Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

Blatt 13

Aufgabe 1: Sei Γ ein δ-hyperbolischer Graph und sei $c \in \mathbb{N}_{>8\delta}$. Sei P ein **c-lokal-geodätischer Weg**, d. h., für alle $x, y \in V(P)$ mit $d_P(x, y) \leq c$ gilt

$$d_P(x, y) = d(x, y),$$

und sei Q ein geodätischer Weg mit den gleichen Endecken wie P. Zeigen Sie, dass eine Konstante κ existiert, die nur von δ und c abhängt, sodass jede Ecke von P Abstand höchstens κ zu Q und jede Ecke von Q höchstens Abstand κ zu P hat.

Aufgabe 2: Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 4.6.2, d. h., zeigen Sie die Ungleichung

$$d_S(1, g_i h^n) \geq d_S(1, g_i) + n \cdot d_S(1, h)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie Lemma 4.5.6.

Aufgabe 4: Sei Γ ein δ-hyperbolischer Graph, $r \in \mathbb{N}$ und $x, y \in V(\Gamma)$ mit $d(x, y) > 8r + 4\delta + 1$. Seien $u \in B_r(x)$ und $v \in B_r(y)$ und sei P ein kürzester x–y-Weg und Q ein kürzester u–v-Weg. Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt von Q Abstand höchstens $4\delta + 1$ zu $P \cap B_r(a)$ hat, wobei a ein Mittelpunkt von P ist.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^2$ nur endlich viele Konen bezüglich des Standarderzeugendensystems hat.

Zusatzaufgabe: Sei Γ ein lokal-endlicher Graph. Zeigen Sie, dass in jedem Ende von Γ ein **geodätischer** Strahl liegt, das ist ein Strahl R, sodass für alle $x, y \in V(R)$ gilt:

$$d(x, y) = d_R(x, y).$$

Besprechung am 29. Januar 2014