Fachbereich Mathematik
Matthias Hamann

WS 2013/14
6. November 2013

## Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

## Blatt 4

**Aufgabe 1:** Wir betrachten $\mathbb{Z}$ mit der Standardmetrik $|\cdot|$. Bestimmen Sie eine Präsentation der Automorphismengruppe von $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ mit genau zwei Erzeugern.

*Hinweis: Automorphismen eines metrischen Raumes sind seine Isometrien.*

**Aufgabe 2:** Für ein Element $g$ einer Gruppe $G$ sei der **Zentralisator** $C_G(g)$ von $g$ definiert durch:

$$C_G(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}.$$

Offenbar ist $C_G(g)$ eine Untergruppe von $G$. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Zeigen Sie die folgenden Aussagen für das freie Produkt zweier Gruppen $G$ und $H$:

(1) Sei $f \in G \star H$. Für jedes $g \in G^f$ und $h \in H^f$ gilt $C_{G\star H}(g) \leq G^f$ und $C_{G\star H}(h) \leq H^f$.

(2) Ist $g \in (G\star H) \setminus (\bigcup_{f \in G\star H} G^f \cup H^f)$, so ist $C_{G\star H}(g)$ eine unendliche zyklische Gruppe.

**Aufgabe 3:**

(1) Finden Sie für HNN-Erweiterungen eine geeignete Definition für den Begriff *zyklisch reduzierte* schwache Normalform.

(2) Zeigen Sie, dass jedes Element der HNN-Erweiterung konjugiert zu einem Element ist, das eine zyklisch reduzierte schwache Normalform hat.

**Aufgabe 4:** Sei $G$ eine endlich präsentierte Gruppe, seien $A, B \leq G$, und sei $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $G\star_\varphi$ genau dann endlich präsentiert ist, wenn $A$ endlich erzeugt ist.

Besprechung am 13. November 2013