Übungen zur Kombinatorischen Gruppentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1*: Beweisen Sie Lemma 1.1.5 der Vorlesung, d. h., zeigen Sie die folgende Aussage:

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Genau dann operiert G auf X (von rechts), wenn es einen Gruppenhomomorphismus $G \to Sym(X)$ gibt.

Desweiteren operiert G genau dann treu auf X, wenn dieser Gruppenhomomorphismus injektiv ist.

Aufgabe 2: Sei T ein endlicher Baum und G die Menge der Automorphismen von T. Zeigen Sie, dass jedes $g \in G$ einen **Fixpunkt** in T hat, d. h., dass für jedes $g \in G$ eine Ecke oder eine Kante x mit $xg = x$ existiert.

Gibt es sogar eine Ecke oder eine Kante, die von ganz G fixiert wird?

Variante (es ist nur einer der beiden Varianten zu bearbeiten)**:** Eine endliche Gruppe operiert auf einem Baum T. Zeigen Sie, dass jedes $g \in G$ einen Fixpunkt in T hat.

Gibt es sogar eine Ecke oder Kante, die von ganz G fixiert wird?

Aufgabe 3: Sei G eine Gruppe, K ein Körper und V ein Vektorraum der Dimension $|G|$ über K. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ ist.

Aufgabe 4: (a) Zeigen Sie, dass die Automorphismen des Petersengraphen (dargestellt in Abbildung 1) **transitiv** auf den Ecken operieren, d. h. für je zwei Ecken u, v gibt es einen Automorphismus, der u auf v abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass der Petersengraph nicht der unterliegende ungerichtete Graph eines Cayley-Graphen ist.

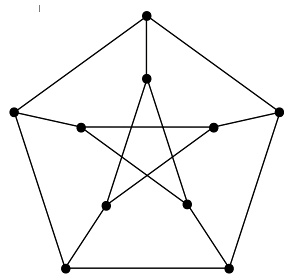

Abbildung 1: Der Petersengraph

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass es zu jeder endlich erzeugten Gruppe G einen Graphen Γ mit $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong G$ gibt.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: am 23. Oktober 2013
Besprechung am 23. Oktober 2013