Fachbereich Mathematik
Matthias Hamann

WS 2013/14
30. Oktober 2013

Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

Blatt 3

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ isomorph sind.
2. Wie viele Elemente hat $\langle x, y, z \mid xyx^{-1} = y^2, yxy^{-1} = x^2, xzy = z^{-1} \rangle$?

Aufgabe 2: Seien A und G Gruppen und sei $\varphi : A \to G$ ein Gruppenmonomorphismus. Bestimmen Sie das freie Produkt mit Amalgamation $G \star_A A$ bezüglich φ und id_A.

Aufgabe 3*: Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem $\{a, b\}$ und sei $N := \langle a^i b^{-i} \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Die Menge $\{a^i b^{-i} \mid i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ist ein freies Erzeugendensystem für die freie Gruppe N.

(2) $N \trianglelefteq F$ (d. h. N ist ein Normalteiler von F).

(3) $F/N \cong \langle a, b \mid a = b \rangle$.

Aufgabe 4: Sei F eine freie Gruppe vom Rang mindestens 2. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass F eine Untergruppe G von endlichem Rang mindestens n hat.

Aufgabe 5: Sei G die Gruppe, die durch die Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ mit Erzeugendensystem $S = \{a, b, c_0, c_1, \ldots\}$ und Relatoren

$$R = \{a^4, b^3, c_0^{-1} b c_0 a^{-2}, c_1^{-1} c_0 c_1 b^{-1}, c_2^{-1} c_1 c_2 c_0^{-1}, c_3^{-1} c_2 c_3 c_1^{-1}, \ldots\}$$

gegeben ist.

(1) Zeigen Sie $G \cong C_2$.

(2) Jede endliche Teilpräsentation von $\langle S \mid R \rangle$, d. h. jede Präsentation $\langle S' \mid R' \rangle$ mit endlichen $S' \subseteq S$ und $R' \subseteq R$, definiert eine Gruppe der Ordnung 3 oder 4 oder eine unendliche Gruppe.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: am 6. November 2013
Besprechung am 6. November 2013