Fachbereich Mathematik
Matthias Hamann

WS 2013/14
23. Oktober 2013

Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

Blatt 2

Aufgabe 1: Sei F eine freie Gruppe und $f, g, h \in F$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

1. Aus $f^n = g^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt $f = g$.
2. Aus $fg = gf$ und $gh = hg$ folgt $fh = hf$, sofern $g \neq 1$ gilt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender Graph, auf dem eine Gruppe transitiv und frei operiert, der unterliegende ungerichtete Graph eines Cayley-Graphen ist.

Aufgabe 3: Beweisen Sie das Ping-Pong-Lemma:

Die Gruppe G operiere auf X. Es seien $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ mit $|I| \geq 2$ zwei Familien von Teilmengen von X, sodass alle A_i paarweise disjunkt und alle B_i paarweise disjunkt sind und jedes A_i zu jedem B_j disjunkt ist. Wenn $g_i \in G$ mit $X \setminus B_i \subseteq A_i g_i$ für alle $i \in I$ existieren, dann ist die Untergruppe $\langle g_i \mid i \in I \rangle$ von G frei.

Aufgabe 4:

a) Sei G und H Gruppen und F eine freie Gruppe. Sei $\varphi\colon F \to H$ ein Homomorphismus und sei $\psi\colon G \to H$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie, dass es einen Homomorphismus $\varrho\colon F \to G$ mit $\varrho\psi = \varphi$ gibt.

   Ist ϱ sogar eindeutig bestimmt?

b) Sei G eine Gruppe. Sei N ein Normalteiler von G, sodass G/N eine freie Gruppe ist. Zeigen Sie, dass zu N ein **Komplement** in G existiert, d. h. eine Untergruppe $U \leq G$ mit $G = NU$ und $N \cap U = \emptyset$.

Aufgabe 5: Sei F eine freie Gruppe mit $\{g, h\}$ als freiem Erzeugendensystem und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Welchen Rang hat die freie Untergruppe $\langle g^{-i} h g^i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$?
2. Hat F eine Untergruppe von unendlichem Rang?

Besprechung am 30. Oktober 2013