
Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

Zusatzblatt

Auf diesem Blatt werden einige nicht behandelte Übungsaufgaben vorheriger Blätter mit Anleitung erneut gestellt. Das Blatt läuft parallel zum 10. Blatt und ermöglicht das Sammeln von (weiteren) Bonuspunkten.

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma)$ ein Graph von Gruppen, wobei Γ endlich ist, und sei $e \in E(\Gamma)$. Zeigen Sie $\pi_1(\mathbb{G}) \cong A *_{G_e} B$, falls $\Gamma - e$ nicht zusammenhängend ist und $\pi_1(\mathbb{G}) \cong A *_{\alpha_e^{-1} \alpha_{\bar{e}}} B$, falls $\Gamma - e$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2: Sei $(\mathcal{G}, \Gamma)$ ein Graph von Gruppen, wobei Γ ein endlicher Graph ist. Bestimmen Sie alleine mit Produkten und HNN-Erweiterungen der Ecken- und Kantengruppen die Fundamentalgruppe von $(\mathcal{G}, \Gamma)$.

Aufgabe 3: Sei $G = A *_C B$ für endliche Gruppen A, B, C .

- (1) Konstruieren Sie eine endliche Menge, auf der sowohl A als auch B operieren, sodass die induzierten Operationen von C mittels $C\iota_A$ und $C\iota_B$ gleich sind.
- (2) Zeigen Sie, dass $A *_C B$ einen Normalteiler mit endlichem Index hat, der eine freie Gruppe ist.

Aufgabe 4: Sei $G = A *_\varphi$ für eine endliche Gruppe A . Nutzen Sie ähnlich wie in Aufgabe 3 die Operation von A auf einer endlichen Menge, um einen Normalteiler mit endlichem Index von $A *_\varphi$ zu finden, der eine freie Gruppe ist.

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma)$ ein Graph von Gruppen, sodass Γ und jede Ecken- und Kantengruppe endlich sind. Zeigen Sie, dass $\pi_1(\mathbb{G})$ einen Normalteiler mit endlichem Index hat, der eine freie Gruppe ist.

Aufgabe 6: Sei $T = (V, E)$ ein Graph mit Involution, der einen Baum induziert (d. h., zwischen zwei Ecken gibt es höchstens zwei Kanten). Sei S eine Äquivalenzrelation auf E , sodass für alle $(e, f) \in S$ entweder $i(e) = i(f)$ oder $t(e) = t(f)$ gilt. Zeigen Sie, dass T/S ein Baum ist.

Aufgabe 7: Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler einer Gruppe G und sei $\bar{T}$ ein Baum, auf dem G/N operiert, sodass die auf den Kanten induzierte Operation frei ist. Zudem existiere ein Baum T , auf dem G so operiert, dass die auf den Kanten von T induzierte Operation frei ist, und sodass es einen Epimorphismus (id, φ) von (G, T) nach $(G/N, \bar{T})$ gibt. Zeigen Sie, dass zwei Kanten $e, f \in E(T)$ existieren, für die $eG \neq fG$ aber $e\varphi = f\varphi$ gilt und für die entweder $i(e) = i(f)$ oder $t(e) = t(f)$ gilt.

Aufgabe 8: Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler einer Gruppe G und sei $\bar{T}$ ein Baum, auf dem G/N operiert, sodass die auf den Kanten induzierte Operation frei ist. Zudem existiere ein Baum T , auf dem G so operiert, dass die auf den Kanten von T induzierte Operation frei ist, und sodass es einen Epimorphismus (id, φ) von (G, T) nach $(G, \bar{T})$ gibt. Zeigen Sie, dass es einen Baum $\mathcal{T}$ mit den gleichen Eigenschaften wie T gibt, sodass zusätzlich $(G, \mathcal{T}/N)$ und $(G, \bar{T})$ isomorph sind.