ und $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = p^2$ ist. Analog folgt auch $R \leq Z_{\alpha+2}$. Also existiert ein $\varrho \in \Delta(\alpha+1)$ und ein $\varrho' \in \Delta(\alpha'-1)$ mit $R_\varrho = R = R_{\varrho'}$ und $\varrho' \neq \alpha'$.

Sei nun angenommen, dass $b > 7$ ist. Dann ist $U := \langle W_\delta | \delta \in \Delta(\alpha)\rangle$ abelsch, wobei $W_\delta := \langle V_\mu | \mu \in \Gamma \text{ mit } d(\mu, \delta) = 2\rangle$ für $\delta \in (\alpha+1)^G$ ist. Zudem ist $U \leq Q_\varrho$. Sei $D := O_p(\widetilde{C}_\varrho)$. Da $O_p(\widetilde{C}_\varrho) = O_p(\widetilde{C}_{\varrho'})$ ist, gilt $D \leq Q_{\varrho'} \leq Q_{\alpha'-1}$. Also ist $W_{\alpha'-1}$ D-invariant.

Wäre $\varrho \notin \{\alpha+1, \alpha+3\}$, so existierte ein $x \in D$ mit $(\alpha+1)^x = \alpha+3$. Dann wäre $[V_{\alpha+1}^x, W_{\alpha'-1}^x] = [V_{\alpha+3}, W_{\alpha'-1}] = 1$, was ein Widerspruch zu $[Z_\alpha, V_{\alpha'}]$ darstellte. Somit gilt $\varrho \in \{\alpha+1, \alpha+3\}$.

Es ist E_ϱ 2-fach transitiv auf $\Delta(\varrho)$ und $[E_\varrho, Q_\varrho] \leq D$. Da $U \leq Q_\varrho$ ist, wird DW_τ von E_ϱ normalisiert für alle $\tau \in \Delta(\alpha)$, denn es gilt $[E_\varrho, W_\tau] \leq [E_\varrho, Q_\varrho] \leq D$ nach Lemma 5.11. Also ist $DW_\tau = DW_\kappa$ für ein $\kappa \in \Gamma$ mit $\kappa = \tau^x$ für ein $x \in E_\varrho$. Also ist insbesondere $W_\tau \leq DW_\kappa$. Gilt nicht $\varrho = \alpha+1 = \tau$, so ist $d(\kappa, \alpha') \leq b-3$ und daher $W_\tau \leq DW_\kappa \leq G_{\alpha'-1}$. Ist nun $\varrho = \alpha+1 = \tau$, so kann für die V_δ mit $d(\delta, \tau) = 2$ analog gefolgert werden, dass sie sich in $G_{\alpha'-1}$ befinden und daher $U \leq G_{\alpha'-1}$ gilt.

Sei zunächst einmal $U \leq G_{\alpha'}$ angenommen. Dann ist $[U, V_{\alpha'}] \leq RR_{\alpha'}$, da $|V_{\alpha'}| = p^3$ gilt. Somit gilt $[W_\alpha, V_{\alpha'}] = R$ oder $[W_\alpha, V_{\alpha'}] = [U, V_{\alpha'}]$. Ist $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$, so ist $R = R_{\alpha+1} \leq Z_\alpha$. Im ersten Fall folgt damit $V_\nu \trianglelefteq G_\alpha$ für ein $\nu \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha+1\}$, was $O_p(G) = 1$ widerspricht. Im zweiten Fall ist $W_\nu \trianglelefteq G_\alpha$ für ein $\nu \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha+1\}$, weil $R_{\alpha'} \leq W_\alpha \leq W_\nu$ ist. Dies widerspricht ebenfalls $O_p(G) = 1$. Also ist $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$. Hier folgt im ersten Fall $W_\alpha \trianglelefteq G_{\alpha+1}$, da $R \leq W_\alpha$ ist und damit wie eben ein

Widerspruch. Im zweiten Fall ist $U \trianglelefteq G_{\alpha+1}$, weil $R \leq W_\alpha \leq U$ und $R_{\alpha'} \leq W_{\alpha+1} \leq U$ ist, was diesen gesammten Abschnitt zum Widerspruch führt. Es folgt daher $U \not\leq G_{\alpha'}$.

Weil U abelsch, $Z_{\alpha'-1} = R_{\alpha'} \times R_{\alpha'-2}$ und $Q_{\alpha'-1} = C_{G_{\alpha-1}}(Z_{\alpha'-1})$ ist, gilt $R_{\alpha'} \not\leq [W_{\alpha+1} \cap G_{\alpha'}, V_{\alpha'}]$. Es folgt daher $R = [W_\alpha \cap G_{\alpha'}, V_{\alpha'}] = [W_{\alpha+1} \cap G_{\alpha'}, V_{\alpha'}]$. Sei als erstes $W_\alpha \leq G_{\alpha'}$ angenommen. Dann ist $[W_\alpha, V_{\alpha'}] = R \leq V_{\alpha+1} \leq W_\alpha$ und damit $V_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$, da sonst $W_\alpha \trianglelefteq \langle G_\alpha \cap G_{\alpha+1}, V_{\alpha'}\rangle = G_{\alpha+1}$ wäre. Also ist $R = R_{\alpha+1} = [W_\alpha, V_{\alpha'}]$. Aber damit ist $V_\tau \trianglelefteq G_\alpha$ für ein $\tau \in \Delta(\alpha)$. Es gilt daher $W_\alpha \not\leq G_{\alpha'}$.

Es gilt $[W_\alpha, Z_{\alpha'-1}] = R_{\alpha'-2}$ und $Z_{\alpha'-1} \leq Q_\alpha$. Weil $[W_\alpha, Z_{\alpha'-1}] \leq Z_{\alpha'-1} \leq Q_{\alpha'}$ und $[V_\tau, Z_{\alpha'-1}] \leq Z_\alpha$ für alle $\tau \in \Delta(\alpha)$ ist, gilt $[W_\alpha, Z_{\alpha'-1}] \leq Z_\alpha \cap Q_{\alpha'} = R_{\alpha+1}$. Somit ist $R_{\alpha+1} = R_{\alpha'-2}$. Außerdem muss $R = R_{\alpha'-2}$ gelten, da sonst $RR_{\alpha'-2} = Z_{\alpha'-1}$ von W_α zentralisiert würde, also in $G_{\alpha'}$ läge. Somit muss $V_{\alpha'}$ in $C_{G_{\alpha+1}}(V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}) = Q_{\alpha+1}$ liegen. Es ist $[U, V_{\alpha'}] = R = [W_\alpha, V_{\alpha'}]$, weil $R_{\alpha'} \not\leq U$ ist. Letzteres gilt wegen $[U, Z_{\alpha'-1}] \neq 1$. Es folgt daher $[W_\tau, V_{\alpha'}] = [W_\alpha, V_{\alpha'}] \leq W_\alpha \leq W_\tau$ für ein $\tau \in \Delta(\alpha)$ und damit $W_\tau \trianglelefteq G_\alpha = \langle G_\tau \cap G_\alpha, V_{\alpha+1}\rangle$, was erneut $O_p(G) = 1$ widerspricht.

Im Fall $p = 3$ folgt damit die Behauptung und es kann somit $p = 2$ angenommen werden.

Sei zunächst $b = 7$ angenommen. Dann ist $R \leq V_{\alpha+3} \cap V_{\alpha+5} = Z_{\alpha+4}$. Damit existiert ein $\mu \in \Delta(\alpha+4)$ mit $R_\mu = R$. Wäre $\mu \neq \alpha + 3$, so wäre

$$Z_{\alpha+2} = R_\varrho R_{\alpha+3} = RR_{\alpha+3} = R_\mu R_{\alpha+3} = Z_{\alpha+4},$$

was $G_{\alpha+3}/Q_{\alpha+3} \cong SL_2(2)$ und der Operation von $G_{\alpha+3}$ auf seinen Nachbarn widerspräche. Es gilt also $\mu = \alpha + 3$. Analog folgt $\mu = \alpha + 5$. Aber dann gilt $Z_{\alpha+4} = R_{\alpha+3}R_{\alpha+5} = R$, was einen Widerspruch darstellt wegen $|Z_{\alpha+4}| = p^2 \neq p = |R|$.

Es gilt somit $b = 5$ und $R \leq Z_{\alpha+2} \cap Z_{\alpha'-1} = R_{\alpha+3}$ wegen $|\Delta(\alpha+3)| = 3$. Also ist $\varrho = \varrho' = \alpha + 3$.

Es ist $|\Delta(\delta)| = 3$ für alle $\delta \in \Gamma$. Daher ist eine Untergruppe von $G_\delta \cap G_\tau$ für $\tau \in \Delta(\delta)$, die nicht in Q_δ liegt, transitiv auf $\Delta(\delta)\setminus\{\tau\}$. Insbesondere ist $G_{\alpha+1} \cap G_{\alpha+2}$ transitiv auf $\Delta(\alpha+2) \setminus \{\alpha+1\}$, da $Q_{\alpha+2}Q_{\alpha+3} = S_{\alpha+2\alpha+3}$ ist. Nach Lemma 8.2 (c) gilt $Q_{\alpha+2} \cap Q_{\alpha+3} \neq Q_{\alpha+3} \cap Q_{\alpha+4}$. Daher ist $Q_{\alpha+2} \cap Q_{\alpha+3}$ transitiv auf $\Delta(\alpha+4) \setminus \{\alpha+3\}$. Also ist $G_{\alpha+1}$ transitiv auf Wegen der Länge 4 mit Anfangsknoten $\alpha + 1$, und folglich ist G transitiv auf Wegen der Länge 4 mit Startknoten in $(\alpha+1)^G$.

Sei nun $(\alpha+1, \ldots, \alpha+5, \ldots, \alpha+7)$ ein Weg der Länge 6. Dann gilt $V_{\alpha+7} \not\leq Q_{\alpha+3}$

und $[V_{\alpha+3}, V_{\alpha+7}] = R_{\alpha+5}$, wobei letzteres wegen der Transitivität von G auf Wegen der Länge 4 und $[V_{\alpha+1}, V_{\alpha+5}] = R_{\alpha+3}$ gilt. Damit existieren $y \in V_{\alpha+7} \setminus Q_{\alpha+3}$ und $w \in V_{\alpha+1} \setminus Q_{\alpha+5}$, sodass für $z := [y, y^w]$ und $z' := [w, w^y]$ gilt: $z \in [V_{\alpha+7}, V_{\alpha+7}^w] = R_{\alpha+5}$ und $z' \in [V_{\alpha+1}, V_{\alpha+1}^y] = R_{\alpha+3}$.

Es ist $\langle y, w\rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung $2 \cdot |\langle y, y^w\rangle| \leq 16$, da $o(yw) \leq 8$ ist. Es gilt $z = (yw)^4 = (wy)^4 = z'$ wegen $\langle yw\rangle = \langle wy\rangle$. Also ist $z = z' \in R_{\alpha+3} \cap R_{\alpha+5} = 1$ nach Lemma 8.1 (e). Da $V_{\alpha+1} = \langle w\rangle Z_{\alpha+2}$ ist, gilt

$$[V_{\alpha+1}, V_{\alpha+1}^y] = [\langle w\rangle, V_{\alpha+1}^y][Z_{\alpha+2}, V_{\alpha+1}^y] \leq [\langle w\rangle, \langle w^y\rangle][\langle w\rangle, Z_{\alpha+2}^y][V_{\alpha+3}, V_{\alpha+1}^y] \leq 1,$$

was der obigen Aussage $[V_{\alpha+1}, V_{\alpha+1}^y] = R_{\alpha+3}$ widerspricht. Es folgt somit die Behauptung. □

Lemma 8.22 *Sei $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$.*
Ist $p = 2$, so ist $b = 3$.
Ist $p = 3$, so ist $b \leq 7$ und $|V_{\alpha+1}| = 3^3$.

Beweis Angenommen, es gelte $b > 3$ im Fall $p = 2$ und $b > 7$ im Fall $p = 3$. Dann ist W_λ abelsch für alle $\lambda \in \Delta(\alpha+1)$. Da $[W_\lambda, V_{\alpha+1}] = 1$ ist und $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$ gilt, folgt $[W_\lambda, R_{\alpha'}] = 1$. Also ist $[W_\lambda, Z_{\alpha'-1}] = 1$, da nach Lemma 8.1 (e) $Z_{\alpha'-1} = R_{\alpha'-2}R_{\alpha'}$ ist. Es ist daher $W_\lambda \leq C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})$ und nach Lemma 5.9 folgt $W_\lambda \leq G_{\alpha'}$.

Nach dem L-Lemma (Lemma 3.12) existiert ein $\mu \in \Delta(\alpha')$ mit $|W_\alpha/W_\alpha \cap G_\mu| = 2$, $Z_\alpha \not\leq G_\mu$ und $[Z_\alpha, Z_\mu] \neq 1$.

Wäre $Z_\mu \leq G_\alpha$, so folgte $[Z_\alpha, Z_\mu] = R_{\alpha+1}$ und $[W_\alpha, Z_\mu] \leq R_{\alpha+1}R_{\alpha'}$. Sei nun $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha+1\}$. Dann existierte ein $A \leq V_{\alpha-1}$ mit $|V_{\alpha-1}/A| = 2$ und $[A, Z_\mu] = R_{\alpha+1}$. Da $E_\alpha \leq \langle Q_{\alpha-1}, Z_\mu\rangle$ ist, wäre $A \leq V_{\alpha+1}$, was Lemma 8.21 widerspräche.

Also gilt $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$ und $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$. Von dieser Situation wurde aber schon in Lemma 8.11 gezeigt, dass dann $b = 3$ gilt. □

Lemma 8.23 *Sei $R_{\alpha+1} \leq V_{\alpha'}$.*
Ist $p = 2$, so ist $b = 3$.
Ist $p = 3$, so ist $b \leq 7$ und $|V_{\alpha+1}| = 3^3$.

Beweis Es sei angenommen, dass $b > 3$ im Fall $p = 2$ und $b > 7$ im Fall $p = 3$ gelte.

Sei $\overline{G}_\delta := G_\delta/Q_\delta$ für alle $\delta \in \Gamma$. Der Fall $V_{\alpha'} \not\leq G_\alpha$ und $R_{\alpha'} \leq V_{\alpha+1}$ wurde schon behandelt und zu $b = 3$ geführt. Wäre also $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$, so würde mit $(\alpha'+1, \alpha+1)$ statt (α, α') die Behauptung folgen.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $[V_1, Z_\alpha] = R_{\alpha+1}$ ist und damit auch $[V_1, C_{G_{\alpha'}}(Z_\alpha)] \leq R_{\alpha+1}R_{\alpha'}$ gilt. Sei nun $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha+1\}$ und A eine maximale Untergruppe in $V_{\alpha-1}$ bezüglich der Eigenschaft $[A, V_1] \leq R_{\alpha+1}$. Dann wird A/Z_α von V_1 und von $Q_{\alpha-1}$ normalisiert, also auch von $\langle Q_{\alpha-1}, V_1\rangle \geq E_\alpha$. Also folgt $A \leq V_{\alpha+1}$ und damit $A = V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}$. Mit Lemma 8.21 folgt nun $|V_{\alpha-1}/A| \geq 4$. Wegen $[V_1, C_{G_{\alpha'}}(Z_\alpha)] \leq R_{\alpha+1}R_{\alpha'}$ folgt damit $V_{\alpha-1} \not\leq G_{\alpha'}$.

Wäre $V_{\alpha-1} \leq G_{\alpha'-1}$, so folgte $|V_{\alpha-1}/V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'}| = p$ und $[V_{\alpha-1}, R_{\alpha'}] \neq 1$ wegen $Z_{\alpha'-1} = R_{\alpha'}R_{\alpha'-2}$. Es folgte $R_{\alpha'} \not\leq W_\alpha$, da W_α wegen $b > 3$ abelsch ist. Es gälte daher $[V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'}, V_1] = R_{\alpha+1}$, da $[V_1, C_{G_{\alpha'}}(Z_\alpha)] \leq R_{\alpha+1}R_{\alpha'}$ ist. Dies widerspräche jedoch $|V_{\alpha-1}/A| \geq p^2$.

Also gilt $V_{\alpha-1} \not\leq G_{\alpha'-1}$ und somit $V_{\alpha-1} \not\leq Q_{\alpha'-2}$. Also ist $(\alpha-2, \alpha'-2)$ ein kritisches Paar für ein $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha-1)$. Nach Lemma 8.22 folgt $R_{\alpha'-2} \not\leq V_{\alpha-1}$. Da $[Z_\alpha, V_1] = [R_{\alpha-1}, V_1] \neq 1$ und $b \geq 5$ ist, gilt außerdem $R_{\alpha-1} \not\leq V_{\alpha'-2}$ und daher $V_{\alpha'-2} \not\leq Q_{\alpha-1}$. Mit der Anwendung des L-Lemmas (Lemma 3.12) existiert ein $\varrho \in \Delta(\alpha'-2)$ mit $|V_{\alpha-1}/V_{\alpha-1} \cap G_\varrho| = p$, und es ist $[V_{\alpha-1} \cap G_\varrho, Z_\varrho] = 1$, da $R_{\alpha'-2} \not\leq V_{\alpha-1}$ ist. Somit gilt $|[V_{\alpha-1}, t]R_{\alpha-1}/R_{\alpha-1}| = p$ für ein $t \in Z_\varrho \setminus R_{\alpha'-2}$. Zudem ist $W_{\alpha'-1}$ abelsch, da $b > 3$ ist. Es ist daher $[V_{\alpha-1}, Z_\varrho, V_1] = 1$. Es folgt

$$[V_{\alpha-1}, Z_\varrho] \leq C_{V_{\alpha-1}}(V_1) \leq A \leq V_{\alpha+1}.$$

Mit Lemma 8.19 gilt nun $p = 2$, $r = 2$, $|V_{\alpha-1}| = 2^5$ und $|A| = 2^3$, weil der erste und dritte Fall wegen $|V_{\alpha-1}| \geq p^2|A| \geq p^4 > p^3$ nicht eintreten kann.

Wenn man diese Eigenschaften auf $G_{\alpha'}$ anwendet, erhält man $R_{\alpha+1} \leq V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}$, da $A/R_{\alpha+1} = C_{V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}}(\overline{Q}_{\alpha+2})$ gilt. Es ist $R_{\alpha+1} \not\leq Z_{\alpha'-1}$, da $r = 2$ ist, und daher gilt $R_{\alpha+1} \not\leq Z(Q_{\alpha'-1})$, also $[R_{\alpha+1}, Q_{\alpha'-1}] = Z_{\alpha'-1}$, weil dies die einzige $G_{\alpha'-1}$-invariante Untergruppe ungleich 1 von $Z_{\alpha'-1}$ ist. Somit operiert $G_{\alpha'-1}$ auf $R_{\alpha+1}Z_{\alpha'-1} \setminus Z_{\alpha'-1}$ und $Q_{\alpha'-1}$ operiert transitiv darauf. Es folgt mit dem Frattini-Argument: $G_{\alpha'-1} = C_{G_{\alpha'-1}}(x)Q_{\alpha'-1} = C_{G_{\alpha'-1}}(R_{\alpha+1})Q_{\alpha'-1}$ mit $1 \neq x \in R_{\alpha+1}$. Somit ist $E_{\alpha'-1} \geq C_{G_{\alpha'-1}}(R_{\alpha+1})$ und daher existiert ein $y \in C_{G_{\alpha'-1}}(R_{\alpha+1})$ mit $(\alpha')^y = \alpha' - 2$.

Sei $X := N_{G_{\alpha'}}(R_{\alpha+1}R_{\alpha'})$. Wegen $r = 2$ folgt $\overline{X} \cong SL_2(2) \times C_2$ und $X \cap G_{\alpha'-1} \in Syl_2(X)$. Nun hat auch X^y die gleichen Eigenschaften wie X in $\alpha' - 2$ statt α'. Deswegen, und weil $V_{\alpha-1} \leq X$ ist, folgt $|V_{\alpha-1}/V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}| = 2$. Andererseits ist $V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1} \leq Q_{\alpha'-1}$, denn es gilt $R_{\alpha'-2} \not\leq V_{\alpha-1}$. Es ist $[R_{\alpha'}, V_{\alpha-1}] \neq 1$ und daher gilt $[V_{\alpha-1} \cap Q_{\alpha'-1}, V_1] = R_{\alpha+1}$. Es folgt $|V_{\alpha-1}/A| = 2$, was dem zuvor Gezeigten

$|V_{\alpha-1}/A| \geq p^2$ widerspricht. Es folgt daher $b = 3$. □

Lemma 8.24 *Ist $p = 2$, so ist $b = 3$.*
Ist $p = 3$, so ist $b \leq 7$ und $|V_{\alpha+1}| = 3^3$.

Beweis Es sei $b > 3$ für $p = 2$ bzw. $b > 7$ für $p = 3$ angenommen. Aus den Lemmata 8.22 und 8.23 folgt, dass $R_{\alpha+1} \not\leq V_{\alpha'}$ und $R_{\alpha'} \not\leq V_{\alpha+1}$ ist. Insbesondere ist dann $V_{\alpha'} \not\leq Q_{\alpha+1}$.

Sei $\mu \in \Delta(\alpha')$ mit $V_{\alpha+1} \not\leq G_\mu$. Dann ist $\langle G_\mu \cap G_{\alpha'}, V_{\alpha+1}\rangle = G_{\alpha'}$ und $[Z_\mu, V_{\alpha+1}] \neq 1$, da Z_μ nicht normal in $G_{\alpha'}$ ist. Aber wegen $R_{\alpha'} \not\leq V_{\alpha+1}$ ist $[V_{\alpha+1} \cap G_\mu, Z_\mu] = 1$. Weil $R_{\alpha+1} \not\leq V_{\alpha'}$ gilt, ist $[Z_\mu, V_{\alpha+1}] \not\leq R_{\alpha+1}$, und damit ist $(\mu, \alpha+1)$ ein kritisches Paar.

Sei $R := [Z_\alpha, V_{\alpha'}]$. Dann gilt o.B.d.A. $R \leq V_1$. Damit ist $Z_\alpha \leq K_1$ und es existiert ein $k \in E_{\alpha'}$ mit $K_1 = \langle Z_\alpha, Z_\alpha^k\rangle Q_{\alpha'}$. Es gilt daher $Z_\mu = Z_{\alpha'-1}^k \leq V_1 Z_{\alpha'-1}$. Sei $x \in E_{\alpha+1}$ mit $(\alpha+2)^x = \alpha$. Setze $\alpha - 1 := (\alpha+3)^x$. Zu beachten ist hierbei, dass $R_{\alpha+1} \neq R_{\alpha-1}$ ist, denn es ist $(\mu, \alpha+1)$ ein kritisches Paar und damit nach Lemma 8.1 (e) $R_{\alpha+1} \neq R_{\alpha+3}$, also auch ${}_{\alpha+1} \neq R_{\alpha-1}$.

Unter der Annahme $[V_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-1}] = 1$ folgt $V_{\alpha-1} \leq C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})$ und damit $[V_{\alpha'-1}, E_{\alpha'-2}] \leq Q_{\alpha'-1}$ mit Lemma 5.9 (b). Also gilt $V_{\alpha-1} \leq G_{\alpha'-1}$. Somit gilt $[V_{\alpha-1}, Z_\mu] \leq [V_{\alpha-1}, V_1 Z_{\alpha'-1}] = [V_{\alpha-1}, V_1] \leq R R_{\alpha'}$. Also existiert ein $A \leq V_{\alpha-1}$ mit $|V_{\alpha-1}/A| = 2$ und $[A, Z_\mu] \leq R$. Mit Lemma 8.18 folgt $A \leq V_{\alpha+1}$, was aber einen Widerspruch zu Lemma 8.21 in Verbindung zu der Annahme $b > 3$ bzw. $b > 7$ darstellt.

Damit folgt $[V_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-1}] \neq 1$. Es gibt die beiden Fälle, dass entweder $Z_{\alpha'-1} \leq Q_{\alpha-1}$ oder $(\alpha'-1, \alpha-1)$ ein kritisches Paar ist. Im ersten Fall wäre $R_{\alpha-1} \leq V_{\alpha'-2}$, also

$$Z_\alpha = R_{\alpha+1} R_{\alpha-1} \leq V_{\alpha'-2} Q_{\alpha'} \leq Q_{\alpha'},$$

da $b \geq 5$ ist. Da dann (α, α') kein kritisches Paar wäre, folgt: $(\alpha'-1, \alpha-1)$ ist ein kritisches Paar.

Sei nun $R_0 := [V_{\alpha-1}, Z_{\alpha'-1}]$. Nach Lemma 8.18 gilt $R_0 \leq V_{\alpha-1} \cap V_{\alpha+1}$. Also kann ggf. durch Ersetzung von (α, α') durch $(\alpha'-1, \alpha-1)$ angenommen werden, dass $R \leq V_{\alpha'-2} \cap V_{\alpha'}$ gilt. Mit den Lemmata 8.19 und 8.21 folgt im Fall $p = 3$ ein Widerspruch. Im Fall $p = 2$ folgt mit denselben Lemmata und zusätzlich mit Lemma 8.20 und Lemma 8.3, dass $r = 2$, $|V_{\alpha'}| = 2^5$ und $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = 2^3$ gilt.

Nun existiert wie in Lemma 8.23 ein $y \in C_{G_{\alpha'-1}}(R)$ mit $(\alpha')^y = \alpha' - 2$. Sei $X := N_{G_{\alpha'}}(RR_{\alpha'})$. Ebenfalls analog wie in Lemma 8.23 folgt mit der Zerlegung des Moduls $V_{\alpha'}/R_{\alpha'}$: $X/Q_{\alpha'} \cong SL_2(2) \times C_2$ und $X \cap G_{\alpha'-1} \in Syl_2(X)$. Die gleichen Eigenschaften wie X hat X^y mit $\alpha' - 2$ statt α'. Weil $b > 3$ und $W_{\alpha+1} \leq G_{\alpha'-2}$ ist, gilt $W_{\alpha+1} \leq X^y$. Es folgt $|W_{\alpha+1}/W_{\alpha+1} \cap G_{\alpha'-1}| = 2$, weil $V_{\alpha-1} \not\leq Q_{\alpha'-2}$ ist.

Sei zunächst $b > 5$ angenommen. Dann ist $W_{\alpha+1}$ abelsch. Es ist $|V_{\alpha-1}/V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}| \leq 2$ und, weil $(\alpha'-1, \alpha-1)$ ein kritisches Paar ist, folgt mit Lemma 8.22, dass $R_{\alpha'-2} \not\leq R_0$ ist, also $V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1} \leq Q_{\alpha'-1} \leq G_{\alpha'}$. Somit gilt

$$[V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}, Z_\mu] = [V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}, V_1] \leq RR_{\alpha'}$$

wegen $Z_\mu \leq V_1 Z_{\alpha'-1}$. Sei $R_{\alpha'} \leq [V_{\alpha 1} \cap G_{\alpha'-1}, Z_\mu]$ angenommen. Dann gilt $R_{\alpha'} \leq W_{\alpha+1}$ und $[R_{\alpha'}, V_{\alpha-1}] = 1$. Mit der Struktur von $G_{\alpha'-2}$ folgt $V_{\alpha-1} \leq C_{G_{\alpha'-2}}(Z_{\alpha'-1})$, also mit Lemma 5.9 $V_{\alpha-1} \leq G_{\alpha'}$. Folglich existiert ein $A \leq V_{\alpha-1}$ mit $[A, Z_\mu] \leq R$ und $|V_{\alpha-1}/A| = 2$. Sei nun andererseits $R_{\alpha'} \not\leq [V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}, Z_\mu]$. Dann gilt für $A := V_{\alpha-1} \cap G_{\alpha'-1}$ das gleiche wie in dem anderen Fall. In beiden Fällen liefert jetzt Lemma 8.18 $A \leq V_{\alpha+1}$, was Lemma 8.21 widerspricht. Es folgt $b = 5$.

Aufgrund der Struktur von $G_{\alpha+1}$ existiert ein $\lambda \in \Delta(\alpha+1)$ mit $\langle G_\lambda \cap G_{\alpha+1}, Z_\mu \rangle = G_{\alpha+1}$ und $V_\varrho \cap V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3} = R_{\alpha+1}$ für jedes $\varrho \in \Delta(\lambda) \setminus \{\alpha+1\}$. Sei $\varrho \in \Delta(\lambda) \setminus \{\alpha+1\}$. Dann ist $[V_\varrho, V_{\alpha+3}] \leq V_\varrho \cap V_{\alpha+3} \cap V_{\alpha+1} = R_{\alpha+1}$ und die Struktur von $G_{\alpha+1}$ zusammen mit der Wahl von λ liefert $[V_\varrho, V_{\alpha+3}] = 1$. Also ist $W_\lambda \leq C_{G_{\alpha+3}}(Z_{\alpha+4})$ und damit gilt nach Lemma 5.9 $W_\lambda \leq G_{\alpha'}$. Weil $Z_\mu \leq V_1 Z_{\alpha'-1}$ ist, folgt

$$[W_\lambda, Z_\mu] \leq [W_\lambda, Z_{\alpha'-1}][W_\lambda, V_1] = [W_\lambda, V_1] \leq RR_{\alpha'}.$$

Sei $Q_E := O_2(E_{\alpha+1})$ und $Q_0 := C_{Q_{\alpha+2}}(V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3})$. Es gilt $|Q_{\alpha+2}/Q_0| = 4$ und $Q_{\alpha+2} = [Q_{\alpha+2}, E_{\alpha+2}]Q_0$, weil $[V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}, Q_{\alpha+2}] = Z_{\alpha+2}$ ist. Mit Lemma 8.2 (b) gilt $[Q_E, Q_{\alpha+2}] \not\leq Q_0$, also insbesondere $[Q_E \cap Q_{\alpha+2}, V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}] \neq 1$. Wegen $[W_{\alpha+1}, V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}] = 1$ und der Tatsache, dass $V_{\alpha-1} \not\leq Q_{\alpha+3}$ ist - denn mit $(\alpha'-1, \alpha-1)$ ist auch $(\alpha-2, \alpha'-2)$ ein kritisches Paar für ein $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha-1)$ - folgt, dass in mindestens einer $SL_2(2)$ von denen in $G_{\alpha+3}$ ein nicht-trivialer Anteil in $Q_E \cap Q_{\alpha+2}$ existiert. Wegen $[Q_E \cap Q_{\alpha+2}, V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}] \neq 1$ folgt aber die Existenz eines Anteils in der C_2, also insgesamt $(Q_E \cap Q_{\alpha+2})Q_{\alpha+3} = G_{\alpha+2} \cap G_{\alpha+3}$.

Sei $D \trianglelefteq G_{\alpha+1}$ die größte Untergruppe mit $D \leq W_{\alpha+1}$ und $[D, E_{\alpha+1}] \leq V_{\alpha+1}$. Dann gilt nach der Operation von $E_{\alpha+1}$ auf D: $(D \cap V_{\alpha-1})V_{\alpha+1} = (D \cap V_{\alpha+3})V_{\alpha+1}$. Somit folgt

$$[(D \cap V_{\alpha-1})V_{\alpha+1}, Z_\mu] = [(D \cap V_{\alpha+3})V_{\alpha+1}, Z_\mu] \leq R,$$

also $R \leq D$. Für $A := D \cap V_{\alpha-1}$ folgt $D \cap V_{\alpha-1} \leq V_{\alpha+1}$ mit Lemma 8.18.

Sei nun $W := [W_{\alpha+1}, Q_E]D$. Sei $W \leq D$ angenommen. Dann folgt mit $D \cap V_{\alpha-1} \leq V_{\alpha+1}$, dass $[V_{\alpha+3}, Q_E \cap Q_{\alpha+2}] \leq V_{\alpha+1} \cap V_{\alpha+3}$ ist. Wegen $(Q_E \cap Q_{\alpha+2})Q_{\alpha+3} = G_{\alpha+2} \cap G_{\alpha+3}$ muss aber $[V_{\alpha+3}, Q_E \cap Q_{\alpha+2}]/R_{\alpha+3}$ eine volle Diagonale in $V_{\alpha+3}/R_{\alpha+3}$ sein, was aber nach der Struktur von $G_{\alpha+3}$ nicht der Fall ist. Also folgt $W \not\leq D$ und damit $W \cap V_{\alpha+3} \not\leq V_{\alpha+1}$ wegen der Maximalität von D.

Angenommen, es gälte $R_{\alpha'} \leq W$. Wegen $[W_\lambda, Z_\mu] \leq RR_{\alpha'}$ ist $[W_\lambda, Z_\mu] \leq W$ und daher $W_{\alpha+1} = W_\lambda W$ und $W_{\alpha+1} = W_{\alpha+2}W$. Weil $b = 5$ ist, gilt

$$[W_\lambda, Z_\mu] \leq [W, Z_\mu][W_{\alpha+2}, Z_\mu] \leq R[W_{\alpha+2}, V_1 Z_{\alpha'-1}] = R[W_{\alpha+2}, V_1] \leq RR = R.$$

Also ist $[W_{\alpha+1}, Z_\mu] \leq \langle R^{G_{\alpha+1}} \rangle \leq V_{\alpha+1}$ und

$$[W_{\alpha+1}, Q_E] \leq [W_{\alpha+1} O_p(\langle Z_\mu^{G_{\alpha+1}} \rangle)] \leq V_{\alpha+1} \leq Q_{\alpha+3}.$$

Andererseits ist $V_{\alpha-1} \not\leq Q_{\alpha'-2} = Q_{\alpha+3}$, weil $(\alpha'-1, \alpha-1)$ ein kritisches Paar ist und nach den Lemmata 8.22 und 8.23 $(\alpha-2, \alpha'-2)$ ebenfalls ein kritisches Paar ist für ein $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha-1) \setminus \{\alpha\}$. Wegen $(Q_E \cap Q_{\alpha+2})Q_{\alpha+3} = G_{\alpha+2} \cap G_{\alpha+3}$ gilt $[V_{\alpha-1}, Q_E \cap Q_{\alpha+2}] \not\leq Q_{\alpha+3}$, ein Widerspruch.

Also gilt $R_{\alpha'} \not\leq W$. Dann folgt

$$[(W_\lambda \cap W)D, Z_\mu] \leq RV_{\alpha+1} \leq (W_\lambda \cap W)D$$

und

$$[(W_\lambda \cap W)D, G_\lambda \cap G_{\alpha+1}] \leq (W_\lambda \cap W)D.$$

Daher ist $(W_\lambda \cap W)D \trianglelefteq G_{\alpha+1}$. Es gilt $[(W_\lambda \cap W)D, Z_\mu] \leq V_{\alpha+1}$ und damit $[(W_\lambda \cap W)D, E_{\alpha+1}] \leq V_{\alpha+1}$. Somit ist $W_\lambda \cap W \leq D$, also auch $W_\alpha \cap W \leq D$ und folglich $V_{\alpha-1} \cap W \leq D$. Es folgt $V_{\alpha-1} \cap W \leq V_{\alpha-1} \cap D \leq V_{\alpha+1}$ und damit $V_{\alpha+3} \cap W \leq V_{\alpha+1}$, weil $G_{\alpha+1}$ aufgrund seiner Struktur noch transitiv auf $\Delta(\Delta(\alpha+1)) \setminus \{\alpha+1\}$ ist. Mit diesem Widerspruch folgt die Behauptung. □

Im Folgenden wird noch der Fall $p = 3$ und $5 \leq b \leq 7$ behandelt. Das Ziel hierbei wird sein, zu zeigen, dass P und $\widetilde{P}$ ein schwaches BN-Paar vom Rang 2 bilden.

Lemma 8.25 *Ist $b = 7$, so ist $R_{\alpha+3} = R_{\alpha+5}$.*

Beweis Sei $R := [V_{\alpha'}, Z_\alpha]$. Dann ist $|R| = p$ und $R \le Z_{\alpha'-1}$, da $|Z_\alpha / C_{Z_\alpha}(V_{\alpha'})| = p$, $R \le V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}$ und $|V_{\alpha'} \cap V_{\alpha'-2}| = p^2$ ist. Analog folgt auch $R \le Z_{\alpha+2}$. Also existiert ein $\varrho \in \Delta(\alpha+1)$ und ein $\varrho' \in \Delta(\alpha'-1)$ mit $R_\varrho = R = R_{\varrho'}$ und $\varrho' \ne \alpha'$.

Sei $R_{\alpha+3} \ne R_{\alpha+5}$ angenommen. Es ist $R \le V_{\alpha+3} \cap V_{\alpha+5} = Z_{\alpha+4}$. Damit existiert ein $\mu \in \Delta(\alpha+4)$ mit $R_\mu = R$. Sei zunächst der Fall $\mu = \alpha+3$ betrachtet. Dann gilt

$$Z_{\alpha+2} = R_\varrho R_{\alpha+3} = R R_{\alpha+3} = R_\mu R_{\alpha+3} = Z_{\alpha+4}.$$

Dann muß aber auch $E_{\alpha+2} = E_{\alpha+4}$ sein wegen $G_{\alpha+3}/Q_{\alpha+3} \cong SL_2(3)$, und weil $M \le N_G(O^p(P))$ ist (Lemma 5.18). Weil $G_{\alpha+3}$ und $G_{\alpha+5}$ unter $E_{\alpha+4}$ und auch $G_{\alpha+5}$ und $G_{\alpha+7}$ unter $E_{\alpha+6} = E_{\alpha+4}$ konjugiert sind, sind auch $G_{\alpha+3}$ und $G_{\alpha+7}$ unter $E_{\alpha+4}$ konjugiert. Damit existiert ein $\delta \in \Delta(\alpha+4)$ mit $G_\delta = G_{\alpha+7}$. Da nun aber $d(\delta, \alpha) \le b-2$ gilt, folgt $Z_\alpha \le Q_\delta = Q_{\alpha+7}$, ein Widerspruch.

Sei nun $\mu \ne \alpha+3$. In diesem Fall gilt

$$Z_{\alpha+2} = R_\varrho R_{\alpha+3} = R_\mu R_{\alpha+3} = Z_{\alpha+4}.$$

Daher folgt jetzt analog wie oben, dass $E_{\alpha+2} = E_{\alpha+4}$ ist. Es sind $G_{\alpha+1}$ und $G_{\alpha+3}$ unter $E_{\alpha+2} = E_{\alpha+4}$ und $G_{\alpha+3}$ und $G_{\alpha+5}$ unter $E_{\alpha+4}$ konjugiert. Daher sind $G_{\alpha+1}$ und $G_{\alpha+5}$ unter $E_{\alpha+4}$ konjugiert und es ist $G_{\alpha+1} = G_\delta$ für ein $\delta \in \Delta(\alpha+4)$. Nun ist $Z_\alpha = Z^x_{\alpha+2}$ für ein $x \in G_{\alpha+1} = G_\delta$, also ist $Z_\alpha = Z^x_{\alpha+2} = Z^x_{\alpha+4} = Z'_\delta$ für ein $\delta' \in \Delta(\delta)$. Weil aber $d(\delta', \alpha') \le b-2$ ist, folgt nun $Z_\alpha = Z_{\delta'} \le Q_{\alpha'}$, ein Widerspruch. Es folgt somit $R_{\alpha+3} = R_{\alpha+5}$. □

Für $\delta \in (\alpha+1)^G$ sei $Y_\delta := \langle Z_\beta^{\widetilde{C}_{\alpha+1}} \rangle$ für ein beliebiges $\beta \in \Delta(\delta)$.

Lemma 8.26 *Es gilt* $O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}) = C_{\widetilde{C}_{\alpha+1}}(Y_{\alpha+1}/R_{\alpha+1})$.

Beweis Weil $O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}) \le C_{\widetilde{C}_{\alpha+1}}(Y_{\alpha+1}/R_{\alpha+1})$ ist, reicht es zu zeigen, dass $C_G(V_{\alpha+1})$ eine p-Gruppe ist.

Sei $E := O^p(C_G(Y_{\alpha+1}))$. Es ist $[E, E_\alpha] \le EQ_\alpha$, da $E \le C_G(Z_\alpha)$ ist und Lemma 5.9 (b) gilt. Außerdem gilt $E = O^p(EQ_\alpha)$, weil E von Q_α normalisiert wird. Damit gilt $[E, E_\alpha] = [O^p(EQ_\alpha), E_\alpha] \le O^p(EQ_\alpha) = E$. Also ist $E \trianglelefteq \langle E_\alpha, G_{\alpha+1} \rangle = G$. Somit muss wegen $O_p(G) = 1$ auch $O_p(E) = 1$ gelten. Dieses widerspricht jedoch der Tatsache, dass $C_G(Y_{\alpha+1}) \le C_{\alpha+1}$ ist und $C_{\alpha+1}$ lokale Charakteristik p hat, denn es ist $[E, O_p(C_{\alpha+1})] \le E \cap O_p(C_{\alpha+1}) = 1$. □

Lemma 8.27 *Sei $p = 3$, $5 \leq b \leq 7$ und, falls $b = 7$ ist, $R_{\alpha+3} = R_{\alpha+5}$ und $|V_{\alpha+1}| = 3^3$. Dann ist $V_{\alpha+1}$ $N_{G_{\alpha+2}}(S_{\alpha+1\alpha+2})$-invariant.*

Beweis Sei $t_{\alpha+1} \in G_{\alpha+1}$, sodass $t_{\alpha+1}Q_{\alpha+1}$ die zentrale Involution in $G_{\alpha+1}/Q_{\alpha+1}$ ist. Analog sei $t_{\alpha+1}$ in $G_{\alpha+1}$ definitiert. Nach Konjugation mit $Q_{\alpha+2}$ kann angenommen werden, dass $\langle t_{\alpha+2}, t_{\alpha+1}\rangle$ eine Kleinsche Vierergruppe ist.

Sei $\overline{C}_{\alpha+1} := \widetilde{C}_{\alpha+1}/O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1})$ und $\overline{Y}_{\alpha+1} := Y_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}$.

Da $Y := Y_{\alpha+1}$ nicht abelsch ist, gilt insbesondere $[Y, Z_{\alpha+2}] \neq 1$ und damit $Y \not\leq Q_{\alpha+2}$ wegen $Y = \langle Z_{\alpha+2}^{\widetilde{C}_{\alpha+1}}\rangle$. Weil $b \geq 5$ ist, ist $W := W_{\alpha+2}$ abelsch. Es ist $Y \leq G_{\alpha+2}$ und daher gilt $[Y, W, W] \leq [W, W] = 1$. Andererseits ist $[W, Y, Y] \leq [Y, Y] \leq R_{\alpha+1}$, weil $[O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}), Z_{\alpha 2}] = R_{\alpha+1}$ gilt. Also operiert W quadratisch auf Y und Y quadratisch auf $\widetilde{W} := W/Z_{\alpha+2}$. Es ist $O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}) = C_{\widetilde{C}_{\alpha+1}}(Y)$ nach Lemma 8.26. Wäre $[\overline{W}, Y] = 1$, so wäre $Y \leq C_{G_{\alpha+2}}(\widetilde{W}) = Q_{\alpha+2}$, was $Y \not\leq Q_{\alpha+2}$ widerspräche. Mit Lemma 4.2 folgt nun:

$$\overline{Y} = \langle C_{\overline{Y}}(A) \,|\, |\overline{W}/\overline{A}| = p\rangle.$$

Weil $Y \not\leq Q_{\alpha+2}$ gilt, existiert somit ein $A \leq W$ und ein $X \leq Y$ mit $|W/A| = p$, $[X, A] \leq R_{\alpha+1}$ und $X \not\leq Q_{\alpha+2}$. Weil $G_{\alpha+2}$ von X, X^g und $Q_{\alpha+2}$ für ein $g \in G_{\alpha+2}$ erzeugt wird und X und X^g jeweils eine Untergruppe vom Index p zentralisieren, zentralisiert $K := \langle X, X^g\rangle$ eine Untergruppe vom Index p^2. Es ist also $|[\widetilde{W}, K]| = p^2$. Es folgt $|[\widetilde{V}_{\alpha+1}, K]| \leq p^2$. Weil $\widetilde{W}_{\alpha+2} = \langle \widetilde{V}_{\alpha+1}^K\rangle = \widetilde{V}_{\alpha+1}[\widetilde{V}_{\alpha+1}, K]$ gilt, folgt $|\widetilde{W}| \leq p^3$. Also gilt $|W| \leq p^5$. Wäre $|\widetilde{W}| = p^2$, so wäre $\widetilde{W}$ ein natürlicher Modul für $G_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}$. Also invertierte $t_{\alpha+2}$ jedes Element und insbesondere würde $V_{\alpha+1}$ von $t_{\alpha+2}$ normalisiert.

Also gilt $|\widetilde{W}| = p^3$ und damit $\widetilde{W} = R \times N$, wobei N ein natürlicher Modul für $G_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}$, $|R| = p$ ist und R von $G_{\alpha+2}/Q_{\alpha+2}$ zentralisiert wird. Sei nun $Y_0 := [Y, t_{\alpha+1}]$. Es wird $\overline{V}_{\alpha+1}$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert, also auch $\widetilde{V}_{\alpha+1}$ und normalisiert $\widetilde{W}$, also auch R. Als drittes wird $[\widetilde{W}, X]$ von $t_{\alpha+1}$ normalisiert. Dies sind drei verschiedene Untergruppen der Ordnung p in $\widetilde{W \cap Y}$. Also wird $\widetilde{W \cap Y}$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert und somit auch $\overline{W \cap Y}$, weil $Z_{\alpha+2}/R_{\alpha+1}$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert wird. Es gilt $|\overline{W \cap Y}| = p^3$, weil $|\widetilde{W \cap Y}| = p^2$ gilt. Da $\overline{W \cap Y}$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert wird, folgt $\overline{W \cap Y} \leq [\overline{Y}, t_{\alpha+1}] = \overline{Y}_0$. Weil zudem $Y/Y \cap Q_{\alpha+2}$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert wird, gilt $Y_0 \not\leq Q_{\alpha+2}$. Daher ist $[Y_0, W] \not\leq Z_{\alpha+2}$. Da $|[Y_0, \widetilde{W}]| = p$ ist, folgt $|[\overline{Y}_0, W]| = p$ oder $\overline{Z}_{\alpha+2} \leq [\overline{Y}_0, W]$ und $|[\overline{Y}_0, W]| = p^2$.

Es ist $W \leq Q_{\alpha+1}$, weil $b \geq 5$ ist, und $[Q_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}] \leq O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1})$ nach Lemma 5.11. Also ist $[\overline{Y}, W]$ $E_{\alpha+1}$-invariant. Wäre $|[\overline{Y}_0, W]| = p$, so zentralisierten die p-Sylowuntergruppen $[\overline{Y}_0, W]$, weil es unter diesen invariant gelassen wird. Also wird $[\overline{Y}_0, W]$ von ganz $\langle Syl_p(G_{\alpha+1})\rangle = G_{\alpha+1}$ zentralisiert, was der Tatsache, dass $\overline{Y}_0$ von $t_{\alpha+1}$ invertiert wird, widerspricht. Also ist $|[\overline{Y}_0, W]| = p^2$ und damit gilt $[Y_0, W] = V_{\alpha+1}$, weil $\overline{Z}_{\alpha+2} \leq [\overline{Y}_0, W]$ ist und $[\overline{Y}_0, W]$ $G_{\alpha+1}$-invariant ist. Es folgt $\widetilde{V}_{\alpha+1} \leq N$ und damit $\widetilde{W} = N$, ein Widerspruch zu $R \neq 1$.

Sei nun Y abelsch. Dann gilt $Y \leq C_{G_{\alpha+2}}(Z_{\alpha+2}) = Q_{\alpha+2}$. Daher ist $[Y, W] \leq Z_{\alpha+2}$. Analog zum ersten Fall ist $[\overline{Y}, W]$ $E_{\alpha+1}$-invariant. Weil $E_{\alpha+1}$ nicht $Z_{\alpha+2}$ normalisiert, folgt $[\overline{Y}, W] = 1$ und damit $[Y, W] \leq R_{\alpha+1}$ und $W \leq O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1})$. Sei $\delta \in \Delta(\alpha+2)$ mit $Z_{\alpha+2} = R_{\alpha+1}R_\delta$ und T_δ so, dass $\langle t_{\alpha+2}, t_\delta\rangle$ eine Kleinsche Vierergruppe ist.

Sei $Y \not\leq Q_\delta$ angenommen. Dann ist $[V_\delta, Y] = R_{\alpha+1}$ und $R_{\alpha+1} \neq R_\delta$. Insbesondere ist $Y \not\leq O_p(\widetilde{C}_\delta)$. Es operiert Y quadratisch auf Y_δ/R_δ und Y_δ operiert quadratisch auf $\overline{Y}$. Daher existiert nun wie zuvor ein $X \leq Y$ und $A \leq Y_\delta$ mit $|Y_\delta/A| = p$, $[X, A] \leq R_{\alpha+1}$ und $X \not\leq Q_\delta$.

Sei $Y_1 := [Y_\delta, t_\delta]$ und $Y_0 := [Y, t_{\alpha+1}]$. Wäre $|\overline{Y}_1| = p^2$, so wäre $Y_1 = V_\delta$ und daher V_δ $t_{\alpha+2}$-invariant. Also ist $|\overline{Y}_1| = p^4$, weil G_δ von X, X^g und Q_δ für ein $g \in G_\delta$ erzeugt wird und X in Y_δ/R_δ eine Gruppe vom Index höchstens p^2 zentralisiert, also $\langle X, X^g\rangle$ eine Gruppe vom Index höchstens p^4.

Sei $Y_1^* := Y_1$, falls $[Y_1, Q_\delta] \leq R_{\alpha+1}$, und ansonsten $Y_1^* := [Y_1, Q_\delta]$. Sei $R_1 := [Y, Y_1^*]$. Dann ist $[R_1Z_{\alpha+2}, Q_{\alpha+2}] \leq R_1Z_{\alpha+2}$, $[R_1Z_{\alpha+2}, O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1})] \leq R_1Z_{\alpha+2}$ und $[R_1Z_{\alpha+2}, O_p(\widetilde{C}_\delta)] \leq R_1Z_{\alpha+2}$. Also wird $R_1Z_{\alpha+2}$ von ganz $G_{\alpha+2}$ normalisiert. Weil $[R_1, Q_{\alpha+2}] \leq Z_{\alpha+2}$ ist, folgt daher $[R_1, Q_{\alpha+2}] = 1$ oder $[R_1, Q_{\alpha+2}] = Z_{\alpha+2}$. Im ersten Fall ist $R_1 \leq Z_{\alpha+2}$. Sei zuerst $Y_1 = Y_1^*$. Auf $\overline{Y}_\delta/\overline{Y}_1$ operiert E_δ wie eine zyklische Gruppe der Ordnung 4, da $\overline{Y}_\delta/\overline{Y}_1$ sowohl von Q_δ als auch von t_δ zentralisiert wird. Aber damit gilt $[\overline{Y}_\delta/\overline{Y}_1, E_\delta] = 1$, also $\overline{Y}_1 = [\overline{Y}_\delta, E_\delta]$. Sei nun $y \in Y \setminus Q_\delta$ derart, dass $\langle y\rangle$ $t_{\alpha+2}$-invariant ist. Dann ist $E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}} = [E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}, y]$ und $Z(E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}) = \langle t_\delta\rangle$ zyklisch. Mit Lemma 4.3 folgt $E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}/C_{E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}}(\overline{Y}_1) \cong Q_8$. Weil $C_{E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}}(\overline{Y}_1) = C_{E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}}(\overline{Y}_\delta)$ gilt und nach Lemma 8.26 $C_{\widetilde{C}_\delta}(\overline{Y}_\delta) = O_p(\widetilde{C}_\delta)$ gilt, ist $C_{E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}}}(\overline{Y}_1) = 1$. Also gilt $E_\delta E_\delta^{t_{\alpha+2}} = E_\delta$, und damit ist insbesondere V_δ $t_{\alpha+2}$-invariant. Ist andererseits $[\overline{Y}_1, Q_\delta] \not\leq R_\delta$, so ist $|\overline{Y}_1^*| = p^2$ und damit $Y_1^* = V_\delta$. Ist V_δ nicht $t_{\alpha+2}$-invariant, so gilt analog wie in Lemma 8.26 $O_p(N_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1)) =$

$C_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1)$. Sei $y \in Y \setminus Q_\delta$ und W eine maximale y-invariante 2-Untergruppe aus $N_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1)/C_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1)$. Nach Lemma 4.7 gilt $[W,y] \cong Q_8$ oder $[W,y] = Q_1 \times Q_2$ mit $Q_i \cong Q_8$ für $i = 1, 2$, wobei y jedes Q_i invariant lässt. Sei $[W,y] = Q_1 \times Q_2$ angenommen. Dann operiert $Q_2 \times Q_\delta$ auf $C_V(t_1)$, wobei t_1 die Involution aus Q_1 ist. Da ebenfalls y nichttrivial auf $C_V(t_1)$ operiert, folgt ein Widerspruch, weil $|C_V(t_1)| = p^2$ ist. Somit ist $E_\delta C_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1)$ $t_{\alpha+2}$-invariant. Weil $Q_\delta = N_S(E_\delta C_{\widetilde{C}}(\overline{Y}_1))$ ist, ist es auch $t_{\alpha+2}$-invariant und damit sind es auch $\overline{Y}_1^*$ und folglich auch V_δ. Im zweiten Fall ist $[\overline{R}_1, Q_\delta] = 1$, weil $R_1 \le Y_1^*$ gilt. Also folgt mit $Z_{\alpha+2} \le R_\delta$ ein Widerspruch.

Wäre nun $R_{\alpha+3} = R_{\alpha+1}$, so ist $Y_{\alpha+1} = Y_{\alpha+3} = Y_{\alpha'}$ und wegen der schon betrachteten Fälle kann $Y_{\alpha'-2} \le Q_{\alpha'}$ angenommen werden. Also gilt $Z_\alpha \le Y_{\alpha+1} = Y_{\alpha'-2} \le Q_{\alpha'}$, ein Widerspruch. Daher kann $\delta = \alpha + 3$ angenommen werden.

Nach den obigen Fällen gelte jetzt $Y \le Q_{\alpha+3}$. Sei $R := [Y, Y_{\alpha+3}]$ und $R_0 := RR_{\alpha+3}$. Es ist R $t_{\alpha+2}$-invariant, da es Y und $Y_{\alpha+3}$ jeweils sind. Dann folgt wegen $[Y, E_{\alpha+3}] \le O_p(\widetilde{C}_{\alpha+3})$, dass R $E_{\alpha+3}$-invariant ist. Weil $[R, \langle O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}), O_p(\widetilde{C}_{\alpha+3})\rangle] \le Z_{\alpha+2}$ ist, folgt, dass $RZ_{\alpha+2}$ normal in $G_{\alpha+2}$ ist. Also ist $R = 1$ oder $Z_{\alpha+2} \le R \le R_0$. Im zweiten Fall folgt $R_0 \ge V_{\alpha+3}$, da R_0 $E_{\alpha+3}$-invariant ist. Es gilt also

$$[V_{\alpha+3}, E_{\alpha+2}] \le [R_0, E_{\alpha+2}] \le Z_{\alpha+2} \le V_{\alpha+3}$$

und damit ist $V_{\alpha+3} \trianglelefteq \langle E_{\alpha+2}, G_{\alpha+3}\rangle = G$, ein Widerspruch. Es gilt somit $R = 1$.

Ist $b = 5$, so gilt $Y \le G_{\alpha'}$, weil $[Y, Z_{\alpha+4}] = 1$ ist und es dann aus dem Lemma 5.9 folgt. Ist $b = 7$ und $R_{\alpha+3} = R_{\alpha+5}$, so ist auch $Y_{\alpha+3} = Y_{\alpha+5}$ und damit ist $Y \le C_{G_{\alpha+3}}(Z_{\alpha+4})$. Also gilt nach dem Lemma 5.9 $Y \le G_{\alpha+5}$, und mit dem gleichen Lemma folgt wegen $[Y, Z_{\alpha+6}] = 1$, dass $Y \le G_{\alpha'}$ gilt. Also gilt in jedem Fall $Y \le G_{\alpha'}$. Daher gilt $[V_{\alpha'}, Y] = R_{\alpha'-2} = R_{\alpha+3}$ oder $[V_{\alpha'}, Y] = Z_{\alpha'-1}$. Im ersten Fall induziert $V_{\alpha'}$ Transvektionen auf $\overline{Y}$ und es folgt erneut $|[\overline{Y}, t_{\alpha+1}]| = p^2$, also $[\overline{Y}, t_{\alpha+1}] = \overline{V}_{\alpha+1}$ wegen $\overline{V}_{\alpha+1} \le [\overline{Y}, t_{\alpha+1}]$. Folglich ist $V_{\alpha+1}$ $t_{\alpha+2}$-invariant. Im zweiten Fall ist $Z_{\alpha'-1} \le Y \cap Y_{\alpha+3}$ und $[Z_{\alpha'-1}, \langle O_p(\widetilde{C}_{\alpha+1}), O_p(\widetilde{C}_{\alpha+3})\rangle] \le Z_{\alpha+2}$. Also wird $Z_{\alpha'-1}Z_{\alpha+2}$ von $E_{\alpha+2}$ normalisiert.

Ist $b = 5$, so folgt $Z_{\alpha+4} = Z_{\alpha+2}$, da sonst $Z_{\alpha+4}Z_{\alpha+2} = V_{\alpha+3}$ wäre und $V_{\alpha+3}$ nicht von $E_{\alpha+2}$ normalisiert wird. Aber mit $Z_{\alpha+2} = Z_{\alpha+4}$ folgt auch $E_{\alpha+2} = E_{\alpha+4}$. Daher sind $G_{\alpha+5}$ und $G_{\alpha+3}$ unter $E_{\alpha+4} = E_{\alpha+2}$ konjugiert und es folgt, dass ein $\delta \in \Delta(\alpha + 2)$ existiert, sodass $G_\delta = G_{\alpha+5}$ ist. Mit $Z_\alpha \le Q_\delta = Q_{\alpha'}$ folgt ein Widerspruch. Also sei $b = 7$ angenommen. Dann existiert ein $g \in C_{G_{\alpha+2}}(R_{\alpha'})$ mit

$\alpha^g \in \Delta(\alpha+3)$, also $Z_\alpha^g \leq Y_{\alpha+3} = Y_{\alpha+5} \leq O_p(\widetilde{C}_{\alpha'})$. Also ist $Z_\alpha \leq O_p(\widetilde{C}_{\alpha'}) \leq Q_{\alpha'}$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Lemma 8.28 *Ist $p = 3$ und $5 \leq b \leq 7$ und, falls $b = 7$ ist, $R_{\alpha+3} = R_{\alpha'-2}$ und $|V_{\alpha+1}| = 3^3$, so gilt $N_{G_\alpha}(S_{\alpha\alpha+1}) \leq N_G(E_{\alpha+1})$.*

Beweis Sei $t_\alpha \in N_{G_\alpha}(S_{\alpha\alpha+1})$ eine Involution. Nach Lemma 8.27 wird $V_{\alpha+1}$ von t_α normalisiert. Weil t_α in $V_{\alpha+1}/R_{\alpha+1}$ den eindimensionalen Teilraum $Z_\alpha/R_{\alpha+1}$ normalisiert, normalisiert t_α einen weiteren Teilraum $U/R_{\alpha+1}$. Es operiert $E_{\alpha+1}$ transitiv auf $(Z_\alpha/R_{\alpha+1})^{G_{\alpha+1}}$, und daher ist $U = Z_\mu$ für ein $\mu \in \Delta(\alpha+1)$. Nach Lemma 5.9 gilt $N_G(Z_\mu)^\circ = G_\mu^\circ$. Also normalisiert t_α auch G_μ°. Nach Lemma 8.1 (f) gilt $O_p(E_\mu) \not\leq Q_{\alpha+1}$, also insbesondere $O_p(G_\mu^\circ) \not\leq Q_{\alpha+1}$. Weil $\langle O_p(G_\mu^\circ), O_p(G_\alpha^\circ)\rangle$ ein Normalteiler von $G_{\alpha+1}$ ist, dessen Schnitt mit einer p-Sylowgruppe nicht in $Q_{\alpha+1}$ liegt, gilt $E_{\alpha+1} \geq \langle O_p(G_\mu^\circ), O_p(G_\alpha^\circ)\rangle$. Also wird $E_{\alpha+1}$ von t_α normalisiert. □

Mit diesem letzten Lemma folgt der Satz 8.29 unmittelbar mit der Bemerkung 5.5 aus den Lemmata 7.6, 8.24 und 8.28

Satz 8.29 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 1.1. Dann existiert eine minimal parabolische Untergruppe $\widetilde{P}$ von $\widetilde{C}$ mit $S \leq \widetilde{P}$ und $G = \langle P, \widetilde{P}\rangle$ derart, dass einer der folgenden Fälle gilt:*

(a) Es ist $b = 2$.

(b) Es ist $b = 3$.

(c) P und $\widetilde{P}$ bilden ein schwaches BN-Paar.

Weil Satz 8.29 nur eine Formulierung des Satzes 1.1 mit den Begriffen des Nebenklassengraphen ist, ist damit der Beweis beendet.

Literatur

[BHS] D. Bundy, N. Hebbinghaus, B. Stellmacher, *The Local C(G,T) Theorem*, Journal of Algebra **300** (2006) 741-789

[C] A. Chermak, *Quadratic pairs without components*, Journal of Algebra **258** (2002) 442-476

[DS] A. Delgado, B. Stellmacher, *Weak* (B,N)*-pairs of rank* 2, in: Groups and Graphs: New results and Methods, Birkhäuser (1985)

[KS] H. Kurzweil, B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1998)

[MMPS] M. Mainardis, U. Meierfrankenfeld, G. Parmeggiani, B. Stellmacher, *The* $\tilde{P}$*!-Theorem*, Journal of Algebra **292** (2005) 363-392

[MS] U. Meierfrankenfeld, G. Stroth, *The H-Structure Theorem*, preprint (2007)

[MSS1] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, G. Stroth, *Finite groups of local characteristic p, an overview*, Proc. Durham Conference (2001)

[MSS2] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, G. Stroth, *The Structure Theorem*, Preprint (2002)

[PPS] Ch. W. Parker, G. Parmeggiani, B. Stellmacher, *The P!-Theorem*, Journal of Algebra **263** (2003) 17-58

[S1] B. Stellmacher, *Pushing Up*, Archiv der Mathematik **46** (1986) 8-17

[S2] B. Stellmacher, *An Application of the Amalgam Method: The 2-Local Structure of N-Groups of Characteristic 2 Type*, Journal of Algebra **190** (1997) 11-67

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort, Datum	Matthias Hamann