Skript zur Vorlesung

Geometrische Gruppentheorie

im Wintersemester 2022/23

Hamburg, 6. März 2023

Dies ist das Skript zur Vorlesung *Geometrische Gruppentheorie*, gehalten im Wintersemester 2022/23 an der Universität Hamburg. Sollten sich Fehler eingeschlichen haben, bin ich dankbar, wenn mir diese per Mail an `matthias.hamann@math.uni-hamburg.de` mitgeteilt werden.

Hamburg, im Wintersemester 2022/23 Matthias Hamann

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Gruppen spielen in vielen (oder sogar allen) mathematischen Richtungen eine Rolle - vielfach als Automorphismengruppe, aber z. B. in der Galoistheorie auch direkt. Wir wollen uns in dieser Vorlesung dem Ziel widmen, diese Gruppen an sich besser zu verstehen. Zunächst sollten wir aber folgende Frage klären:

Was ist geometrische Gruppentheorie?

Ganz allgemein gesprochen beschäftigt sich die geometrische Gruppentheorie damit, Gruppen als geometrische Objekte aufzufassen und ihre geometrischen und algebraischen Eigenschaften in Verbindung zu bringen. Zudem werden wir auch, anstatt die Gruppe direkt als geometrisches Objekt aufzufassen, ihre Operation auf anderen geometrischen Objekten nutzen, um algebraische Aussagen über die Gruppe treffen zu können.

Als Beispiel hierfür können wir die Aussage „Untergruppen freier Gruppen sind frei.“ nutzen: dies ist eine rein algebraische Aussage über die Struktur von Untergruppen, aber ein eleganter Beweis nutzt eine (geometrische) Charakterisierung freier Gruppen über Operationen auf Bäumen aus.

Die wichtigsten Objekte werden die *Cayley-Graphen* sein: zu jeder Gruppe und jedem Erzeugendensystem der Gruppe können wir einen Cayley-Graphen konstruieren. Das für uns Wichtige hierbei wird sein, dass die Strukturen verschiedener Cayley-Graphen für die selbe endlich erzeugte Gruppe bei Verwendung verschiedener endlicher Erzeugendensysteme nur lokal verändert: sie sind quasi-isometrisch zueinander. Das bedeutet, dass jede geometrische Eigenschaft, die invariant unter Quasi-Isometrien ist, bereits für all diese Cayley-Graphen gilt, wenn sie für einen gilt. Damit kann sie dann auch als Eigenschaft der Gruppe angesehen werden.

Auf diese Art werden wir dann z. B. über *Enden* oder *Wachstum* von Gruppen sprechen können. Als Beispiel für die Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Gruppeneigenschaften werden wir Stallings' Satz zeigen, dass eine endlich erzeugte Gruppe genau dann mehrere Enden hat, wenn sie sich als eine von zwei Arten von Produkten von Gruppen schreiben lässt.

Kapitel 1

Grundlagen

Erinnerung. Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G und einer binären Funktion $\cdot\colon G \times G \to G$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

- Assoziativität: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ für alle $f, g, h \in G$;
- neutrales Element: es existiert $e \in G$ mit $e \cdot g = g = g \cdot e$ für alle $g \in G$;
- Inverse Elemente: für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ mit $gg^{-1} = e = g^{-1}g$.

Im Allgemeinen unterdrücken wir die Funktion $\cdot$ und schreiben lediglich gh anstatt $g \cdot h$.

1.1 Gruppenoperationen

In diesem Kapitel werden wir zunächst einmal präzisieren, was es aus gruppentheoretischer Sicht bedeutet, dass eine Gruppe „wie Automorphismen“ auf einem mathematischen Objekt wirkt.

Definition. Eine Gruppe G **operiert (von rechts)** auf einer Menge X, falls es eine Funktion $\bullet\colon X \times G \to X$ gibt mit

(1) $x \bullet 1 = x$ für alle $x \in X$ und

(2) $(x \bullet g) \bullet h = x \bullet (gh)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Die Funktion selbst heißt **(Rechts-)Operation** von G auf X.

Analog **operiert** G **(von links)** auf X, falls es eine Funktion $\bullet\colon G \times X \to X$ gibt mit

(1′) $1 \bullet x = x$ für alle $x \in X$ und

(2′) $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Die Funktion selbst heißt **(Links-)Operation** von G auf X.

Hinweis. Im Folgenden lassen wir den Punkt $\bullet$ bei den Operationen in der Regel weg.

Wir betrachten ein paar Beispiele für Gruppenoperationen:

Beispiel 1.1.1. Sei G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe.

(1) G operiert von rechts (von links) durch Rechtsmultiplikation (Linksmultiplikation) auf sich selbst.

(2) G operiert auf sich selbst mittels **Konjugation**, d. h. $x \bullet g := x^g := g^{-1}xg$.

(3) Mittels Rechtsmultiplikation operiert G (von rechts) auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U, d.h. auf der Menge $\{Ug \mid g \in G\}$, wobei $Ug := \{ug \mid u \in U\}$.

(3′) Mittels Linksmultiplikation operiert G (von links) auf der Menge der Linksnebenklassen von U, d.h. auf der Menge $\{gU \mid g \in G\}$, wobei $gU := \{gu \mid u \in U\}$.

(4) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann operiert die multiplikative Gruppe $(K^*, \cdot)$ von K auf V durch Skalarmultiplikation (von links).

Definition. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X. Sie operiert **treu**, falls für alle $g \in G$ mit $g \neq 1$ ein $x \in X$ mit $xg \neq x$ existiert.

Beispiel 1.1.2 (Fortsetzung von Beispiel 1.1.1)**.**

(1) Rechts- und Linksmultiplikation sind treue Operationen.

(2) Konjugation ist genau dann eine treue Operation, wenn dass **Zentrum** $Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G\}$ von G trivial ist.

(3) Im Allgemeinen ist die Rechtsmultiplikation (die Linksmultiplikation) auf der Menge der Rechtsnebenklassen (der Linksnebenklassen) nicht treu. (Beispiel?)

(4) Skalarmultiplikation auf nicht-trivialen Vektorräumen ist eine treue Operation.

Bemerkung. Im allgemeinen betrachten wir Operationen von links und sprechen nur von einer Operation. Operationen von rechts werden wir hingegen explizit benennen.

Lemma 1.1.3. *Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Genau dann operiert G (nicht-trivial) auf X (von links), wenn es einen (nicht-trivialen) Gruppenhomomorphismus $G \to S_X$ gibt.*[1]

Desweiteren operiert G genau dann treu auf X, wenn dieser Gruppenhomomorphismus injektiv ist.

[1] Erinnerung: S_X ist die symmetrische Gruppe auf X.

Beweis. Zunächst operiere G nicht-trivial auf X. Für jedes $g \in G$ setzen wir $\varphi_g\colon X \to X,\ x \mapsto gx$. Sei $g \in G$. Wegen $x = 1x = gg^{-1}x$ für jedes $x \in X$ ist $\varphi_g \varphi_{g^{-1}} = id_X$ und damit ist $\varphi_g \in S_X$. Diese Permutation muss nicht-trivial sein, da die Operation nicht-trivial ist. Zudem folgt aus $(\varphi_g \varphi_h)(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = ghx = \varphi_{gh}(x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ die Homomorphieeigenschaft der Abbildung $\varphi\colon G \to S_X,\ g \mapsto \varphi_g$. Ist die Operation treu, so existiert für jedes $g \in G$ ein $x \in X$ mit $gx \neq x$ und damit ist auch $\varphi_g(x) \neq \varphi_1(x)$. Also ist φ injektiv.

Sei nun $\varphi\colon G \to S_X$ ein nicht-trivialer Gruppenhomomorphismus. Für jedes $g \in G$ setzen wir $gx := \varphi(g)(x)$. Dann gilt $1x = \varphi(1)(x) = id(x) = x$ und

$$(gh)x = \varphi(gh)(x) = (\varphi(g)\varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = g(hx)$$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$. Also wird dadurch eine Operation von G auf X definiert, die nicht-trivial ist, weil es ein $g \in G$ mit $\varphi(g) \neq id$ gibt, also ein $x \in X$ existiert mit $\varphi(g)(x) \neq id(x) = x$. Ist φ injektiv, so existiert kein $g \in G$ mit $\varphi(g) = id$, also existiert für jedes $g \in G$ ein $x \in X$ mit $gx = \varphi(g)(x) \neq x$ und damit ist die Operation treu. □

Wir können bereits jetzt einen wichtigen Satz (den Satz von Cayley) als Korollar des Bisherigen ziehen. Dieser besagt, dass es für das Verständnis aller Gruppen ausreicht, die Untergruppen der symmetrischen Gruppen zu verstehen. – Leider stellt es sich als Trugschluss heraus, wenn wir jetzt denken, dass dies die Sache vereinfacht.

Satz 1.1.4 (Satz von Cayley)**.** *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.*

Beweis. Nach Beispiel 1.1.2 (1) operiert G treu auf sich selbst mittels Rechtsmultiplikation. Also gibt es nach Lemma 1.1.3 einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to S_G$, der injektiv ist. Es folgt $G \cong \varphi(G) \leq S_G$. □

Im nächsten Abschnitt (Kapitel 1.2) werden wir sogar noch eine stärkere Version des Satzes von Cayley beweisen, die besagt, dass wir die Gruppe G sogar schon als Untergruppe der Automorphismengruppe eines zusammenhängenden gerichteten Graphen finden.

Lemma 1.1.3 motiviert uns dazu, auch Operationen auf anderen mathematischen Objekten als nur Mengen zu betrachten.

Definition. Eine Gruppe G **operiert** auf einem mathematischen Objekt X (einem Graphen, einem Vektorraum, etc.), wenn sie auf der Grundmenge X operiert und jedes $g \in G$ nicht nur ein Element aus S_X gemäß Lemma 1.1.3 definiert, sondern zudem einen Automorphismus von X.

In Analogie zur Definition von *treuer Operation auf einer Menge* nennen wir die Operation von G auf X **treu**, wenn G auf der Grundmenge X treu operiert.

Bemerkung. Gemäß Lemma 1.1.3 operiert eine Gruppe G genau dann (treu) auf einem mathematischen Objekt X, wenn es einen (injektiven) Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(X)$ gibt.

Beispiel 1.1.5. Die Operation in Beispiel 1.1.1 (2) ist eine Operation von G auf der *Gruppe* G und in Beispiel 1.1.1 (4) ist sie eine Operation von K^* auf dem *Vektorraum* V.

Im Folgenden werden wir den Satz „Eine Gruppe G operiere auf X." synonym für „Eine Gruppe G operiere auf einem mathematischen Objekt X." gebrauchen.

Definition. Eine Gruppe G operiere auf X. Sei $x \in X$.

(1) Der **Stabilisator** von x in G ist die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

(2) Die **Bahn** (oder der **Orbit**) von x unter G ist die Menge

$$Gx := \{gx \mid g \in G\}.$$

Bemerkung 1.1.6. Die Gruppe G operiere auf X. Dann ist der Stabilisator von $x \in X$ eine Untergruppe von G.

Wir erhalten folgenden Zusammenhang zwischen Stabilisatoren und Bahnen:

Satz 1.1.7. *Eine Gruppe G operiere auf X. Dann ist für jedes $x \in X$ die Abbildung von Gx in die Menge der Linksnebenklassen von G_x mittels $gx \mapsto gG_x$ eine Bijektion.*

Beweis. Seien $g, h \in G$. Dann gilt folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} & gx = hx \\ \Leftrightarrow\ & h^{-1}gx = x \\ \Leftrightarrow\ & h^{-1}g \in G_x \\ \Leftrightarrow\ & h^{-1}gG_x = G_x \\ \Leftrightarrow\ & gG_x = hG_x \end{aligned}$$

□

Definition und Bemerkung 1.1.8. *Sei G eine Gruppe und $U \leq G$. Mit dem* **Index** *von U in G bezeichnen wir die Anzahl der Linksnebenklassen von U in G (oder äquivalent die Anzahl der Rechtsnebenklassen von U in G) und notieren es mit $|G : U|$. Es gilt $|G| = |U| \cdot |G : U|$.*

Korollar 1.1.9. *Eine endliche Gruppe G operiere auf X. Dann gilt für jedes $x \in X$:*

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|$$

Beweis. Es gilt

$$|G| = |G_x| \cdot |G : G_x| = |G_x| \cdot |Gx|$$

nach Bemerkung 1.1.8 und Satz 1.1.7. □

Wir wollen noch einen weiteren Zusammenhang zwischen Stabilisatoren und Bahnen beschreiben:

Lemma 1.1.10. *Die Gruppe G operiere auf X. Seien $x, y \in X$ mit $gx = y$ für ein $g \in G$. Dann gilt $(G_x)^g = G_y$ bzw. $G_x = (G_y)^{g^{-1}}$.*

Beweis. Sei $g \in G$ mit $gx = y$ und sei $h \in G_x$. Dann gilt

$$h^g y = g^{-1}hgy = g^{-1}hx = g^{-1}x = y.$$

Also gilt $h^g \in G_y$ und damit $G_x^g \subseteq G_y$. Ein analoges Argument zeigt $G_y^{g^{-1}} \subseteq G_x$ und damit $(G_x)^g = G_y$ und $G_x = (G_y)^{g^{-1}}$. □

Definition. Eine Gruppe G operiere auf X. Sie **bewegt** $x \in X$ **frei**, wenn $G_x = 1$ gilt. Ferner operiert G **frei** auf X, falls es jedes $x \in X$ frei bewegt.

Hinweis. In dieser Vorlesung betrachten wir Graphen nicht als topologische Objekte, d. h., wir betrachten sie nicht als CW-Komplexe. Aus diesem Grund müssen wir die vorherige Definition für Graphen noch etwas verschärfen:

Definition. Eine Gruppe G operiere auf einem Graphen $\Gamma = (V, E)$. Sie operiert **frei** auf X, falls sowohl die induzierte Operation auf V als auch die auf E frei sind.

1.2 Cayley-Graphen

In diesem Abschnitt werden wir ein besonderes Objekt kennen lernen, auf dem Gruppen in natürlicher Weise operieren und das wir intensiv nutzen werden: ihren sogenannten Cayley-Graphen. Dazu benötigen wir zunächst folgende Definition:

Definition. Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $S \subseteq G$ **erzeugt** G, falls sich jedes Element aus G als ein (endliches!) Produkt von Elementen aus S oder ihren Inversen schreiben lässt. Die Menge S heißt **Erzeugendensystem** von G. Ist S ein Erzeugendensystem für G, so schreiben wir $G = \langle S \rangle$.

Die Gruppe G heißt **endlich erzeugt**, falls es eine endliche Menge gibt, die G erzeugt.

Beispiel 1.2.1. Eine symmetrische Gruppe auf $n \in \mathbb{N}$ Elementen wird von den Transpositionen erzeugt.

Hinweis. Beispiel 1.2.1 wird falsch, wenn wir symmetrische Gruppen auf unendlich vielen Elementen betrachten. (Warum?)

Definition. Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar (V, E), wobei $E \subseteq V \times V$ gilt.

Sprechen wir von Wegen, Kantenzügen etc. in gerichteten Graphen, so meinen wir stets solche im **unterliegenden ungerichteten (Multi-)Graphen** von (V, E) mit der Funktion $f\colon E \to [V]^2, (x, y) \mapsto \{x, y\}$.

Definition. Sei G eine Gruppe, die von $S \subseteq G$ erzeugt wird. Dann wird durch

$$\Gamma_{G,S} = (G, \{(g, gs) \mid g \in G, s \in S\})$$

ein gerichteter Graph definiert, der sogenannte **Cayley-Digraph** von G und S. Der unterliegende ungerichtete Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen ist der **Cayley-Graph** von G und S. Wir bezeichnen auch den Cayley-Graphen mit $\Gamma_{G,S}$. Es wird aber im Kontext immer klar sein, ob $\Gamma_{G,S}$ nun gerichtet ist oder nicht.

Bemerkung 1.2.2.

(i) Genau dann ist $\Gamma_{G,S}$ schlingenlos, wenn $1 \notin S$ gilt.

(ii) Der unterliegende ungerichtete Graph von $\Gamma_{G,S}$ hat höchstens Doppelkanten. Dies hat er genau dann, wenn S für ein $s \in S$ auch sein Inverses s^{-1} enthält, also insbesondere, wenn S eine **Involution**, d. h. ein Element der Ordnung 2, enthält.

Beispiel 1.2.3. Sei C_n die zyklische Gruppe mit n Elementen und sei S ein Erzeugendensystem für C_n.

(1) Gilt $S = C_n$, so ist der Cayley-Digraph vollständig: zwischen $g \neq h \in C_n$ gibt es eine Kante (g, h) und eine Kante (h, g). Zudem existiert jede Schlinge (g, g).

(2) Gilt $|S| = 1$, so ist der Cayley-Digraph ein gerichteter Kreis auf n Ecken.

Beispiel 1.2.4. Wir betrachten zwei Cayley-Digraphen für die Gruppe S_3. Dazu sei $S = \{(12), (23)\}$ und $S' = \{(12), (123)\}$. Beide Cayley-Digraphen sind

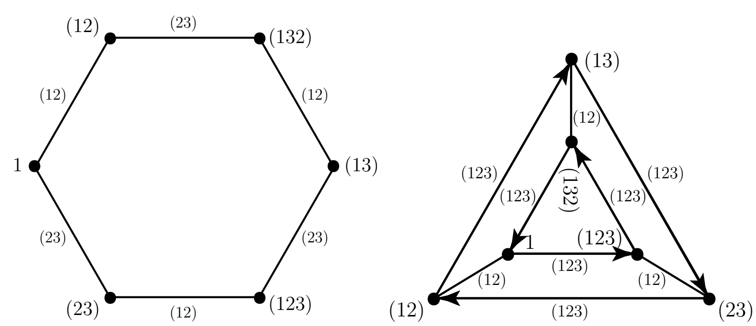

Abbildung 1.1: Zwei Cayley-Digraphen zur symmetrischen Gruppe S_3

in Abbildung 1.1 dargestellt, wobei Kanten ohne Richtung für Doppelkanten stehen: je möglicher Orientierung dieser Kanten gibt es eine in dem Cayley-Digraphen. An den Kanten stehen jeweils die Element aus S bzw. S', von denen sie stammen.

Satz 1.2.5 (Satz von Cayley, starke Version)**.** *Für jede Gruppe existiert ein zusammenhängender Graph, auf dem sie treu operiert.*

Ist G endlich erzeugt, so kann der Graph lokal-endlich[2] *gewählt werden.*

Beweis. Sei S ein Erzeugendensystem für G und sei $\Gamma = (G, E)$ der Cayley-Graph von G und S. Dann operiert G auf Γ mittels $g\colon G \to G, h \mapsto gh$ treu: beachte hierfür, dass eine Kante (h_1, h_2) auf die Kante (gh_1, gh_2) abgebildet wird und als Urbild die Kante $(g^{-1}h_1, g^{-1}h_2)$ hat. Dass die Operation treu ist folgt aus Beispiel 1.1.2 (1).

Wenn G endlich erzeugt ist, können wir S endlich wählen. Da jede Ecke g nur zu den Ecken gs und gs^{-1} für alle $s \in S$ benachbart ist, folgt, dass Γ lokal-endlich ist. □

Hinweis. Um eine treue Rechtsoperation zu erhalten, muss bei der Definition des Cayley-Graphen die Kantenmenge $\{(g, sg) \mid g \in G, s \in S\}$ gewählt werden. Der Grund, warum wir die Kanten (g, gs) gewählt haben, liegt in folgender Bemerkung.

Bemerkung 1.2.6. Zu jedem Kantenzug $v_0e_0v_1 \dots e_{k-1}v_k$ in einem Cayley-Graphen $\Gamma_{G,S}$ gehört eine Folge $s_0 \dots s_{k-1}$ von Elementen aus $S \cup S^{-1}$, wobei $S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$ ist, im folgenden Sinne: $s_i = v_i^{-1}v_{i+1}$. D. h., die Kante e_i liegt im Cayley-Graphen wegen des Erzeugers s_i oder s_i^{-1}. Für das Produkt der s_i gilt dann $s_0 \cdots s_{k-1} = v_0^{-1}v_k$.

Zusammen mit Lemma 1.1.3 können wir Satz 1.2.5 in Analogie zu Satz 1.1.4 auch folgendermaßen notieren:

Satz 1.2.7. *Jede (endlich erzeugte) Gruppe ist Untergruppe der Automorphismengruppe eines zusammenhängenden (lokal-endlichen) Graphen.* □

Es gilt sogar folgender stärkerer Satz für endlich erzeugte Gruppen.

Satz 1.2.8. *Jede endlich erzeugte Gruppe ist isomorph zu der Automorphismengruppe eines Graphen.*

Diesen können wir zusammenhängend und lokal-endlich wählen.

Beweis. Sei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem der Gruppe G. Sei Γ_G, S der gerichtete Cayley-Graph von G und S. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei T_i ein Baum, der aus einem Weg P_i der Länge 3 besteht, sodass von der einen inneren Ecke x_i ein neuer Weg der Länge 1 startet und von der anderen inneren Ecke y_i ein Weg der Länge $i + 1$. Offenbar muss jeder Automorphismus von T_i, der die Endecken von P_i mengenweise festhält, den gesamten Baum punktweise fixieren. Beachte, dass alle Bäume T_i verschieden sind. In $\Gamma_{G,S}$ ersetzen wir nun jede gerichtete Kante, die von g nach gs_i geht, durch T_i, wobei g die Endecke von P_i ist, die benachbart zu x_i ist und gs_i die Endecke von P_i ist, die zu y_i benachbart ist. Sei Γ der entstandene Graph. Dieser ist offenbar zusammenhängend und lokal-endlich.

[2] Ein Graph ist **lokal-endlich**, wenn jede Ecke endlichen Grad hat.

Sei φ ein Automorphismus von Γ. Dann muss φ alle Ecken aus Γ, die nicht bereits in $\Gamma_{G,S}$ waren, als Menge festlassen und ebenso alle Ecken, die bereits in $\Gamma_{G,S}$ lagen. Somit induziert φ eine Bijektion der Eckenmenge von $\Gamma_{G,S}$. Da die Bäume T_i verschieden sind, wird der Baum, der die gerichtete Kante e aus $\Gamma_{G,S}$ ersetzte wieder auf eine solche Kante abgebildet und damit induziert φ einen Automorphismus $\overline{\varphi}$ von $\Gamma_{G,S}$. Sei $g \in G$, sodass $\overline{\varphi}(1) = g$. Da $\overline{\varphi}$ die Kanten zu dem Erzeuger s_i wieder auf solche abbildet und auch ihre Orientierung erhält, folgt, dass der Nachbar s_i von 1 durch $\overline{\varphi}$ auf den Nachbarn gs_i von g abgebildet wird. Induktiv folgt, dass g und $\overline{\varphi}$ auf $\Gamma_{G,S}$ übereinstimmmen und dass jeder andere Automorphismus ψ von Γ, der 1 auf g abbildet, mit φ übereinstimmt. Wir erhalten eine injektive Abbildung Φ von der Automorphismengruppe von Γ nach G. Umgekehrt induziert jedes $g \in G$ einen Automorphismus φ_g von Γ mit $\Phi(\varphi_g) = g$. Also ist Φ auch surjektiv. Zudem ist leicht einzusehen, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also ist die Automorphismengruppe von Γ isomorph zu G. □

Definition. Eine Gruppe G operiere auf X. Sie operiert **transitiv** auf X, falls für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ existiert.

Ist $X = (V, E)$ ein Graph, so operiert G **(Ecken-)transitiv** auf X (bzw. **Kanten-transitiv** auf X), falls die auf V (bzw. auf E) induzierte Operation transitiv ist.

Bemerkung 1.2.9. Jede Gruppe operiert transitiv und frei auf jedem ihrer Cayley-Digraphen, da die Linksmultiplikation einer Gruppe auf sich selbst transitiv und frei ist.

Proposition 1.2.10. *Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G. Die Linksmultiplikation auf G induziert eine freie Operation auf dem Cayley-Graphen von G und S genau dann, wenn S keine Involution enthält.*

Beweis. Jedes $s \in S$ mit $s^2 = 1$ fixiert die Kante $1s$. Somit kann die Operation nicht frei sein.

Sei umgekehrt die Operation nicht frei. Weil die auf den Ecken induzierte Operation offenbar frei ist, ist die auf den Kanten induzierte Operation nicht frei. Es existiert also ein $g \in G$ mit $g \neq 1$ und eine Kante uv mit $g(uv) = uv$. OBdA sei $s \in S$ mit $u = vs$. Gilt $gu = u$, so impliziert dies $g = 1$. Also gilt

$$v = gu = g(vs) = (gv)s = us = vs^2$$

und damit $s^2 = 1$. Da $s \neq 1$, ist s eine Involution. □

1.3 Satz von Sabidussi

In diesem Abschnitt werden wir ein erstes Ergebnis erzielen, wie wir aus einer Operation auf einem Graphen Rückschlüsse über die operierende Gruppe erzielen können: wir werden eine Art Umkehrung der starken Version des Satzes von Cayley beweisen.

Definition. Eine Gruppe G operiere auf einem zusammenhängenden Graphen Γ. Ein **Fundamentalbereich** der Operation von G auf Γ ist ein zusammenhängender Teilgraph, der aus jeder Bahn (auf den Ecken) genau ein Element enthält.

A priori ist es nicht klar, dass zu jeder Operation auf einem Graphen auch ein Fundameltalbereich existiert. Dies wird uns aber durch unseren nächsten Satz geliefert.

Satz 1.3.1. *Für jede Operation einer Gruppe auf einem zusammenhängenden Graphen existiert ein Fundamentalbereich.*

Beweis. Sei G eine Gruppe, die auf einem zusammenhängenden Graphen $\Gamma = (V, E)$ operiert. OBdA dürfen wir annehmen, dass Γ mindestens eine Ecke hat. Sei $\mathcal{F}_G$ die Menge aller zusammenhängenden Teilgraphen von Γ, die höchstens eine Ecke aus jeder Bahn enthält. Offenbar ist $\mathcal{F}_G$ nicht leer (es enthält den leeren Graphen und jeden Teilgraphen auf genau einer Ecke) und jede Kette in $\mathcal{F}_G$ hat eine obere Schranke (die Vereinigung ihrer Elemente). Nach dem Lemma von Zorn existiert also ein maximales Element F in $\mathcal{F}_G$.

Wir werden zeigen, dass F ein Fundamentalbereich ist. Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert eine Ecke $x \in V$, sodass die Bahn Gx keine Ecke aus F enthält. Sei P ein Weg in Γ von x zu einer Ecke von F. Dann gibt es auf P nach dessen Wahl zwei benachbarte Ecken u, v, sodass Gu keine Ecke aus F enthält, aber Gv schon. Sei $g \in G$ mit $gv \in V(F)$. Dann ist gu in der gleichen Bahn wie u; also enthält $G(gu)$ keine Ecke aus F. Zudem hat gu den Nachbarn gv in F. Somit ist $F' = (V(F) \cup \{gu\}, E(F) \cup \{\{gv, gu\}\})$ ein zusammenhängender Teilgraph von Γ, der nach seiner Wahl auch in $\mathcal{F}_G$ liegt. Dies widerspricht der Maximalität von F und somit ist F ein Fundamentalbereich. $\square$

Satz 1.3.2. *Sei F ein Fundamentalbereich der Operation der Gruppe G auf dem zusammenhängenden Graphen Γ. Sei S die Menge derjenigen $g \in G$, für die*

$$V(gF) \cap (V(F) \cup N(V(F))) \neq \emptyset$$

gilt, d. h., für die gF eine Ecke aus F oder einen Nachbarn einer solchen enthält. Dann ist S ein Erzeugendensystem für G.

Beweis. Sei $g \in G$. Wir werden g als endliches Produkt von Elementen aus $S \cup S^{-1}$ schreiben. Sei dazu $v \in V(F)$ und sei P ein Weg von v zu gv. Sei $(F = g_0F, g_1F, \dots, g_nF = gF)$ eine endliche Folge von Bildern von F unter Elementen aus G mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Jede Ecke aus P liegt in einem g_iF.

(2) g_iF und $g_{i+1}F$ haben eine gemeinsame Ecke oder g_iF hat eine Ecke, die einen Nachbarn in $g_{i+1}F$ hat.

Dass eine solche Folge existiert, lässt sich folgendermaßen einsehen: Zu jeder Ecke x_i auf $P = x_1 \dots x_m$ wählen wir ein g_i mit $x_i \in V(g_iF)$. Dann gilt die Aussage für die Folge $(g_0F, g_1F, \dots, g_mF, g_{m+1}F)$ mit $g_0 = 1$ und $g_{m+1} = g$.

Wir werden induktiv zeigen, dass jedes g_i sich als Produkt von Elementen aus S schreiben lässt. Für g_0 und g_1 ist dies klar nach Wahl der g_i. Aufgrund der Eigenschaft (2) gilt für $F = g_i^{-1}g_iF$ und $g_i^{-1}g_{i+1}F$, dass sie eine gemeinsame Ecke haben oder dass eine Ecke aus F einen Nachbarn in $g_i^{-1}g_{i+1}F$ hat. In beiden Fällen gilt nach der Definition von S, dass $g_i^{-1}g_{i+1}$ ein Element von S ist. Nach Induktion ist g_{i+1} ein Element von $\langle S\rangle$. Es folgt $g = g_n \in \langle S\rangle$, also $G = \langle S\rangle$. □

Bemerkung. Das durch Satz 1.3.2 gewonnene Erzeugendensystem ist in der Regel kein minimales Erzeugendensystem (selbst wenn wir das neutrale Element ignorieren), wie man sich leicht an folgendem Beispiel klar machen kann. Als Gruppe betrachten wir die Automorphismen des vollständigen Graphen auf drei Ecken, die wir auch auf diesem Graphen Γ operieren lassen. Dann ist der Fundamentalbereich eine einzelne Ecke und jeder Automorphismus von Γ kommt in das Erzeugendensystem S von Γ. Somit enthält S die vollständige Automorphismengruppe von Γ, die isomorph zu symmetrischen Gruppe S_3 ist. Da es minimale Erzeugendensysteme für S_3 mit zwei Elementen gibt, kann S kein solches sein.

Als eine Anwendung werden wir den Satz von Sabidussi beweisen, der Cayley-Graphen charakterisiert.

Satz 1.3.3 (Satz von Sabidussi)**.** *Ein zusammenhängender Graph, auf dem eine Gruppe transitiv und frei operiert, ist (bis auf Mehrfachkanten) der unterliegende ungerichtete Graph eines Cayley-Graphen.*

Beweis. Sei Γ ein zusammenhängender Graph und G eine Gruppe, die auf Γ transitiv und frei operiert. Sei $v \in V(\Gamma)$. Da G transitiv auf Γ operiert, ist $(\{v\}, \emptyset)$ ein Fundamentalbereich.

Sei $S \subseteq G$ eine minimale Teilmenge von G, sodass $S \cup S^{-1}$ das Erzeugendensystem aus Satz 1.3.2 ist. Wir wollen zeigen, dass Γ der unterliegende ungerichtete Graph $\Gamma_{G,S}$ des Cayley-Graphen von G und S ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$\varphi\colon \Gamma_{G,S} \to \Gamma,\ g \mapsto gv.$$

Die Transitivität der Operation auf Γ impliziert die Surjektivität von φ. Weil G frei operiert, ist φ auch injektiv, also ist φ bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass sowohl Kanten als auch Nicht-Kanten durch φ erhalten bleiben. Sei dazu $\{u, w\} \subseteq V(\Gamma)$ eine Eckenmenge mit zwei Elementen. Wegen der Transitivität von G auf Γ existiert ein $g \in G$ mit $gu = v$. Indem wir $\{v, gw\}$ statt $\{u, w\}$ betrachten, dürfen wir annehmen, dass $u = v$ gilt. Es existiert ein $h \in G$ mit $w = hv$. Ist $vw \in E(\Gamma)$, so gilt $h \in S \cup S^{-1}$ nach der Wahl von S und damit sind auch $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ benachbart. Ist umgekehrt $vw \notin E(\Gamma)$, so gilt $h \notin S \cup S^{-1}$ und $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ können deswegen nicht benachbart sein. Also ist φ ein Graphenisomorphismus. □

Kapitel 2

Freie Gruppen

2.1 Freie Gruppen und Bäume

Definition. Sei S eine Menge. Eine endliche Folge der Form $w = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ mit $s_i \in S$ und $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ heißt ein **Wort** über $S \cup S^{-1}$. Wir nennen $|w| := n$ die **Länge** von w. Das Wort ist **reduziert**, falls es kein $i \leq n-1$ mit $s_i^{\varepsilon_i} = s_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}$ gibt. Für $s, s_i \in S$, $\varepsilon, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ nennen wir ein Wort $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ eine **elementare Reduktion** des Wortes $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_i^{\varepsilon_i} s^{\varepsilon} s^{-\varepsilon} s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \dots s_n^{\varepsilon_n}$. Ein Wort v ist eine **freie Reduktion** eines Wortes u, falls es eine endliche Kette $u = w_1, \dots, w_n = v$ von Wörter gibt, sodass w_{i+1} eine elementare Reduktion von w_i ist, und falls v reduziert ist.

Eine Gruppe G heißt **frei** mit dem **freien Erzeugendensystem** $S \subseteq G$, falls $\langle S \rangle = G$ gilt und es kein nicht-triviales reduziertes Wort w über $S \cup S^{-1}$ mit $w = 1$ in G gibt. Wir nennen $|S|$ den **Rang** von G.

Sind $w = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ und $v = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_m^{\varepsilon_m}$ Wörter über $S \cup S^{-1}$, so ist $wv = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} t_1^{\varepsilon_1} \dots t_m^{\varepsilon_m}$ die **Konkatenation** von w und v.

Hinweis. Insbesondere gilt für ein freies Erzeugendensystem S, dass $1 \notin S$ ist, da das Wort 1 vom trivialen Wort über $S \cup S^{-1}$, welches das leere Wort ist, verschieden ist.

Beispiel 2.1.1. Die additive Gruppe $\mathbb{Z}$ ist eine freie Gruppe vom Rang 1.

Hinweis. A priori ist es nicht klar, dass der Rang einer freien Gruppe wohldefiniert ist. Wir werden dies in Abschnitt 2.2 beweisen.

Zunächst wollen wir sicherstellen, dass es überhaupt freie Gruppen gibt.

Satz 2.1.2. *Sei S eine Menge. Dann existiert eine freie Gruppe, für die S ein freies Erzeugendensystem ist.*

Zunächst werden wir den Standardbeweis vom Satz 2.1.2 skizzieren. Anschließend jedoch einen etwas stärkeren Satz beweisen, der Satz 2.1.2 als Teilaussage enthält.

Beweisskizze von Satz 2.1.2. Auf der Menge der Wörter über $S \cup S^{-1}$ definieren wir eine Relation $\sim$ mittels $v \sim w$ genau dann, wenn es eine Folge $v = w_1, \ldots, w_n = w$ gibt, sodass w_i eine elementare Reduktion von w_{i+1} ist oder umgekehrt. Offenbar ist diese Relation eine Äquivalenzrelation. Von dieser Relation kann gezeigt werden, dass jede Äquivalenzklasse genau ein reduziertes Wort enthält. Anschließend wird auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Multiplikation definiert mittels $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ für je zwei Wörter α, β über $S \cup S^{-1}$, wobei $\alpha\beta$ deren Konkatenation ist. Von dieser Multiplikation kann dann gezeigt werden, dass sie die Menge der Äquivalenzklassen zu einer freien Gruppe macht.

Streng genommen ist dabei S gar kein freies Erzeugendensystem für F, da S keine Teilmenge von F ist. Da aber jedes $s \in S$ selbst ein reduziertes Wort ist, können wir s mit $[s]$ identifizieren, um auch dieser Formalie Rechnung zu tragen. □

Hinweis. Da für die im Beweis von Satz 2.1.2 verwendete Äquivalenzrelation jede Äquivalenzklasse genau ein reduziertes Wort enthält, ist es möglich (und im Hinblick auf das Folgende auch sinnvoll) von den Elementen der freien Gruppe als reduzierte Wörter zu denken. Dabei muss natürlich aufgepasst werden, dass das Produkt zweier solcher Elemente nicht einfach deren Konkatenation ist, sondern eine freie Reduktion ihrer Konkatenation, die eindeutig bestimmt ist, weil jede Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ genau ein reduziertes Wort enthält.

Satz 2.1.3. *Sei S eine Menge. Es existiert eine freie Gruppe G mit S als freiem Erzeugendensystem, die transitiv und frei auf einem Baum T operiert.*

Beweis. Wir definieren uns einen Graphen T. Seine Eckenmenge V sei die Menge der reduzierten Wörter über $S \cup S^{-1}$ (inklusive des leeren Worts) und seine Kantenmenge E definieren wir folgendermaßen: von dem reduzierten Wort $s_1 \ldots s_n$ mit $s_i \in S \cup S^{-1}$ fügen wir für jedes $s \in S$ die Kante $\{s_1 \ldots s_n, s_1 \ldots s_n s\}$ hinzu, falls $s \neq s_n^{-1}$ und die Kante $\{s_1 \ldots s_n, s_1 \ldots s_{n-1}\}$ sonst, wobei wir Mehrfachkanten vermeiden. Um zu zeigen, dass T zusammenhängend ist, genügt es einzusehen, dass jedes reduzierte Wort in der gleichen Komponente liegt wie das leere Wort[1]. Da für das Wort $s_1 \ldots s_n$ die Eckenfolge $\emptyset, s_1, s_1 s_2, \ldots, s_1 \ldots s_n$ einen Weg vom leeren Wort zu $s_1 \ldots s_n$ definiert, ist T zusammenhängend.

Nehmen wir an, dass T einen Kreis C enthält. Dieser enthält eine Ecke $u = u_1 \ldots u_n$, deren Wort maximale Länge unter allen Wörtern auf C hat. Nach der Definition der Kanten haben dann beide Nachbarn von u auf C die Länge $|u| - 1$ und müssen beide das Wort $u_1 \ldots u_{n-1}$ sein. Dann war C aber kein Kreis. Also haben wir gezeigt, dass T ein Baum ist.

Für jedes $s \in S \cup S^{-1}$ definieren wir eine Abbildung φ_s auf V mittels

$$\varphi_s(s_1 \ldots s_n) = \begin{cases} s_2 \ldots s_n, & \text{falls } s = s_1^{-1}, \\ s s_1 \ldots s_n, & \text{falls } s \neq s_1^{-1}. \end{cases}$$

[1] Das leere Wort bezeichnen wir hier mit $\emptyset$.

Durch φ_s werden offensichtlich Kanten auf Kanten und Nicht-Kanten auf Nicht-Kanten abgebildet, d. h., φ_s ist ein Automorphismus von T. Zudem ist die Gleichung $\varphi_s^{-1} = \varphi_{s^{-1}}$ leicht einzusehen.

Sei $\Phi_S = \{\varphi_s \mid s \in S\}$ und sei G die von Φ_S erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(T)$. Wir werden zeigen, dass G eine freie Gruppe ist, die transitiv und frei auf T operiert und von Φ_S frei erzeugt wird.

Sei $\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n}$ ein reduziertes Wort über $\Phi_S \cup \Phi_S^{-1}$. Dann gilt $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$, weil $\varphi_s^{-1} = \varphi_{s^{-1}}$ und weil das Wort reduziert ist. Somit ist $s_1 \dots s_n$ ein reduziertes Wort über $S \cup S^{-1}$ und es gilt $\emptyset\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n} = s_1 \dots s_n \neq \emptyset$. Also folgt $\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n} \neq id$ und G ist eine freie Gruppe mit dem freien Erzeugendensystem Φ_S.

Da ein Wort $s_1 \dots s_n$ das Bild des leeren Wortes unter $\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n}$ ist, operiert G transitiv auf T. Sei nun $v \in V$ und $\varphi \in F$ mit $\varphi(v) = v$. Weil G transitiv auf T operiert, dürfen wir nach Lemma 1.1.10 annehmen, dass v das leere Wort ist. Sei nun $\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n}$ das kürzeste Wort über $\Phi_S \cup \Phi_S^{-1}$ mit $\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n} = \varphi$. Also gilt insbesondere $\varphi_{s_i}^{-1} \neq \varphi_{s_{i+1}}$ und $s_i^{-1} \neq s_{i+1}$ für alle $i < n$. Also ist $s_1 \dots s_n$ ein reduziertes Wort. Es gilt $\emptyset = \varphi(\emptyset) = s_1 \dots s_n$. Da $s_1 \dots s_n$ reduziert ist, folgt $n = 0$ und $\varphi = id$. Somit operiert G frei auf den Ecken von T. Wir müssen noch zeigen, dass G auch frei auf den Kanten von T operiert. Sei dazu $e \in E$. Da G transitiv auf T operiert, können wir erneut nach Lemma 1.1.10 annehmen, dass $e = \{\emptyset, s\}$ für ein $s \in S \cup S^{-1}$ gilt. Angenommen, es gibt ein $\varphi = \varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_n}$ mit $\varphi(e) = e$ und $\varphi \neq id$, wobei die Darstellung von φ mittels der φ_{s_i} kürzest möglich ist. Da G frei auf den Ecken von T operiert, wissen wir $\varphi(\emptyset) \neq \emptyset$; also gilt $\varphi(\emptyset) = s$ und $\varphi(s) = \emptyset$. Es gilt $\varphi_s(\emptyset) = s$ und, weil die Operation von G auf T frei auf den Ecken von T operiert, folgern wir $\varphi = \varphi_s$. Aber es gilt $\varphi_s(s) = ss \neq \emptyset = \varphi(s)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass G frei auf T operiert.

Wie in der Beweisskizze von Satz 2.1.2 können wir mittels eines formalen Tricks garantieren, dass G von S anstatt von $\{\varphi_s \mid s \in S\}$ erzeugt wird. $\square$

Bevor wir auf die Beziehungen zwischen Bäumen und freien Gruppen genauer eingehen, zeigen wir eine wichtige Charakterisierung freier Gruppen.

Satz 2.1.4 (Universelle Eigenschaft)**.** *Für eine eine Gruppe F und $S \subseteq F$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *F ist eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S.*

(ii) *Für jede Gruppe G und jede Abbildung $\varphi : S \to G$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon F \to G$, der φ fortsetzt.*

Für den Beweis dieses Satzes fassen wir die Elemente aus einer freien Gruppe als die Äquivalenzklassen von Wörtern auf, wie wir sie in der Beweisskizze von Satz 2.1.2 definiert haben.

Beweis von Satz 2.1.4. Sei zunächst F eine freie Gruppe und S ein freies Erzeugendensystem für F. Sei G eine weitere Gruppe und $\varphi\colon S \to G$ eine Abbildung. Dann definieren wir $\overline{\varphi}(s) := \varphi(s)$ und $\overline{\varphi}(s^{-1}) := (\varphi(s))^{-1}$ und für ein Wort

$w = s_1 \dots s_n$ über $S \cup S^{-1}$ definieren wir $\overline{\varphi}(w) := \overline{\varphi}(s_1)\dots\overline{\varphi}(s_n)$. Dann ist $\overline{\varphi}$ per definitionem ein Gruppenhomomorphismus, sobald wir sichergestellt haben, dass $\overline{\varphi}$ wohldefiniert ist. Ist aber ein Wort $s_1 \dots s_n$ eine elementare Reduktion des Wortes $s_1 \dots s_i t t^{-1} s_{i+1} \dots s_n$, so gilt:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(s_1 \dots s_n) &= \overline{\varphi}(s_1)\dots\overline{\varphi}(s_n)\\ &= \overline{\varphi}(s_1)\dots\overline{\varphi}(s_i)\overline{\varphi}(t)\overline{\varphi}(t^{-1})\overline{\varphi}(s_{i+1})\dots\overline{\varphi}(s_n)\\ &= \overline{\varphi}(s_1 \dots s_i t t^{-1} s_{i+1} \dots s_n).\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\varphi}$ wohldefiniert auf den Äquivalenzklassen der Wörter und induziert damit einen Gruppenhomomorphismus $F \to G$, der φ fortsetzt. Andererseits muss jeder Gruppenhomomorphismus die beiden Bedingungen $\overline{\varphi}(s^{-1}) = (\varphi(s))^{-1}$ und $\overline{\varphi}(w) = \overline{\varphi}(s_1)\dots\overline{\varphi}(s_n)$ erfüllen. Deswegen ist $\overline{\varphi}$ eindeutig.

Es gelte nun (ii). Sei G eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S und sei $\varphi\colon F \to G$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(s) = s$ für alle $s \in S$. Nehmen wir an, dass F nicht frei ist. Dann existiert ein nicht-triviales reduziertes Wort $s_1 \dots s_n$ über $S \cup S^{-1}$ mit $s_1 \dots s_n = 1$. Es folgt

$$1 = \varphi(s_1 \dots s_n) = \varphi(s_1)\dots\varphi(s_n) = s_1 \dots s_n.$$

Also existiert in G ein nicht-triviales reduziertes Wort $w = \varphi(s_1)\dots\varphi(s_n)$ mit $w = 1$, ein Widerspruch zur Definition der freien Gruppe. Also ist F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. □

Eine direkte Konsequenz der universellen Eigenschaft freier Gruppen ist die folgende (wobei wir noch immer nicht wissen, ob der Rang einer freien Gruppe wohldefiniert ist).

Korollar 2.1.5. *Je zwei freie Gruppen vom gleichen Rang sind isomorph.*

Beweis. Seien F, G zwei freie Gruppen gleichen Ranges. OBdA dürfen wir annehmen, dass beide die Menge S als freies Erzeugendensystem haben. Dann existieren nach Satz 2.1.4 zwei Gruppenhomomorphismen $\varphi\colon F \to G$ und $\psi\colon G \to F$ mit $\varphi|_S = id$ und $\psi|_S = id$. Dann gilt $\varphi(\psi(s)) = s$. Da F von S erzeugt wird, gilt somit $\varphi\psi = id$ und damit sind φ und ψ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

Freie Gruppen und Bäume weisen noch mehr Beziehungen auf als die in Satz 2.1.3 gezeigten. Diese wollen wir im Folgenden weiter untersuchen.

Lemma 2.1.6. *Jeder Cayley-Graph einer freien Gruppe und eines ihrer freien Erzeugendensysteme ist ein Baum.*

Beweis. Sei G eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S und sei Γ der Cayley-Graph von G und S. Wenn Γ einen Kreis enthält, so enthält er auch einen Kreis, der die Ecke 1 enthält, da G nach Bemerkung 1.2.9 transitiv auf Γ operiert. Zu diesem Kreis gehört ein geschlossener Kantenzug, der bei der Ecke 1 startet und endet. Dieser entspricht gemäß Bemerkung 1.2.6 einem Wort über $S \cup S^{-1}$. Da dieses Wort reduziert sein muss, kann G nicht frei sein. Da jeder Cayley-Graph zusammenhängend ist, zeigt dieser Widerspruch, dass Γ ein Baum ist. $\square$

Die Umkehrung von Lemma 2.1.6 gilt im Allgemeinen nicht, wie folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 2.1.7. 1. Der Cayley-Graph zur zyklischen Gruppe $C_2 = \langle a \rangle$ und dem Erzeugendensystem $\{a\}$ ist ein Baum auf zwei Ecken.

2. Der Cayley-Graph zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ mit $S = \{1, -1\}$ ist ebenfalls ein Baum.

Die im Beispiel 2.1.7 aufgetretenen Probleme sind im Wesentlichen die einzigen, die einer Umkehrung von Lemma 2.1.6 widersprechen, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 2.1.8. *Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G mit $st \neq 1$ für alle $s, t \in S$. Wenn der Cayley-Graph $\Gamma_{G,S}$ ein Baum ist, so ist G eine freie Gruppe und S ein freies Erzeugendensystem von G.*

Beweis. Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Wir werden zeigen, dass F und G isomorph sind. Nach Satz 2.1.4 gibt es einen Homomorphismus $\varphi\colon F \to G$, dessen Einschränkung auf S die Identität ist. Aus $\langle S \rangle = G$ folgt, dass φ surjektiv ist. Um zu zeigen, dass F und G isomorph sind, müssen wir nur noch die Injektivität von φ verifizieren. Nehmen wir dazu an, dass es ein von 1 verschiedenes reduziertes Wort über $S \cup S^{-1}$ in $\ker(\varphi)$ gibt. Sei $s_1 \dots s_n$ ein solches minimaler Länge. Wegen $\varphi(s) = s \neq 1$ für alle $s \in S$ muss $n \geq 2$ gelten. Falls $n = 2$ ist, so gilt $1 = \varphi(s_1 s_2) = \varphi(s_1)\varphi(s_2) = s_1 s_2$. Da $s_1 s_2$ reduziert ist, widerspricht dies der Voraussetzung $st \neq 1$ für alle $s, t \in S$. Also gilt $n \geq 3$. Dann sind wegen der Minimalität von n die Gruppenelemente $\varphi(s_1 \dots s_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$ verschieden, denn gäbe es $i < j < n$ mit $s_1 \dots s_i = s_1 \dots s_j$, so folgt, dass $s_{i+1} \dots s_j$ ein kürzeres Wort über $S \cup S^{-1}$ mit $\varphi(s_{i+1} \dots s_j) = 1$ ist. Da die Gruppenelemente $\varphi(s_1 \dots s_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$ verschieden sind, bilden sie somit einen Kreis in $\Gamma_{G,S}$. Dieser Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\Gamma_{G,S}$ ein Baum ist, zeigt die Injektiviät von φ und damit die Behauptung. $\square$

Wir können sogar die Operation auf einem Baum nutzen, um freie Gruppen zu charakterisieren.

Satz 2.1.9. *Genau dann ist eine Gruppe frei, wenn sie frei auf einem Baum operiert.*

Beweis. Da nach Bemerkung 1.2.9 jede Gruppe frei auf ihrem Cayley-Graphen operiert, folgt aus Lemma 2.1.6 die erste Implikation.

Die Gruppe G operiere frei auf dem Baum T. Sei T' ein Fundamentalbereich dieser Operation, der nach Satz 1.3.1 existiert. Weil G frei auf T operiert, existiert genau ein $g \in G$ mit $T' \cap gT' \neq \emptyset$, nämlich $g = 1$; dies gilt, weil

$gv \neq v$ für alle $v \in V(T')$ und alle $g \neq 1$ gilt und weil nach der Definition eines Fundamentalbereichs $gv \in V(T')$ die Gleichung $gv = v$ impliziert.

Eine Kante nennen wir **essentiell**, falls genau eine ihrer Endecken in T' liegt. Weil T' ein Fundamentalbereich ist, gibt es für jede essentielle Kante e ein g_e, sodass die Ecke von e, die außerhalb von T' liegt, in g_eT' enthalten ist. Sei

$$\widetilde{S} := \{g_e \in G \mid e \text{ ist essentiell}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Menge $\widetilde{S}$ folgende Eigenschaften hat:

(i) $1 \notin \widetilde{S}$;

(ii) $\widetilde{S}$ enthält keine Involution;

(iii) sind e, e' essentielle Kanten mit $g_e = g_{e'}$, so gilt $e = e'$;

(iv) für $g \in \widetilde{S}$ gilt $g^{-1} \in \widetilde{S}$;

(v) für jedes $g \in G$ mit $V(gT') \cap (V(T') \cup N(V(T'))) \neq \emptyset$ gilt $g = 1$ oder $g \in \widetilde{S}$.

Während (i) direkt aus der Definition von $\widetilde{S}$ folgt, brauchen wir für die restlichen Aussagen kleine Beweise. Die Aussage (ii) gilt, weil eine Involution g_e den Teilbaum g_eT' auf T' abbildet und somit die im Baum T eindeutige Kante e zwischen T' und g_eT' von g_e fixieren muss, was ein Widerspruch dazu ist, dass die Operation von G auf T frei ist. Weil T ein Baum ist und somit genau eine Kante die Teilbäume T' und g_eT' miteinander verbindet, folgt (iii). Da e die Teilbäume T' und g_eT' verbindet, verbindet $g_e^{-1}e$ die Teilbäume $g_e^{-1}T'$ und T' und es gilt (iv). Sei $g \in G$ mit $V(gF) \cap (V(F) \cup N(V(F))) \neq \emptyset$. Ist $g \neq 1$, so haben wir oben bereits eingesehen, dass $gF \cap F = \emptyset$ gilt. Also enthält gT' eine Endecke einer essentiellen Kante e und zwar diejenige, die nicht in T', sondern in g_eT' liegt. Somit gilt $gg_e^{-1}T' \cap T' \neq \emptyset$. Wie wir bereits oben gesehen haben, folgt dann aber $gg_e^{-1} = 1$, also $g = g_e$. Dies zeigt (v).

Sei nun $S \subseteq \widetilde{S}$ minimal mit $S \cup S^{-1} = \widetilde{S}$. Dies ist wegen (iv) möglich. Wegen (ii) enthält S somit zu keinem $s \in S$ auch das Element s^{-1}. Aufgrund von (v) schließen wir aus Satz 1.3.2, dass $\widetilde{S} \cup \{1\}$, und somit auch S, die Gruppe G erzeugt. Es bleibt zu zeigen, dass S ein freies Erzeugendensystem ist. Dazu genügt es nach Lemma 2.1.8 zu zeigen, dass der Cayley-Graph $\Gamma_{G,S}$ ein Baum ist. Nehmen wir an, dass $\Gamma_{G,S}$ kein Baum ist. Da er zusammenhängend ist, gibt es also einen Kreis $h_0 \dots h_n h_0$ in $\Gamma_{G,S}$ für ein $n \geq 2$. Zur Kante zwischen h_n und h_0 und zu jeder Kante zwischen h_i und h_{i+1} gehört ein Element $s_n := h_n h_0^{-1}$ bzw. $s_i := h_{i+1} h_i^{-1}$ aus $S \cup S^{-1}$ und zu diesen wiederum gehört nach (iii) genau eine essentielle Kante e_i für alle $1 \leq i \leq n$.

Für $j < n$ enthält der Teilbaum s_jT' zum einen eine Endecke v_j der Kante e_j und zum anderen auch eine Endecke w_j der Kante s_je_{j+1}. Da T' zusammenhängend ist, existiert in $h_js_jT' = h_{j+1}T'$ ein Weg P_j zwischen den Ecken

$h_j v_j$ und $h_j w_j$. Analog enthält T' einen Weg P_0 zwischen der Endecke v_0 in T' der Kante e_n und der Endecke w_0 in T' der Kante e_1. Dann ist

$$v_0 P_0 w_0 v_1 P_1 w_1 \dots v_n P_n w_n v_0$$

ein Kreis in T. Dieser Widerspruch zeigt mit Lemma 2.1.8, dass G eine freie Gruppe ist. $\square$

Wir ziehen aus dem Beweis von Satz 2.1.9 folgendes Korollar:

Korollar 2.1.10. *Sei T' ein Fundamentalbereich der freien Operation einer freien Gruppe G auf einem Baum T. Dann existiert ein freies Erzeugendensystem X von G, sodass für die in Satz 1.3.2 definierte Menge S gilt:*

$$S = X \cup X^{-1} \cup \{1\}. \qquad \square$$

Als ein Korollar aus dem Satz 2.1.9 erhalten wir einen zentralen Satz über freie Gruppen, spezieller über ihre Untergruppen.

Korollar 2.1.11 (Nielsen-Schreier Theorem)**.** *Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.*

Beweis. Sei H eine Untergruppe der freien Gruppe G. Dann operiert G frei auf einem Baum T nach Satz 2.1.9. Als Untergruppe von G operiert damit auch H frei auf T und ist nach Satz 2.1.9 eine freie Gruppe. $\square$

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Lemma abschließen, das uns die Existenz freier Untergruppen in beliebigen Gruppen garantiert.

Lemma 2.1.12 (Ping-Pong-Lemma)**.** *Die Gruppe G operiere auf X. Es seien $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I}$ mit $|I| \geq 2$ zwei Familien von nicht-leeren Teilmengen von X, sodass alle A_i paarweise disjunkt und alle B_i paarweise disjunkt sind und jedes A_i zu jedem B_j disjunkt ist. Wenn $g_i \in G$ mit $X \smallsetminus B_i \subseteq g_i A_i$ für alle $i \in I$ existieren, dann ist die Untergruppe $\langle g_i \mid i \in I\rangle$ von G frei.*

Beweis. Aus $X \smallsetminus B_i \subseteq g_i A_i$ folgt $X \smallsetminus g_i^{-1} B_i \subseteq A_i$ und damit $X \smallsetminus A_i \subseteq g_i^{-1} B_i$ und $g_i(X \smallsetminus A_i) \subseteq B_i$.

Sei $s_n \dots s_1$ ein Wort über $S \cup S^{-1}$ für $S := \{g_i \mid i \in I\}$. Seien $i, j \in I$ mit $s_1 \in \{g_j, g_j^{-1}\}$ und $s_n \in \{g_i, g_i^{-1}\}$. Falls $i = j$, wähle $k \in I \smallsetminus \{i\}$ und sonst setze $k := j$. Sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ mit $s_1 = g_j^{\varepsilon}$. Ist $k \neq j$, so sei $x \in A_k \cup B_k$. Ist $k = j$ und $\varepsilon = 1$, so sei $x \in B_j$. Ist $k = j$ und $\varepsilon = -1$, so sei $x \in A_j$. Mittels Induktion über ℓ folgt, dass $s_\ell \dots s_1 x \in B_m$, falls $s_\ell = g_m$ für ein $m \in I$, und $s_\ell \dots s_1 x \in A_m$, falls $s_\ell = g_m^{-1}$ für ein $m \in I$. Also liegt $s_n \dots s_1 x$ in A_i oder B_i und damit insbesondere nicht in der Menge $A_k \cup B_k$, die x enthält. Damit ist das Gruppenelement $s_n \dots s_1$ von 1 verschieden. Also muss $\langle S\rangle$ frei sein und frei von der Menge S erzeugt werden. $\square$

2.2 Rang freier Gruppen

Wie werden jetzt zeigen, dass der Rang einer freien Gruppe wohldefiniert ist.

Satz 2.2.1. *Je zwei freie Erzeugendensysteme einer freien Gruppe haben die gleiche Kardinalität.*

Beweis. Sei G eine Gruppe. Sind S und S' unendliche freie Erzeugendensysteme von G, so muss $|S| = |G| = |S'|$ gelten.

Sei S ein endliches freies Erzeugendensystem von G. Jeder Homomorphismus φ von G nach C_2 wird eindeutig durch die Einschränkung von φ auf S definiert. Andererseits kann jede Abbildung von S nach C_2 zu einem Homomorphismus fortgesetzt werden. Somit gibt es $2^{|S|}$ viele Homomorphismen von G nach C_2. Da diese Zahl andererseits nur von G abhängt, muss für jedes weitere freie Erzeugendensystem S' von G gelten: $2^{|S|} = 2^{|S'|}$. Also sind S und S' gleichmächtig. □

Somit ist der Rang einer freien Gruppe wohldefiniert. Es liegt nahe zu vermuten, dass für jede Untergruppe einer freien Gruppe F (die nach Korollar 2.1.11 selbst auch frei ist) ihr Rang höchstens so groß wie der Rang von F ist. Dies ist aber im Allgemeinen falsch, wie das folgende Korollar zeigt.

Proposition 2.2.2. *Sei G eine freie Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und sei H eine Untergruppe von G vom Index $k \in \mathbb{N}$. Dann ist H eine freie Gruppe vom Rang $k(n-1)+1$.*

Beweis. Sei T der Cayley-Graph von G und einem endlichen freien Erzeugendensystem S. Nach Lemma 2.1.6 ist T ein Baum. Da G frei auf seinem Cayley-Graphen operiert, operiert auch H frei auf T. Weil H endlichen Index in G hat und G transitiv auf T operiert, gibt es höchstens $|G : H|$ viele Bahnen der Operation von H auf T. Also ist jeder nach Satz 1.3.1 existierende Fundamentalbereich T' der Operation von H auf T endlich und hat die Größe $k = |G : H|$. Weil S endlich ist, ist T lokal-endlich und damit ist das in Korollar 2.1.10 gefundene freie Erzeugendensystem X von H endlich. Wir müssen nur noch zeigen, dass dieser Wert genau $k(n-1)+1$ ist.

Die Summe der Grade in T aller Ecken in T' ist $2n|T'| = 2nk$, da T ein $2n$-regulärer Baum ist. Der Teilbaum T' enthält $|T'|-1 = k-1$ Kanten, also gehen $2kn - 2(k-1) = 2(k(n-1)+1)$ Kanten von Ecken aus T' zu Ecken außerhalb von T'. □

Wir können das vorherige Resultat für beliebige endlich erzeugte Gruppen anwenden, um etwas über deren Untergruppen auszusagen:

Korollar 2.2.3. *Jede Untergruppe einer endlich erzeugten Gruppe von endlichem Index ist endlich erzeugt.*

Beweis. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $H \leq G$ mit $|G : H| \in \mathbb{N}$. Sei S ein endliches Erzeugendensystem für G und sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Dann existiert ein Epimorphismus $\varphi\colon F \to G$ mit

$\varphi|_S = id$. Sei H' das Urbild von H unter φ. Wir werden zeigen, dass $|F : H'| \leq |G : H|$ für den Index der Untergruppe H' von F gilt. Seien dazu $g, h \in F$ mit $gH' \neq hH'$. Dann gilt $h^{-1}g \notin H'$, also auch $\varphi(h^{-1})\varphi(g) = \varphi(h^{-1}g) \notin H$ und damit $\varphi(g)H \neq \varphi(h)H$. Es werden also verschiedene Nebenklassen von H' auf verschiedene Nebenklassen von H unter φ abgebildet und somit gilt $|F : H'| \leq |G : H|$. Nach Proposition 2.2.2 ist H' endlich erzeugt. Da $\varphi|_{H'}$ surjektiv von H' nach H abbildet und nach Satz 2.1.4 diese Abbildung bereits durch die Definition auf einem Erzeugendensystem von H' festgelegt ist, muss H von dessen Bild erzeugt werden und somit endlich erzeugt sein. $\square$

2.3 Präsentationen von Gruppen

Ein Korollar aus den Sätzen 2.1.2 und 2.1.4 ist das Folgende:

Korollar 2.3.1. *Jede Gruppe ist das Bild einer freien Gruppe.* $\square$

Dies nehmen wir zum Anlass, Präsentationen von Gruppen zu definieren.

Definition. Sei die Gruppe G das Bild einer freien Gruppe F unter einem Homomorphismus φ. Sei S ein freies Erzeugendensystem für F. Ein Wort w über $S \cup S^{-1}$ mit $\varphi(w) = 1$ nennen wir einen **Relator**. Eine Teilmenge $R \subseteq \ker(\varphi)$ heißt **Menge definierender Relatoren**, wenn $\langle R \rangle^{\trianglelefteq} = \ker(\varphi)$ gilt, wobei $\langle R \rangle^{\trianglelefteq}$ der kleinste Normalteiler von F ist, der R enthält.[2] Ist $uv \in \ker(\varphi)$, so nennen wir $\varphi(uv) = 1$ eine **Relation**. Eine Menge von Relationen heißt **Menge definierender Relationen**, falls die zugehörigen Relatoren eine Menge definierender Relatoren bilden.

Bemerkung. Der kleinste Normalteiler, der eine Teilmenge R einer Gruppe G enthält, muss auch R^{-1} enthalten, sowie alle $r^g = g^{-1}rg$ mit $r \in R$ und $g \in G$. Die endlichen Produkte von Elementen aus $R \cup R^{-1}$ und $R^g \cup (R^{-1})^g$ bilden bereits eine Normalteiler. Dieser muss bereits $\langle R \rangle^{\trianglelefteq}$ sein.

Definition. Sei S eine Menge und R eine Teilmenge einer freien Gruppe F mit freiem Erzeugendensystem S. Dann heißt $\langle S \mid R \rangle$ eine **Präsentation** einer Gruppe G, falls $G \cong F/\langle R \rangle^{\trianglelefteq}$ gilt, und wir schreiben $G = \langle S \mid R \rangle$. Alternativ kann R auch eine Menge definierender Relationen sein. Dann ist $\langle S \mid R \rangle$ eine **Präsentation** von G, falls für die Menge R' der R zugrundeliegenden Relatoren gilt, dass $\langle S \mid R' \rangle$ eine Präsentation von G ist.

Wir nennen G **endlich präsentiert**, falls es eine Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ von G gibt, sodass S und R endlich sind.

Beispiel 2.3.2. (1) Eine freie Gruppe F mit freiem Erzeugendensystem S hat die Präsentation $\langle S \mid \emptyset \rangle$.

(2) Endliche zyklische Gruppen C_n haben die Präsentation $\langle g \mid g^n \rangle$.

[2] Zur Erinnerung: (1) Eine Untergruppe U ist ein **Normalteiler**, falls $U^g = U$ für alle $g \in G$. (2) Kerne von Homomorphismen sind Normalteiler.

Satz 2.3.3. *Sei S eine Menge und R eine Menge von Wörtern über $S \cup S^{-1}$. Dann gibt es eine Gruppe mit Präsentation $\langle S \mid R\rangle$.*

Beweis. Sei F eine Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Dann hat die Gruppe $F/\langle R\rangle^{\trianglelefteq}$ die Präsentation $\langle S \mid R\rangle$. □

Wie freie Gruppen, haben auch Gruppen mit einer Präsentation eine universelle Eigenschaft:

Satz 2.3.4 (Universelle Eigenschaft)**.** *Sei $G = \langle S \mid R\rangle$ und sei F die freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Sei H eine Gruppe und $\varphi\colon F \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Ist $\varphi(r) = 1$ für alle $r \in R$, dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\psi\colon G \to H$ mit $\varphi(s) = \psi(s)$ für alle $s \in S$.*

Beweis. Wir definieren eine Abbildung $\psi\colon G \to H$ mittels $\psi(s) := \varphi(s)$ und $\psi(s^{-1}) := (\varphi(s))^{-1}$ für alle $s \in S$ und $\psi(s_1 \dots s_n) := \varphi(s_1)\dots\varphi(s_n)$ für alle $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Damit ist ψ eindeutig über die Gleichungen $\varphi(s) = \psi(s)$ bestimmt und es bleibt zu zeigen, dass ψ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Homomorphieeigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition von ψ. Es bleibt zu zeigen, dass ψ wohldefiniert ist. Nach Voraussetzung gilt $\langle R\rangle \leq \ker(\varphi)$. Da $\ker(\varphi)$ ein Normalteiler ist, folgt auch $\langle R\rangle^{\trianglelefteq} \leq \ker(\varphi)$. Also ist ψ wohldefiniert. □

Der Beweis für die Eindeutigkeit einer freien Gruppe für gegebenen Rang (Korollar 2.1.5) überträgt sich fast wörtlich auf unsere neue Situation:

Korollar 2.3.5. *Je zwei Gruppen mit der gleichen Präsentation sind isomorph.* □

2.4 Tietze-Transformationen

In diesem Abschnitt interessieren wir uns dafür, wie sich verschiedene Präsentationen derselben Gruppe zueinander verhalten. Dazu definieren wir uns vier Änderungsmöglichkeiten, wie wir aus einer gegebenen Präsentation eine neue erhalten.

Definition. Sei $G = \langle S \mid R\rangle$. Eine **Tietze-Transformation** ist eine der folgenden vier Veränderungen der Präsentation $\langle S \mid R\rangle$:

(1) Für $R' \subseteq \langle R\rangle^{\trianglelefteq}$ heißt der Übergang $\langle S \mid R\rangle \longrightarrow \langle S \mid R \cup R'\rangle$ **Hinzufügen redundanter Relatoren**.

(2) Für $R' \subseteq R$ mit $\langle R\rangle^{\trianglelefteq} = \langle R'\rangle^{\trianglelefteq}$ heißt der Übergang $\langle S \mid R\rangle \longrightarrow \langle S \mid R'\rangle$ **Entfernen redundanter Relatoren**.

(3) Für eine zu S disjunkte Menge S' und eine Menge $\{w_s \mid s \in S'\}$ von Wörtern über $S \cup S^{-1}$ heißt der Übergang $\langle S \mid R\rangle \longrightarrow \langle S \cup S' \mid R \cup \{s^{-1}w_s \mid s \in S'\}\rangle$ **Hinzufügen redudanter Erzeuger**.

(4) Ist $S = S_1 \dot\cup S_2$ und $R = R' \dot\cup \{s^{-1}w_s \mid s \in S_2\}$, wobei R' eine Menge von Relatoren über S_1 und $\{w_s \mid s \in S_2\}$ eine Menge von Wörtern über $S_1 \cup S_1^{-1}$ ist, heißt der Übergang $\langle S \mid R\rangle \longrightarrow \langle S_1 \mid R'\rangle$ **Entfernen redundanter Erzeuger**.

Unmittelbar aus der Definition erhalten wir folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.4.1. Ist $\langle S' \mid R'\rangle$ aus $\langle S \mid R\rangle$ durch eine Tietze-Transformation entstanden, so sind beide Gruppen isomorph.

Sind andererseits zwei verschiedene Präsentationen der gleichen Gruppe gegeben, so ist a priori nicht klar, ob wir sie durch Tietze-Transformationen in einander überführen können. Dies wird uns aber durch den nächsten Satz garantiert.

Satz 2.4.2. *Zwei Präsentationen definieren genau dann isomorphe Gruppen, wenn es eine endliche Folge von Tietze-Transformationen von der einen in die andere Präsentation gibt.*

Hinweis. In der Literatur wird oft eine Tietze-Transformation durch Hinzufügen/Entfernen *eines* Erzeugenden/Relators definiert. Dann entfällt die Endlichkeit der Folge im Satz 2.4.2. Stattdessen findet sich dann dort der Zusatz: *Sind die beiden Präsentationen endlich, so kann die Folge ebenfalls endlich gewählt werden.*

Beweis von Satz 2.4.2. Ist eine Präsentation durch endlich viele Tietze-Transformationen aus einer anderen entstanden, so sind beide Gruppen nach Bemerkung 2.4.1 isomorph.

Seien umgekehrt $G_1 := \langle S_1 \mid R_2\rangle$ und $G_2 := \langle S_2 \mid R_2\rangle$ Präsentationen isomorpher Gruppen und sei $\varphi\colon G_1 \to G_2$ ein Isomorphismus. OBdA seien S_1 und S_2 disjunkt. Für $s \in S_1$ sei w_s ein Wort über $S_2 \cup S_2^{-1}$ mit $\varphi(s) = w_s$ und für $s \in S_2$ sei w_s ein Wort über $S_1 \cup S_1^{-1}$ mit $\varphi^{-1}(s) = w_s$. Seien $i \neq j \in \{1, 2\}$. Wir betrachten die folgenden Tietze-Transformationen:

$$\begin{aligned}\langle S_i \mid R_i\rangle &\longrightarrow \langle S_1 \cup S_2 \mid R_i \cup \{s^{-1}w_s \mid s \in S_j\}\rangle \\ &\longrightarrow \langle S_1 \cup S_2 \mid R_i \cup \{s^{-1}w_s \mid s \in S_j\} \cup \{s^{-1}w_s \mid s \in S_i\} \cup R_j\rangle\end{aligned}$$

Da wir somit beide Gruppen durch Tietze-Transformationen in eine dritte Gruppe überführen können und Tietze-Transformationen unter Umkehrung der Überführungen abgeschlossen sind, können wir $\langle S_1 \mid R_1\rangle$ durch eine endliche Folge von Tietze-Transformationen in $\langle S_2 \mid R_2\rangle$ überführen. □

Wir interessieren uns dafür, ob und, falls ja, wie wir aus einer beliebigen Präsentation einer endlich präsentierbaren Gruppe eine endliche Präsentation dieser Gruppe finden. Dazu kümmern wir uns zunächst um das Erzeugendensystem.

Satz 2.4.3. *Sei $G = \langle S \mid R\rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Dann gibt es eine endliche Teilmenge S' von S und eine Menge R' an Relatoren über $S' \cup S'^{-1}$, sodass $G \cong \langle S' \mid R'\rangle$ gilt.*

Beweis. Sei X ein endliches Erzeugendensystem von G. Dann existiert für jedes $x \in X$ ein Wort w über $S \cup S^{-1}$ mit $w = x$. Somit reicht eine endliche Teilmenge S' von S, um jedes $x \in X$ als Wort über $S' \cup S'^{-1}$ darzustellen. Für jedes $s \in S \setminus S'$ können wir also auch Wörter v_s, w_s über $S' \cup S'^{-1}$ mit $s = v_s$ und $s^{-1} = w_s$ finden, sodass die freie Reduktion von $v_s w_s$ das leere Wort ergibt. Ersetzen wir in jedem Wort von R jedes Teilwort s durch v_s und jedes Teilwort s^{-1} durch w_s, so erhalten wir eine Menge R' an Relatoren mit $\langle S \mid R \rangle = \langle S' \mid R' \rangle$. □

Satz 2.4.4. *Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine endlich präsentierbare Gruppe und sei S endlich. Dann existiert eine endliche Teilmenge R' von R, sodass G isomorph zu $\langle S \mid R' \rangle$ ist.*

Beweis. Sei $\langle X \mid Q \rangle$ eine endliche Präsentation von G. Für $s \in S$ sei w_s ein Wort über $X \cup X^{-1}$ mit $s = w_s$ und für $x \in X \cup X^{-1}$ sei v_x ein Wort über $S \cup S^{-1}$ mit $x = v_x$. Mittels Tietze-Transformationen können wir folgende Veränderung der Präsentation durchführen:

$$\begin{aligned}\langle X \mid Q \rangle &\longrightarrow \langle S \cup X \mid Q \cup \{s^{-1} w_s \mid s \in S\} \rangle \\ &\longrightarrow \langle S \cup X \mid Q \cup \{s^{-1} w_s \mid s \in S\} \cup \{x^{-1} v_x \mid x \in X\} \rangle.\end{aligned}$$

Zudem können wir durch zwei Tietze-Transformationen die Menge Q durch die Menge $Q[S]$ ersetzen, die folgendermaßen gebildet wurde: für jedes $q \in Q$ wird jedes $x \in X \cup X^{-1}$ in q durch v_x ersetzt. Analog sei w'_s aus w_s durch Ersetzen jedes $x \in X \cup X^{-1}$ durch v_x für jedes $s \in S$ entstanden.

$$\begin{aligned}&\langle S \cup X \mid Q \cup \{s^{-1} w_s \mid s \in S\} \cup \{x^{-1} v_x \mid x \in X\} \rangle \\ \longrightarrow\ &\langle S \cup X \mid Q[S] \cup \{s^{-1} w'_s \mid s \in S\} \cup \{x^{-1} v_x \mid x \in X\} \rangle.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $Q[S]$ eine endliche Menge ist, da Q endlich ist. Nun sind aber die Erzeuger X überflüssig und wir entfernen sie:

$$\begin{aligned}&\langle S \cup X \mid Q[S] \cup \{s^{-1} w'_s \mid s \in S\} \cup \{x^{-1} v_x \mid x \in X\} \rangle \\ \longrightarrow\ &\langle S \mid Q[S] \cup \{s^{-1} w'_s \mid s \in S\} \rangle.\end{aligned}$$

Da $Q[S]$ und S endliche Mengen sind, ist $\langle S \mid Q[S] \cup \{s^{-1} w'_s \mid s \in S\} \rangle$ eine endliche Präsentation von G. Da jeder der endlich vielen Relatoren aus

$$Q[S] \cup \{s^{-1} w'_s \mid s \in S\}$$

in $\langle R \rangle^{\trianglelefteq}$ liegt, finden wir eine endliche Teilmenge R' von R mit $G = \langle S \mid R' \rangle$. □

Bemerkung 2.4.5. In der Übung werden wir sehen, dass es im Allgemeinen für eine gegebene Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ einer endlich präsentierten Gruppe G nicht möglich ist, endliche Teilmengen $S' \subseteq S$ und $R' \subseteq R$ mit $G = \langle S' \mid R' \rangle$ zu finden.

2.5 Produkte von Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Möglichkeiten erläutern, wie wir aus schon vorhandenen Gruppen neue gewinnen können. – Zumeist werden wir verschiedene Produkte bestehender Gruppen betrachten. Lediglich die sogenannte „HNN-Erweiterung“ spielt in dieser Hinsicht eine Ausnahme.

Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Das **direkte Produkt** $\prod_{i\in I} G_i$ der G_i ist auf dem kartesischen Produkt der G_i definiert, wobei die Multiplikation mittels $(g_i)_{i\in I} \cdot (h_i)_{i\in I} := (g_i h_i)_{i\in I}$ komponentenweise gegeben ist.

Beispiel 2.5.1. (1) $\mathbb{Z}^n$ mit komponentenweiser Addition ist das direkte Produkt von n Kopien von $\mathbb{Z}$.

(2) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gilt $C_m \times C_n = C_{mn}$.

2.5.1 Freie Produkte (mit Amalgamation)

Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie disjunkter Gruppen mit $G_i = \langle S_i \mid R_i\rangle$ und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i\colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Dann heißt die Gruppe

$$\left\langle \bigcup_{i\in I} S_i \mid \bigcup_{i\in I} R_i \cup \bigcup_{i\neq j\in I} \left\{(\iota_i(a))^{-1}(\iota_j(a)) \mid a \in A\right\} \right\rangle$$

freies Produkt der $(G_i)_{i\in I}$ mit Amalgamation über A und wir schreiben $G = *_{A,i\in I} G_i$. Falls $A = 1$ ist, so nennen wir das Produkt einfach **freies Produkt** und schreiben $G = *_{i\in I} G_i$.

Sind die Gruppen G_i nicht disjunkt, so können wir sie künstlich disjunkt machen, z. B. indem wir jedes $g \in G_i$ mit (g, i) identifizieren. In diesem Sinne definieren wir somit auch freie Produkte mit Amalgamation von nicht notwendigerweise disjunkten Familien $(G_i)_{i\in I}$.

Nach Satz 2.3.3 folgt sofort die Existenz des freien Produktes mit Amalgamation:

Satz 2.5.2. *Für jede Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Gruppen und weitere Gruppe A, für die Monomorphismen $\iota_i\colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren, existiert das freie Produkt mit Amalgamation $*_{A,i\in I} G_i$.* □

Beispiel 2.5.3. Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Sei $\mathcal{S}$ eine Partition von S. Für jedes $X \in \mathcal{S}$ sei F_X eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem X. Dann gilt $F \cong *_{X\in\mathcal{S}} F_X$.

Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i\colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Für jedes $i \in I$ sei X_i eine **Transversale** von $\iota_i(A)$ in G_i, d. h. eine Teilmenge von G_i, die aus jeder Rechtsnebenklasse von $\iota_i(A)$ in G_i genau ein Element enthält, wobei für die Nebenklasse $\iota_i(A)$ das Element 1 in X_i liege. Eine **reduzierte Form** ist eine endliche Folge $g_1 \dots g_n$ mit $g_j \in \bigcup_{i\in I} G_i \setminus \{1\}$, sodass aus $g_j \in G_i$ folgt: $g_{j+1} \notin G_i$, also sodass keine zwei aufeinanderfolgenden g_j aus der gleichen Gruppe G_i kommen. Eine **Normalform** über $(G_i)_{i\in I}$ und A ist eine endliche Folge $ag_1 \dots g_n$ mit $a \in A$ und $g_j \in \bigcup_{i\in I} X_i \setminus \{1\}$, sodass aus $g_j \in X_i$ folgt: $g_{j+1} \notin X_i$. Wir nennen n die **Länge** der (reduzierten Form) Normalform. Eine (reduzierte Form) Normalform ist trivial, falls $n = 0$ und $a = 1$ gelten.

Bemerkung 2.5.4. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i\colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Ist $A = 1$, so ist G_i eine Transversale von $\iota_i(A)$ in G_i und somit ist in freien Produkten eine reduzierte Form stets eine Normalform. Daher werden wir im Folgenden bei freien Produkten beide Begriffe synonym benutzen.

Satz 2.5.5. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i\colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Seien X_i Transversalen von $\iota_i(A)$ in G_i. Dann besitzt jedes $g \in *_{A,i\in I} G_i$ genau eine Normalform über $(G_i)_{i\in I}$ und A.*

Insbesondere existiert für 1 keine nicht-triviale Normalform.

Beweis. Wir zeigen erst, dass g eine Normalform hat, und dann ihre Eindeutigkeit. Sei also $g = s_1 \dots s_n$ mit $s_j \in \bigcup_{i\in I} S_i$ für alle $1 \le j \le n$ gegeben. Falls ein $i \in I$ mit $s_1, \dots, s_n \in S_i$ existiert, so existiert in G_i eine Rechtsnebenklasse von $\iota_i(A)$, die g enthält. Sei diese $\iota_i(A)x$ mit $x \in X_i$. Es existiert somit $a \in A$ mit $g = \iota_i(a)x$ und dann ist ax eine Normalform von g. Für allgemeines g folgt die Aussage nun mittels Induktion über die Anzahl der maximalen Teilwörter von $s_1 \dots s_n$, die in gemeinsamen S_i liegen. Sei $s_j \dots s_n$ ein Endstück von g, sodass alle $s_j, \dots, s_n$ in einem gemeinsamen S_i liegen, aber s_{j-1} nicht in S_i liegt. Nach dem, was wir schon gezeigt haben, existiert ein $a \in A$ und $x_1 \in X_i$ mit $\iota_i(a)x_1 = s_j \dots s_n$. Sei i' der Index mit $s_{j-1} \in S_{i'}$. Wegen $\iota_i(a) = \iota_{i'}(a)$, finden wir $s'_j, \dots, s'_k \in S_{i'}$ mit $\iota_{i'}(a) = s'_j \dots s'_k$. Nach Induktion hat dann $s_1 \dots s_{j-1}s'_j \dots s'_k$ eine Normalform $bx_\ell \dots x_2$. Ist $x_2 \notin S_i$, dann ist $bx_\ell \dots x_1$ eine Normalform von g. Ansonsten hat $\iota_m(b)x_\ell \dots x_1$, wobei $m \in I$ mit $x_\ell \in X_m$, weniger maximale Teilwörter, die in gemeinsamen S_p für $p \in I$ liegen und wir können direkt mit Induktion eine Normalform $b'y_{\ell'} \dots y_1$ von $\iota_m(b)x_\ell \dots x_1$ finden, was auch eine Normalform von g ist.

Um die Eindeutigkeit der Normalform zu zeigen, wenden wir ein Argument ähnlich zu dem an, das wir für die Existenz von freien Gruppen im Satz 2.1.3 verwendet haben. Sei dazu Ω die Menge der Normalformen über $(G_i)_{i\in I}$ und A. Für $g \in \bigcup_{i\in I} G_i$ sei $\varphi_g\colon \Omega \to \Omega$ definiert mittels

$$ag_1 \dots g_n \mapsto \begin{cases} bxg_n \dots g_1, & \text{falls } g_n \notin G_i, \\ b'g'_n g_{n-1} \dots g_1, & \text{falls } g_n \in G_i \text{ und } g_n \neq x^{-1}, \\ bg_{n-1} \dots g_1, & \text{falls } g_n \in G_i \text{ und } g_n = x^{-1}, \end{cases}$$

wobei $g \in G_i$ und $\iota_i(b)x = g\iota_i(a)$ mit $b \in A$ und $x \in X_i$ ist, bzw. im zweiten Fall $b' \in A$ und $g'_n \in G_i$ mit $\iota_i(b')g'_n = g\iota_i(a)g_n$. Es ist leicht einzusehen, dass φ_g und $\varphi_{g^{-1}}$ zueinander inverse Abbildungen sind. Deswegen liegen beide in S_Ω. Wir betrachten die Untergruppe $H = \langle \varphi_g \mid g \in \bigcup_{i\in I} G_i \rangle$ von S_Ω. Wir können leicht einsehen, dass jedes einzelne G_i auf Ω operiert und dass für $i \neq j$ die Abbildungen $\varphi_{\iota_i(a)}$ und $\varphi_{\iota_j(a)}$ übereinstimmen. Somit kann die kanonische Abbildung $\bigcup_{i\in I} S_i \to H,\ g \mapsto \varphi_g$ nach Satz 2.3.4 (universelle Eigenschaft für Präsentationen von Gruppen) zu einem Homomorphismus $*_{A,i\in I} G_i \to H$ fortgesetzt werden. Also ist für jedes $g \in G$ sein Bild φ_g eindeutig bestimmt. Falls $cx_1 \dots x_k$ eine Normalform von g ist, so gilt offenbar $\varphi_g(1) = \varphi_c \varphi_{x_1} \dots \varphi_{x_k}(1) = cx_1 \dots x_k$. Ist nun $c'y_1 \dots y_\ell$ eine weitere Normalform von g, so gilt

$$c'y_1 \dots y_\ell = \varphi_{c'}\varphi_{y_1} \dots \varphi_{y_\ell}(1) = \varphi_g(1) = \varphi_c\varphi_{x_1} \dots \varphi_{x_k}(1) = cx_1 \dots x_k.$$

Da $c'y_1 \dots y_\ell$ und $cx_1 \dots x_k$ somit das gleiche Element in Ω sind, muss $c = c'$, $k = \ell$ and $x_i = y_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ gelten. Es gilt somit die Behauptung. □

Für freie Produkte mit Amalgamation über einer nicht-trivialen Gruppe brauchen die reduzierten Formen nicht eindeutig zu sein. Jedoch für das freie Produkte schon, wie wir in Bemerkung 2.5.4 gesehen haben. Daher erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 2.5.6. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Dann existiert für jedes $g \in *_{i\in I} G_i$ genau eine reduzierte Form über $(G_i)_{i\in I}$.* □

Als weiteres Korollar aus Satz 2.5.5 erhalten wir die Existenz von Monomorphismen $\psi_i \colon G_i \to *_{A,i\in I} G_i$:

Korollar 2.5.7. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i \colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Dann existieren kanonische Monomorphismen $\psi_i \colon G_i \to *_{A,i\in I} G_i$.*

Beweis. Offenbar existieren kanonische Homomorphismen $\varphi_i \colon G_i \to *_{A,i\in I} G_i$. Sei X_i eine Transversale von $\iota_i(A)$ in G_i. Da für jedes $g \in G_i$ genau ein $a \in A$ und ein $x \in X_i$ mit $\iota_i(a)x = g$ existiert und ax somit eine nicht-triviale Normalform von $\varphi_i(g)$ ist, folgt $\varphi_i(g) \neq 1$. Also ist φ_i injektiv. □

Weitere Eigenschaften des freien Produktes mit Amalgamation erhalten wir direkt aus Satz 2.3.4, der universellen Eigenschaft für Präsentationen, und Korollar 2.3.5.

Satz 2.5.8 (Universelle Eigenschaft)**.** *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i \colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren, und seien $\psi_i \colon G_i \to *_{A,i\in I} G_i$ die kanonischen Monomorphismen. Sei G eine Gruppe und seien $\varphi_i \colon G_i \to G$ für alle $i \in I$ Homomorphismen mit $\iota_i\varphi_i = \iota_j\varphi_j$ für alle $i, j \in I$. Dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi \colon *_{A,i\in I} G_i \to G$ mit $\varphi\psi_i = \varphi_i$ für alle $i \in I$.* □

Korollar 2.5.9. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und A eine weitere Gruppe, für die Monomorphismen $\iota_i \colon A \to G_i$ für alle $i \in I$ existieren. Dann ist $*_{A,i\in I} G_i$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.* □

Definition. Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Eine reduzierte Form $g_1 \dots g_n$ heißt **zyklisch reduziert**, falls $n = 1$ gilt oder g_1 und g_n nicht in demselben G_i liegen.

Lemma 2.5.10. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen.*

(1) *Jedes Element von $*_{i\in I}G_i$ ist konjugiert zu einer zyklisch reduzierten Normalform.*

(2) *Sind $g = g_1 \dots g_n$ und $h = h_1 \dots h_m$ zwei zyklisch reduzierte Normalformen, sodass g und h konjugiert zueinander sind, dann gilt $m = n$ und die beiden reduzierten Formen sind zyklische Permutationen von einander.*

Beweis. Die Aussage (1) folgt unittelbar aus iteriertem Konjugieren mit g_i^{-1}, solange dies notwendig ist; dieser Prozess terminiert, weil bei jedem solchen Konjugieren sich die Länge der reduzierten Form echt verringert.

Sei nun $f \in *_{i\in I}G_i$ mit $g = h^f$ und sei $f_1 \dots f_k$ eine Normalform von f. Ist $k = 0$, so folgt (2) aus Korollar 2.5.6. Ebenfalls aus Korollar 2.5.6 folgern wir wegen

$$g_1 \dots g_n = f_k^{-1} \dots f_1^{-1} h_1 \dots h_m f_1 \dots f_k$$

und da f und h in reduzierter Form und g in zyklisch reduzierter Normalform vorliegen, dass $f_k^{-1} \dots f_1^{-1} h_1 \dots h_m f_1 \dots f_k$ keine Normalform sein kann. Also müssen entweder f_1 und h_1 oder f_1 und h_m im gleichen Faktor G_i liegen, der aber weder f_2 noch h_2 oder h_{m-1} enthält. Es muss dann $f_1 = h_1$ oder $h_m = f_1^{-1}$ gelten: ansonsten erhalten wir in den Fällen $k = 1$ und $k \neq 1$ Widersprüche zur Eindeutigkeit der reduzierten Form in freien Produkten. Somit gilt

$$g_1 \dots g_n = f_k^{-1} \dots f_2^{-1} h_2 \dots h_m h_1 f_2 \dots f_k$$

oder

$$g_1 \dots g_n = f_k^{-1} \dots f_2^{-1} h_m h_1 \dots h_{m-1} f_2 \dots f_k$$

und mit Induktion folgt $m = n$ und dass $g_1 \dots g_n$ und $h_1 \dots h_n$ zyklische Permutationen voneinander sind. □

Definition. Ein Element einer Gruppe heißt **Torsionselement**, falls es endliche Ordnung hat. Eine Gruppe heißt **torsionsfrei**, falls ihr einziges Torsionselement das neutrale Element ist.

Wir werden zwei Resultate über Torsionselemente bzw. das Fehlen selbiger in (Unter-)Gruppen von freien Produkten zeigen.

Satz 2.5.11. *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Dann ist jedes Torsionselement von $*_{i\in I}G_i$ zu einem Torsionselement eines der G_i konjugiert.*

Beweis. Sei $g \in *_{i\in I}G_i$ konjugiert zu einem Element h mit zyklisch reduzierter Normalform $h = h_1 \dots h_n$. Das Element h existiert nach Lemma 2.5.10 (1). Es genügt, $n = 1$ zu zeigen. Ist $n > 1$, so ist $h_1 \dots h_n \dots h_1 \dots h_n$ die Normalform von h^k. Sie ist also von 1 verschieden und damit haben sowohl h als auch g unendliche Ordnung. □

Satz 2.5.12. *Seien G und H endliche Gruppen. Dann ist jede torsionsfreie Untergruppe von $G * H$ eine freie Gruppe.*

Beweis. Zunächst konstruieren wir einen Baum, auf dem $G * H$ operiert. Sei T der Graph mit Eckenmenge

$$V(T) = \{gG, gH \mid g \in G * H\},$$

d. h., die Ecken sind die Linksnebenklassen von G und H. Die Kantenmenge von T ist

$$E(T) = \{\{gG, gH\} \mid g \in G * H\}.$$

Um den Zusammenhang von T zu zeigen, reicht es aus, für jede Ecke gG oder gH einen Weg von G nach gG bzw. gH zu finden. Sei $g_1 \dots g_n$ eine Normalform von g. OBdA sei $g_1 \in H$. Dann ist

$$G, H = g_1H, g_1G = g_1g_2G, g_1g_2H = g_1g_2g_3H, \dots, (g_1 \dots g_n)G$$

ein Weg, der in G beginnt und mit $(g_1 \dots g_n)G = gG$ endet (oder wahlweise bei $(g_1 \dots g_n)H = gH$). Also ist T zusammenhängend. Andererseits definiert jeder Weg von G nach gG eine Folge $h_1 \dots h_m$ mit $h_m \notin G$ und so, dass zwei aufeinanderfolgende h_i, h_{i+1} nicht beide aus G und nicht beide aus H kommen. Also ist $h_1 \dots h_m$ eine Normalform eines Elements aus gG und es existiert ein $h_{m+1} \in G$ mit $h_1 \dots h_{m+1} = g$. Aus der Eindeutigkeit der Normalform von g (Satz 2.5.5) folgt somit, dass der Weg von G nach gG in T eindeutig bestimmt sein muss. Also ist T ein Baum. Nach Beispiel 1.1.1 (3′) operiert $G * H$ durch Linksmultiplikation auf T.

Nun zeigen wir, dass jede Ecke und jede Kante einen endlichen Stabilisator in $G*H$ hat. Wir betrachten als erstes die Ecken. Da $G*H$ sowohl transitiv auf den Linksnebenklassen von G als auch denen von H operiert, genügt es nach Lemma 1.1.10 zu zeigen, dass die Stabilisatoren von G und von H endlich sind. Der Stabilisator von G in $G * H$ ist aber genau G, da $gG = G$ genau dann gilt, wenn $g \in G$ ist, und somit endlich. Analog ist der Stabilisator von H in $G * H$ nur H und damit endlich. Aus der Definition der Kanten folgt unmittelbar, dass $G * H$ transitiv auf den Kanten operiert. Also ist nach Lemma 1.1.10 nur zu zeigen, dass der Stabilisator von $\{G, H\}$ endlich ist. Aus Satz 2.5.5 folgt, dass für kein $g \in G * H$ gelten kann: $gG = H$ oder $gH = G$. Also ist der Stabilisator von $\{G, H\}$ eine Untergruppe sowohl von G als auch von H, insbesondere also endlich. Es sind also die Stabilisatoren von allen Ecken und allen Kanten endlich.

Sei nun F eine torsionsfreie Untergruppe von $G * H$. Dann operiert F auf T und diese Operation muss frei sein, weil die Elemente in den Stabilisatoren der Ecken oder Kanten endliche Ordnung haben, aber F außer der 1 keine solche besitzt. Mit Satz 2.1.9 folgt, dass F eine freie Gruppe ist. □

Bemerkung. Satz 2.5.12 ist auch für freie Produkte beliebig vieler endlicher Gruppen und für freie Produkte beliebig vieler endlicher Gruppen mit Amalgamation gültig. Allerdings muss im Beweis die Konstruktion des Baumes dafür abgewandelt werden.

2.5.2 HNN-Erweiterungen

In diesem Abschnitt werden wir eine Erweiterung einer Gruppe definieren, die kein Produkt ist. Die Idee dieser Erweiterung ist, isomorphe Untergruppen mittels eines neuen Gruppenelements als in der größeren Gruppe konjugiert zu finden.

Definition. Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine Gruppe, seien $A, B \leq G$, und sei $\varphi \colon A \to B$ ein Isomorphismus. Dann nennen wir die Gruppe $G*_\varphi$ mit Präsentation

$$\langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{a^t = \varphi(a) \mid a \in A\} \rangle$$

die **HNN-Erweiterung**[3] von G.

Bemerkung 2.5.13. In Hinblick auf die Sätze 2.3.3 und 2.3.4 und das Korollar 2.3.5 erhalten wir die Existenz von HNN-Erweiterungen, ihre universelle Eigenschaft und ihre Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie).

Als nächstes definieren wir uns im Zusammenhang mit HNN-Erweiterungen eine „Normalform“ (wie wir es bereits bei freien Produkten mit Amalgamation gemacht haben).

Definition. Sei $G*_\varphi$ mit $\varphi \colon A \to B$ eine HNN-Erweiterung von G. Sei X eine Transversale von A und Y eine Transversale von B. Eine **reduzierte Form** ist eine endliche Folge $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t^{\varepsilon_n} g_n$ mit $n \geq 0$ und $\varepsilon_i = \pm 1$, sodass es keine Teilfolge $t^{-1} g_i t$ mit $g_i \in A$ und keine Teilfolge $t g_i t^{-1}$ mit $g_i \in B$ gibt. Eine **Normalform** über G und t ist eine endliche Folge $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t^{\varepsilon_n} g_n$ mit $n \geq 0$ und $\varepsilon_i = \pm 1$, wobei $g_0 \in G$ beliebig ist und die weiteren folgenden Eigenschaften gelten:

(i) Falls $\varepsilon_i = 1$, so ist $g_i \in Y$.

(ii) Falls $\varepsilon_i = -1$, so ist $g_i \in X$.

(iii) Ist $g_i = 1$ für ein $i > 0$, so gilt $\varepsilon_i \neq -\varepsilon_{i+1}$.

Wir nennen n die **Länge** der (reduzierten Form) Normalform. Eine (reduzierte Form) Normalform ist trivial, falls $n = 0$ und $g_0 = 1$ gilt.

Wir werden zeigen, dass jedes Element aus $G*_\varphi$ eine eindeutige Normalform besitzt. Dies wird es uns ermöglichen einzusehen, dass G kanonisch in $G*_\varphi$ eingebettet werden kann.

Satz 2.5.14. *Sei $G*_\varphi = \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{a^t = \varphi(a) \mid a \in A\} \rangle$ eine HNN-Erweiterung der Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ mit Isomorphismus $\varphi \colon A \to B$. Dann besitzt jedes $g \in G*_\varphi$ genau eine Normalform.*

[3] HNN steht für die Autoren des Artikels, in dem diese Erweiterung zuerst vorkommt: Graham Higman, Bernhard H. Neumann und Hanna Neumann.

Beweis. Sei X eine Transversale von A und Y eine Transversale von B in G. Erneut teilen wir den Beweis in zwei Teile: die Existenz und die Eindeutigkeit der Normalform. Zunächst zeigen wir die Existenz einer Normalform zu jedem $g \in G*_\varphi$. Wir können g als Produkt der Erzeuger von $G*_\varphi$ darstellen. Also existieren $g_i \in G$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ mit $g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$. OBdA können wir annehmen, dass $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ eine reduzierte Form ist, da wir ansonsten jedes a^t oder $b^{t^{-1}}$ mit $a \in A$, $b \in B$ durch $\varphi(a)$ bzw. $\varphi^{-1}(b)$ ersetzen können. Wir betrachten zunächst den Fall $\varepsilon_n = -1$. Sei $h_n \in X$ und $a \in A$ mit $ah_n = g_n$. Dann existiert $b \in B$ mit $b = a^t$. Es gilt somit $t^{-1}ah_n = t^{-1}att^{-1}h_n = bt^{-1}h_n$ und wir setzen $g'_{n-1} := g_{n-1}b$. Der Fall $\varepsilon_n = 1$ verläuft analog. Mit Induktion über n folgt nun, dass $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_{n-1}} g'_{n-1}$ eine Normalform $h_0 t^{\varepsilon_1} \dots h_m$ besitzt und damit auch g, nämlich $h_0 t^{\varepsilon_1} \dots h_m t^{\varepsilon_{n-1}} g'_{n-1}$. Zu beachten ist noch, dass der Fall $h_m = 1$ und $\varepsilon_m = -\varepsilon_{n-1}$ nicht auftreten kann: wäre $h_m = 1$, so folgt nach Induktion, dass $g'_{n-1} \in B$ (falls $\varepsilon_n = -1$) bzw. $g'_{n-1} \in A$ (falls $\varepsilon_n = 1$) und damit auch $g_{n-1} \in B$ bzw. $g_{n-1} \in A$, was aber einer reduzierten Form widerspricht. Beachte, dass wir zudem $m = n - 1$ haben müssen, da sich die Anzahl der Vorkommen von t oder t^{-1} im Induktionsschritt nicht ändert.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Normalform. Dafür wählen wir erneut die gleiche Methode wie in den Beweisen der Sätze 2.1.3 und 2.5.5. Sei Ω die Menge der Normalformen über G und t. Wir definieren eine Operation von $G*_\varphi$ auf Ω. Dazu definieren wir für $g \in G$ die Abbildung $\varphi_g \colon \Omega \to \Omega$ mittels

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n \mapsto (gg_0) t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n,$$

für t definieren wir $\varphi_t \colon \Omega \to \Omega$ mittels

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n \mapsto \begin{cases} a g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } y = 1 \text{ und } \varepsilon_1 = -1, \\ atyt^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } y \neq 1 \text{ und } \varepsilon_1 = -1, \\ atyt^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } \varepsilon_1 = 1, \end{cases}$$

wobei $g_0 = by$ mit $b \in B$ und $y \in Y$ und $a^t = b$ sind, und für t^{-1} definieren wir $\varphi_{t^{-1}} \colon \Omega \to \Omega$ mittels

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n \mapsto \begin{cases} b g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } x = 1 \text{ und } \varepsilon_1 = 1, \\ bt^{-1}xt^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } \varepsilon_1 = 1, \\ bt^{-1}xt^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{falls } \varepsilon_1 = -1, \end{cases}$$

wobei $g_0 = ax$ mit $a \in A$ und $x \in X$ und $b^{t^{-1}} = a$ sind. Offenbar sind die φ_g Elemente aus S_Ω, da φ_g und $\varphi_{g^{-1}}$ zueinander inverse Funktionen sind. Aber es ist ebenfalls leicht einzusehen, dass φ_t und $\varphi_{t^{-1}}$ zueinander inverse Funktionen sind, also auch $\varphi_t, \varphi_{t^{-1}} \in S_\Omega$ gilt. Wir betrachten die Untergruppe $H = \langle \varphi_g \mid g \in G \cup \{t\} \rangle$ von S_Ω. Wir bemerken zum einen, dass von jedem $g \in G$ sein Bild $\varphi_g \in S_\Omega$ definiert ist, und zum anderen, dass für $a \in A$ und $b = \varphi(a)$ gilt: $\varphi_b = \varphi_{t^{-1}} \varphi_a \varphi_t$. Wie im Beweis von Satz 2.5.5 können wir jetzt die kanonische Abbildung $S \cup \{t\} \to H, g \mapsto \varphi_g$ mittels der universellen Eigenschaft für Präsentationen von Gruppen (Satz 2.3.4) zu einem Homomorphismus

$G*_\varphi \to H$ fortsetzen. Also ist für jedes $g \in G*_\varphi$ sein Bild $\varphi_g \in H$ eindeutig bestimmt. Falls $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ eine Normalform von g ist, so gilt offenbar

$$\varphi_g(1) = \varphi_{g_0}\varphi_{t^{\varepsilon_1}}\varphi_{g_1}\dots\varphi_{t^{\varepsilon_n}}\varphi_{g_n}(1) = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n.$$

Ist nun $h_0 t^{\delta_1} h_1 \dots t^{\delta_m} h_m$ eine weitere Normalform von g, so gilt

$$\begin{aligned} & h_0 t^{\delta_1} h_1 \dots t^{\delta_m} h_m \\ =\ & \varphi_{h_0}\varphi_{t^{\delta_1}}\varphi_{h_1}\dots\varphi_{t^{\delta_m}}\varphi_{h_m}(1) \\ =\ & \varphi_g(1) \\ =\ & \varphi_{g_0}\varphi_{t^{\varepsilon_1}}\varphi_{g_1}\dots\varphi_{t^{\varepsilon_n}}\varphi_{g_n}(1) \\ =\ & g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 \dots t^{\varepsilon_n} g_n. \end{aligned}$$

Die beiden Elemente $h_0 t^{\delta_1} h_1 \dots t^{\delta_m} h_m$ und $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ müssen also das geiche Element in Ω und damit die gleiche Normalform sein. Also gilt $m = n$, $g_i = h_i$ und $\varepsilon_i = \delta_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Damit haben wir die Eindeutigkeit der Normalform gezeigt. □

Korollar 2.5.15. *Sei $G*_\varphi$ eine HNN-Erweiterung gegeben durch den Isomorphismus $\varphi\colon A \to B$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die kanonische Abbildung $\psi\colon G \to G*_\varphi$ ist ein Monomorphismus und t erzeugt eine unendliche Untergruppe.*

(2) (Brittons Lemma) *Sei $w := g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ eine reduzierte Form über G und t. Falls $n \geq 1$ ist, so gilt $w \neq 1$.*

Beweis. Für jedes $g \in G$ ist g eine Normalform. Wäre $g \in \ker(\psi)$, also $g = 1$ in $G*_\varphi$, so hätte 1 zwei verschiedene Normalformen: 1 und g, was Satz 2.5.14 widerspricht. Für $n \in \mathbb{N}$ hat jedes t^n bzw. t^{-n} die Normalform $1t1t\dots1t1$ bzw. $1t^{-1}1t^{-1}\dots1t^{-1}1$. Daher hat t unendliche Ordnung. Dies zeigt (1).

Um (2) einzusehen, sei $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ eine reduzierte Form über G und t. Bei der Konstruktion einer Normalform aus der reduzierten Form im Beweis von Satz 2.5.14, haben wir die Anzahl der t in der Normalform nicht verändert. Da $1 \in G*_\varphi$ nach Satz 2.5.14 keine nicht-triviale Normalform hat, folgt (2). □

Korollar 2.5.16. *Sei $G*_\varphi$ eine HNN-Erweiterung von G mit dem Isomorphismus $\varphi\colon A \to B$. Dann ist die von G und G^t erzeugte Untergruppe von $G*_\varphi$ isomorph zum freien Produkt der beiden Gruppen mit Amalgamation über A, wobei $\iota_1 = \varphi$ und ι_2 die Konjugation mit t sind, d. h. $\langle G, G^t\rangle \cong G *_A G^t$.*

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass die Relatoren in der Definition des freien Produktes mit Amalgamation von G und G^t bereits in $\langle G, G^t\rangle$ erfüllt sind. Also ist $K := \langle G \cup G^t\rangle$ ein homomorphes Bild von $G *_A G^t$. Sei nun $ag_1h_1^t g_2 \dots g_m h_m^t$ eine nicht-triviale Normalform in $G *_A G^t$ mit $m \geq 1$, wobei vielleicht $g_1 = 1$ oder $h_m = 1$ gelten kann. Dies ist in $G*_\varphi$ eine reduzierte Form und nach Brittons Lemma (Korollar 2.5.15 (2)) ist diese von 1 verschieden. Also ist K bereits das freie Produkt mit Amalgamation von G und G^t. □

Theorem 2.5.17 (Higman-Neumann-Neumann)**.** *Sei G eine abzählbare Gruppe. Dann existiert eine Gruppe H, die ein Erzeugendensystem von zwei Elementen hat, sodass $G \leq H$.*

Beweis. Sei $G = \{g_0, g_1, \ldots\}$ mit $g_0 = 1$ und mit Wiederholungen, falls es notwendig ist. Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem $\{a, b\}$. Die Mengen $\{b^{-i}ab^i\}$ und $\{a^{-i}ba^i\}$ erzeugen jeweils eine freie Untergruppe A bzw. B von F (vgl. Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2). Wir betrachten die Untergruppe K von $G * F$, die von $\{g_i a^{-i} b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird. Dann ist die Erweiterung der Funktionen $\varphi\colon G \to F, g \mapsto 1$ und der Identität auf F ein Homomorphismus von $G * F \to F$ nach Satz 2.5.8, die Projektion auf F. Also wird jedes nicht-triviale reduzierte Wort in K, das 1 entspricht, auf ein nicht-triviales Wort in B abgebildet. Weil B frei ist, zeigt dieser Widerspruch, dass K auch frei sein muss und $\{g_i a^{-i} b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ als ein freies Erzeugendensystem hat.

Wir betrachten die Funktion $\psi\colon A \to K$, die durch $\psi(b^{-i}ab^i) = g_i a^{-i} b a^i$ eindeutig induziert wird. Sei H die HNN-Erweiterung von $G * F$ mit dem Isomorphismus ψ. Nach den Korollaren 2.5.15 und 2.5.7 finden wir einen kanonisches isomorphes Bild von G in $G * F$ und in H. Weil das Bild jedes g_n von t, a, b erzeugt wird, gilt $\langle t, a, b\rangle = H$. Wegen $g_0 = 1$ gilt zudem

$$t^{-1}at = t^{-1}g_0 b^{-0} a b^0 t = a^{-0} b a^0 = b.$$

Somit gilt $H = \langle t, a\rangle$. Also liegt (ein isomorphes Bild von) G in einer Gruppe, die von zwei Elementen erzeugt wird. $\square$

Kapitel 3

Quasi-Isometrien

3.1 Wortmetrik und Quasi-Isometrien

Definition. Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G. Die **Wortmetrik** d_S von G bezüglich S ist die Metrik des Cayley-Graphen von G und S.

Bemerkung 3.1.1. Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G. Für alle $g, h \in G$ ist $d_S(g,h)$ die Länge eines kürzesten Wortes, das $g^{-1}h$ darstellt, d. h., es gilt

$$d_S(g,h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1 \dots s_n \in S \cup S^{-1} \colon g^{-1}h = s_1 \dots s_n\}.$$

Bemerkung 3.1.2. Sei G eine Gruppe und sei S ein Erzeugendensystem von G. Links-/Rechtsmultiplikation ist eine Operation von G auf dem metrischen Raum (G, d_S). Insbesondere induziert also die Links-/Rechtsmultiplikation eines Elementes eine Isometrie auf G.

Wir beobachten direkt, dass verschiedene Erzeugendensysteme verschiedene Wortmetriken liefern:

Beispiel 3.1.3. Seien $S_1 = \{1\}$ und $S_2 = \mathbb{Z}$ zwei Erzeugendensysteme von $\mathbb{Z}$. Dann gilt $d_{S_1}(g,h) = |g-h|$ und $d_{S_2}(g,h) = 1$ für alle $g \neq h \in \mathbb{Z}$.

Wenn wir uns verschiedene lokal-endliche Cayley-Graphen zur gleichen endlich erzeugten Gruppe ansehen, so sind die Wortmetriken jedoch „im Wesentlichen“ gleich. Um dies genau zu fassen, benötigen wir die folgende Definition.

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume.

(1) Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung.

- Die Abbildung f heißt **quasi-isometrische Einbettung**, falls es Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\frac{1}{\gamma} d_X(x,x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \gamma d_X(x,x') + c$$

für alle $x, x' \in X$ gibt.

- Die Funktion f heißt **quasi-dicht**, falls es eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$d_Y(y, f(X)) \leq c$$

für alle $y \in Y$ gibt.

- Die Abbildung f heißt eine **Quasi-Isometrie**, falls es eine quasi-dichte quasi-isometrische Einbettung ist.

(2) Die Räume X und Y heißen **quasi-isometrisch**, falls es eine Quasi-Isometrie $f\colon X \to Y$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim_{QI} Y$.

(3) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Quasi-Isometrien. Sie sind **Quasi-Inverse** zueinander, falls es ein $c \geq 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt: $d(x, g(f(x))) \leq c$ und $d(y, f(g(y))) \leq c$.

Proposition 3.1.4. (i) *Die Relation $\sim_{QI}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der metrischen Räume.*[1]

(ii) *Jede Quasi-Isometrie besitzt ein Quasi-Inverses.*

Beweis. Übung □

Proposition 3.1.5. *Sei G eine endlich-erzeugte Gruppe und seien S_1, S_2 zwei endliche Erzeugendensysteme von G. Die Identität $id_G\colon (G, d_{S_1}) \to (G, d_{S_2})$ ist eine Quasi-Isometrie zwischen den beiden metrischen Räumen.*

Beweis. OBdA sei G nicht-trivial. Somit sind sowohl S_1 als auch S_2 nicht leer. Da id_G surjektiv ist, ist es offensichtlich quasi-dicht, und wir brauchen nur noch zu zeigen, dass es eine quasi-isometrische Einbettung ist. Sei

$$\gamma_1 := \sup\{d_{S_2}(1, s) \mid s \in S_1 \cup S_1^{-1}\}.$$

Weil S_1 endlich aber nicht leer ist, gilt $\gamma_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seien $g, h \in G$. Seien $s_1, \ldots, s_n \in S_1 \cup S_1^{-1}$ mit $n = d_{S_1}(g, h)$ und $gs_1 \ldots s_n = h$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{S_2}(g, h) &= d_{S_2}(g, gs_1 \ldots s_n) \\ &\leq d_{S_2}(g, gs_1) + d_{S_2}(gs_1, gs_1s_2) \\ &\quad + \ldots + d_{S_2}(gs_1 \ldots s_{n-1}, gs_1 \ldots s_n) \\ &= d_{S_2}(1, s_1) + d_{S_2}(1, s_2) + \ldots + d_{S_2}(1, s_n) \\ &\leq \gamma_1 n \\ &= \gamma_1 d_{S_1}(g, h). \end{aligned}$$

Analog finden wir ein

$$\gamma_2 := \sup\{d_{S_1}(1, s) \mid s \in S_2 \cup S_2^{-1}\}.$$

Für dieses gilt $d_{S_1}(g, h) \leq \gamma_2 d_{S_2}(g, h)$. Setzen wir $\gamma := \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, so ist id_G eine quasi-isometrischen Einbettung für die Konstanten γ und $c = 0$. □

[1] Streng genommen sind Relationen i. A. nur auf Mengen definiert; wir meinen hier die kanonische Erweiterung ihrer Definition auf Klassen.

Da $\sim_{QI}$ eine Äquivalenzrelation ist und eine Gruppe bezüglich verschiedener Wortmetriken quasi-isometrische Räume liefert, sind wir zur folgenden Definition berechtigt.

Definition. Seien G und H endlich-erzeugte Gruppen.

(1) Wir nennen G **quasi-isometrisch** zu einem metrischen Raum X, falls für ein[2] endliches Erzeugendensystem S von G der Raum (G, d_S) (und damit auch der Cayley-Graph von G und S) quasi-isometrisch zu X ist.

(2) Die Gruppen G und H heißen **quasi-isometrisch**, falls es einen metrischen Raum X gibt, zu dem beide Gruppen quasi-isometrisch sind.

Beispiel 3.1.6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ quasi-isometrisch zu dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, da die kanonische Einbettung eine quasi-dichte Abbildung ist und bezüglich der Wortmetrik für das Standard-Erzeugendensystem S von $\mathbb{Z}^n$ die kanonische Einbettung auch eine quasi-isometrische Einbettung ist.

Beispiel 3.1.7. Seien G und H endliche Gruppen. Dann sind G und H quasi-isometrisch mit Konstanten $\gamma = 1$ und $c = \max\{|G|, |H|\}$.

3.2 Švarc-Milnor-Lemma

Definition. Sei X ein metrischer Raum.

(1) Sei $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine **Geodäte der Länge** ℓ ist eine isometrische Einbettung $f : [0, \ell] \to X$. Der **Startpunkt** ist $f(0)$ und der **Endpunkt** ist $f(\ell)$.

(2) Der Raum X heißt **geodätisch**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine Geodäte der Länge $d(x, y)$ mit Startpunkt x und Endpunkt y existiert.

(3) Eine **Quasi-Geodäte** ist eine quasi-isometrische Einbettung $f : I \to X$ eines abgeschlossenen Intervals $I = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$. Der **Startpunkt** ist $f(t_1)$ und der **Endpunkt** ist $f(t_2)$.

(4) Der Raum X heißt **quasi-geodätisch**, falls es zwei Konstanten $c \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine Quasi-Geodäte mit Startpunkt x und Endpunkt y mit den Konstanten γ und c gibt.

Bemerkung. (1) Jeder geodätische Raum ist quasi-geodätisch.

(2) Ist ein Raum quasi-geodätisch mit Konstanten $\gamma = 1$ und $c = 0$, so ist er geodätisch.

Beispiel 3.2.1. (1) Sei Γ ein Graph. Dann existiert für je zwei Ecken x, y ein Weg der Länge $d(x, y)$ zwischen ihnen. Dieser verifiziert, dass Graphen quasi-geodätische Räume sind bezüglich der Konstanten $\gamma = 1 = c$. Im Allgemeinen ist Γ jedoch kein geodätischer Raum. Trotzdem verstehen wir

[2] und damit nach Proposition 3.1.5 für alle

Graphen als geodätische Räume: dazu müssen wir allerdings die Kanten als isometrische Kopien von $[0,1]$ auffassen.[3]

(2) Der Raum $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ist ein geodätischer Raum.

(3) Der Raum $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der durch $\mathbb{R}^2$ induzierten euklidischen Metrik ist kein geodätischer Raum, aber ein quasi-geodätischer Raum für $\gamma = 1$ und jedes $c > 0$.

Satz 3.2.2 (Švarc-Milnor-Lemma)**.** *Die Gruppe G operiere auf einem metrischen Raum X.*[4] *Der Raum X sei quasi-geodätisch mit Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und es existiere eine Teilmenge $B \subseteq X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *der Durchmesser von B ist endlich;*

(ii) $\bigcup_{g \in G} gB = X$*;*

(iii) *für $B' := \{x \in X \mid d(x,B) \leq 2c\}$ ist $S := \{g \in G \mid B' \cap gB' \neq \emptyset\}$ endlich.*

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1) *Die Menge S erzeugt G, insbesondere ist G endlich erzeugt.*

(2) *Für alle $x \in X$ ist die Abbildung $\psi_x \colon G \to X$, $g \mapsto gx$ eine Quasi-Isometrie.*

Beweis. Die Aussage (1) zeigen wir auf ähnlichem Weg, wie wir den Satz 1.3.2 bewiesen haben. Sei $g \in G$. Wir wollen g als endliches Produkt von Elementen aus S schreiben. Sei $x \in B$ und $\varphi\colon [0,\ell] \to X$ eine Quasi-Geodäte mit Konstanten γ und c und mit Anfangspunkt x und Endpunkt gx. Setze $n := \lceil \frac{\gamma \ell}{c} \rceil$. Es sei $t_j := j \cdot \frac{c}{\gamma}$ für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$ und $t_n := \ell$. Desweiteren definieren wir $x_j := \varphi(t_j)$ für alle $j \in \{0, \dots, n\}$. Wegen (ii) finden wir für jedes $0 \leq j \leq n$ ein $g_j \in G$ mit $x_j \in g_j B$. OBdA können wir $g_0 = id$ und $g_n = g$ wählen, weil $x_0 = x$ und $x_n = gx$ gilt.

Es gilt
$$d(x_j, x_{j+1}) \leq \gamma \cdot |t_j - t_{j+1}| + c \leq \gamma \cdot \frac{c}{\gamma} + c = 2c.$$

Also liegt x_{j+1} in $g_j B'$. Da es auch in $g_{j+1} B'$ liegt, folgt
$$g_j B' \cap g_{j+1} B' \neq \emptyset$$
und somit $s_j := g_j^{-1} g_{j+1} \in S$. Es folgt $g = s_0 \cdots s_{n-1} \in \langle S \rangle$ und damit (1), wobei der Zusatz eine direkte Konsequenz aus (iii) ist.

Für (2) dürfen wir nach (ii) oBdA annehmen, dass $x \in B$ gilt. Aus (i) und (ii) folgt direkt, dass ψ_x quasi-dicht in X mit der Konstante $\operatorname{diam}(B)$ ist: für jedes $y \in X$ existiert nach (ii) ein $g \in G$ mit $y \in gB$ und nach (i) folgt damit $d(y, \psi_x(G)) \leq d(y, gx) \leq \operatorname{diam}(B)$.

[3] Dies wird aber im Laufe der Vorlesung nicht wichtig sein.

[4] Beachte, dass jedes $g \in G$ also eine Isometrie auf X induziert.

Sei $\varphi\colon [0,\ell] \to X$ eine Quasi-Geodäte von x nach gx mit Konstanten γ und c wie im ersten Teil des Beweises und sei $n \in \mathbb{N}$ wie dort. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(\psi_x(1), \psi_x(g)) &= d(x, gx) \\ &= d(\varphi(0), \varphi(\ell)) \\ &\geq \frac{1}{\gamma}\ell - c \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{c(n-1)}{\gamma} - c \\ &= \frac{c}{\gamma^2} n - \left(\frac{c}{\gamma^2} + c\right) \\ &\geq \frac{c}{\gamma^2} d_S(1,g) - \left(\frac{c}{\gamma^2} + c\right). \end{aligned}$$

Für die zweite zu zeigende Ungleichung seien $s_1 \dots s_n \in S$ mit $g = s_1 \dots s_n$ und $n = d_S(1,g)$. Wegen $s_j B' \cap B' \neq \emptyset$ für alle $1 \leq j \leq n-1$ gilt

$$\begin{aligned} d(\psi_x(1), \psi_x(g)) &= d(x, gx) \\ &\leq d(x, s_1 x) + d(s_1 x, s_1 s_2 x) + \dots \\ &\quad + d(s_1 \dots s_{n-1} x, s_1 \dots s_n x) \\ &= d(x, s_1 x) + d(x, s_2 x) + \dots + d(x, s_n x) \\ &\leq n \cdot 2\mathrm{diam}(B') \\ &\leq 2\mathrm{diam}(B') \cdot d_S(1,g). \end{aligned}$$

Mit den Konstanten $\gamma' := \max\{\frac{\gamma^2}{c}, 2\mathrm{diam}(B')\}$ und $c' := \frac{c}{\gamma^2} + c$ ist ψ_x eine quasi-isometrische Einbettung und damit folgt (2). $\square$

Korollar 3.2.3. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und H eine Untergruppe endlichen Indexes von G. Dann ist H endlich erzeugt und es gilt $H \sim_{QI} G$.*

Beweis. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G. Die Linksmultiplikation von H auf dem metrischen Raum (G, d_S) ist eine Operation von H auf dem metrischen Raum G. Dieser ist gemäß der Definition der Wortmetrik d_S nach Beispiel 3.2.1 (1) ein quasi-geodätischer Raum mit Konstanten $\gamma = c = 1$. Sei B eine Rechtstransversale von H in G. Da $|G : H|$ endlich ist, ist B auch endlich. Aus der Endlichkeit von B und von S folgt, dass $B' := \{g \in G \mid d_S(g, B) \leq 2\}$ endlich ist. Somit und weil H frei auf G operiert, ist auch $\{h \in H \mid B' \cap hB' \neq \emptyset\}$ endlich. Weil $HB = G$ gilt, sind alle Voraussetzungen von Satz 3.2.2 erfüllt und wir erhalten direkt, dass H endlich erzeugt ist und die Einbettung $id\colon H \to G$ eine Quasi-Isometrie ist. $\square$

Korollar 3.2.4. *Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe endlichen Indexes von G. Genau dann ist G endlich erzeugt, wenn H endlich erzeugt ist.* $\square$

3.3 Quasi-Isometrie-Invarianten

Im restlichen Teil dieses Kapitel beschäftigen wir uns mit Eigenschaften, die durch Quasi-Isometrien erhalten bleiben Dies können sowohl algebraische als auch geometrische Eigenschaften sein. Für die geometrischen Eigenschaften werden wir uns auch ansehen, welche algebraischen Ergebnisse sie implizieren.

Definition. Eine **Quasi-Isometrie-Invariante** (mit Werten in einer Menge U) ist eine Zuordnung $\mathcal{P}$ von endlich erzeugten Gruppen in U mit $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(H)$ für alle endlich erzeugten Gruppen $G \sim_{QI} H$.

Wir haben im Beispiel 3.1.7 gesehen, dass Endlichkeit eine Quasi-Isometrie-Invariante ist. Jetzt werden wir zeigen, dass endliche Präsentierbarkeit dies auch ist.

Satz 3.3.1. *Endliche Präsentierbarkeit ist eine Quasi-Isometrie-Invariante für endlich erzeugte Gruppen.*

Beweis. Sei G eine endlich präsentierte Gruppe und H eine endlich erzeugte Gruppe. Seien S_G und S_H endliche Erzeugendensysteme für G bzw. H und sei R_G eine endliche Menge von Relatoren von G, sodass $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$. Sei $\varphi\colon G \to H$ eine Quasi-Isometrie und sei $\psi\colon H \to G$ ein Quasi-Inverses von φ, wobei $\gamma \geq 1$ und $c \geq 0$ die Konstanten für die Quasi-Isometrien sind und c auch die Konstante für das Quasi-Inverse. Wir können annehmen, dass $\varphi(1) = 1$ und $\psi(1) = 1$ gelten. Für alle $g, h \in G$ sei $w_{g,h}$ ein kürzestes Wort über $S_H \cup S_H^{-1}$ mit $\varphi(g)w_{g,h} = \varphi(gh)$. Wir wählen $w_{g,h}$, sodass $w_{gh,h^{-1}}$ das inverse Wort[5] von $w_{g,h}$ ist. Analog definieren wir Wörter $v_{g,h}$ über $S_G \cup S_G^{-1}$ für $g, h \in H$.

Sei $w = s_1 \dots s_n$ ein Wort über $S_H \cup S_H^{-1}$ mit $w = 1$. Wir ersetzen jeden Buchstaben s_i durch $w_{s_1 \dots s_{i-1}, s_i}$. Dadurch erhalten wir ein Wort $v = v_1 \dots v_k$ über $S_G \cup S_G^{-1}$ mit $v = 1$. Wir bemerken, dass es Teilwörter $v_1 \dots v_{i_j}$ für alle $j \leq n$ gibt, sodass $v_1 \dots v_{i_j} = \psi(s_1 \dots s_j)$ und $i_j < i_{j'}$ für $j < j'$. Wir sagen, dass v alle $\psi(\emptyset), \dots, \psi(s_1 \dots s_n)$ in dieser Reihenfolge besucht.

Da v im Normalteiler der durch S_G erzeugten freien Gruppe liegt, der von R_G erzeugt wird, erhalten wir Wörter $r_1, \dots r_m \in R_G$ und Wörter $p_1, \dots p_m$, sodass $p_1^{-1} r_1 p_1 \dots p_m^{-1} r_m p_m$ als freie Reduktion v hat. Wir wenden die gleiche Methode an, die wir benutzt haben um v aus w zu erhalten, um aus den Wörtern r_i und p_i mittels der $v_{h,s}$ die Wörter r_i' und p_i' über $S_H \cup S_H^{-1}$ zu erhalten. Dann ist $w' := {p_1'}^{-1} r_1' p_1' \dots {p_m'}^{-1} r_m' p_m'$ ein Wort über $S_H \cup S_H^{-1}$, das 1 repräsentiert. Wir bemerken, dass w' die $\varphi(\psi(\emptyset)), \dots, \varphi(\psi(s_1 \dots s_n))$ in dieser Reihenfolge besucht.

Für $1 \leq i \leq n$ sei x_i ein kürzestes Wort mit $s_1 \dots s_i x_i = \varphi(\psi(s_1 \dots s_i))$. Dann hat x_i die Länge höchstens c, da φ und ψ quasi-invers sind. Sei y_i das Teilwort von w' von dem Wort, das $\varphi(\psi(s_1 \dots s_{i-1}))$ präsentiert zu dem für $\varphi(\psi(s_1 \dots s_i))$. Dann hat y_i die Länge höchstens $\gamma + c$. Dann ist $z_i := x_i y_{i+1} x_{i+1}^{-1} s_{i+1}^{-1}$ ein Wort der Länge höchstens $\gamma + 3c + 1$, das 1 repräsentiert.

[5] Wenn $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ ein Wort ist, dann nennen wir das Wort $s_n^{-\varepsilon_n} \dots s_1^{-\varepsilon_1}$ sein **Inverses**.

Wir betrachten das Wort

$$w'' = z_0(s_1 z_1 s_1^{-1}) \dots (s_1 \dots s_{n-1} z_{n-1} s_{n-1}^{-1} \dots s_1^{-1}) s_1 \dots s_n,$$

welches zu w' reduziert werden kann. Daher liegt w in dem Normalteiler der durch S_H frei erzeugten freien Gruppe, der durch alle z_i und alle r_i' erzeugt wird. Weil alle z_i die Länge höchstens $\gamma + 3c + 1$ haben und alle r_i' die Länge höchstens $\ell(\gamma + c)$ haben, wobei ℓ die Länge des längsten Relators in R_G ist. Da es nur endlich viele Wörter über $S_H \cup S_H^{-1}$ gibt, deren Länge höchstens $\max\{\ell(\gamma + c), \gamma + 3c + 1\}$ ist, ist H endlich präsentiert. □

3.4 Enden von Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir Enden von (endlich erzeugten) Gruppen untersuchen. Wir stützen uns bei der Definition der Enden von Gruppen auf die der Enden von Graphen, werden dabei aber auf eine formale Definition von Enden von Gruppen verzichten und stattdessen lediglich deren Anzahl definieren.

Definition. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Ein **Strahl** in Γ ist ein einseitig unendlicher Weg. Für jeden Strahl R in Γ und jede endliche Menge $U \subseteq V$ gibt es genau eine Komponente C von $\Gamma - U$, die unendlich viele Ecken von R enthält. Wir sagen dann, dass R **schließlich** in C liege. Zwei Strahlen in Γ heißen **äquivalent**, falls es keine endliche Teilmenge $U \subseteq V$ gibt, sodass die Strahlen schließlich in verschiedenen Komponenten von $\Gamma - U$ liegen. Es kann leicht überprüft werden, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert. Ihre Äquivalenzklassen heißen die **Enden** von Γ.

Wir zeigen zunächst, dass sich Enden robust in Bezug auf Quasi-Isometrien verhalten.

Lemma 3.4.1. *Seien Γ und Δ zwei lokal-endliche Graphen. Ist $f\colon \Gamma \to \Delta$ eine Quasi-Isometrie, so induziert f auf den Enden der Graphen eine Bijektion.*

Insbesondere haben beide Graphen die gleiche Anzahl an Enden.

Beweis. Seien $\gamma \geq 1$ und $c \geq 0$, sodass f eine (γ, c)-Quasi-Isometrie ist. Sei R ein Strahl von Γ. Indem wir je zwei Ecken von $f(R)$ durch einen Weg der Länge höchstens $\gamma + c$ verbinden, erhalten wir einen einseitig unendlichen Kantenzug W. Wir merken an, dass der Abstand zwischen zwei verschiedenen Vorkommen der gleichen Ecke durch einen Konstante κ beschränkt ist, da f eine Quasi-Isometrie ist. Daher sind je zwei Strahlen in W äquivalent.

Sei Q ein Strahl, der zu R äquivalent ist. Dann gibt es für jedes $r \in \mathbb{N}$ einen Weg, der die beiden Strahlen außerhalb des Balls mit Radius r um die Anfangsecke von R verbindet. Dies impliziert, dass wir für je zwei Strahlen R', Q', die durch $f(R)$ und $f(Q)$ in Δ definiert sind, Wege in Δ finden, die außerhalb jedes Balls mit Radius $r/\gamma - c$ um das f-Bild der Anfangsecke von R liegen und R' und Q' verbinden. Daher wird jedes Ende von Γ auf ein Ende von Δ abgebildet.

Weil f ein Quasi-Inverses g hat, definieren auch je zwei äquivalente Strahlen in Δ äquivalente Strahlen in Γ. Daher ist die auf den Enden induzierte Abbildung bijektiv. □

Trotzdem wir nicht von einem konkreten Ende einer Gruppe sprechen werden, folgt aus Lemma 3.4.1, dass die Anzahl der Enden für jeden Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems die gleiche ist.

Definition. Sei G eine endliche erzeugte Gruppe. Die **Anzahl der Enden** von G ist die Anzahl der Enden von eines jeden Cayley-Graphen von G bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $e(G)$.

Aus Lemma 3.4.1 folgt noch mehr als nur die Grundlage der Definition von Anzahlen von Enden von Gruppen, wie wir im nächsten Korollar sehen werden.

Korollar 3.4.2. *Die Anzahl an Enden ist eine Quasi-Isometrie-Invariante für endlich erzeugte Gruppen.* □

Es stellt sich natürlich die Fragen, welche Werte $e(G)$ annehmen kann und ob wir die Gruppen mit einer bestimmten Endenanzahl charakterisieren können.

Lemma 3.4.3. *Sei Γ ein zusammenhängender lokal-endlicher Graph, auf dem eine Gruppe G Ecken-transitiv operiert. Wenn Γ mindestens drei Enden hat, so hat Γ bereits unendlich viele Enden.*

Beweis. Nehmen wir an, dass Γ nur endliche viele aber mehr als zwei Enden hat. Dann existiert ein endlicher Teilgraph Δ von Γ, sodass für jede Komponente C von $\Gamma - \Delta$ alle Strahlen in C äquivalent sind. Weil Γ lokal-endlich ist, existiert in jeder Komponente C von $\Gamma - \Delta$ eine Ecke x, sodass $d(x, \Delta)$ grösser ist als der Durchmesser von Δ. Wir können $y \in V(\Delta)$ mittels eines Automorphismus φ auf x abbilden und erhalten, dass $\Delta \cap \varphi(\Delta)$ nach der Wahl von x leer ist. Es gibt mindestens drei unendliche Komponenten von $\Gamma - \varphi(\Delta)$, die Enden enthalten. Da von diesen zwei in der gleichen Komponente von $\Gamma - \Delta$ liegen müssen, widerspricht dies der Wahl von Δ, dass er alle Enden trennt. □

Wir schließen aus Lemma 3.4.3 den folgenden Satz.

Satz 3.4.4. *Für eine endlich erzeugte Gruppe G gilt $e(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.* □

Beispiel 3.4.5. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe.

(1) Genau dann gilt $e(G) = 0$, wenn G endlich ist.

(2) Ist $G = \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so gilt $e(G) = 1$.

(3) Ist $G = \mathbb{Z}$, so gilt $e(G) = 2$.

(4) Ist G eine freie Gruppe vom Rang mindestens 2, so gilt $e(G) = \infty$.

Wir werden in einem späteren Kapitel beweisen (Satz von Stallings), dass sich eine endlich erzeugte Gruppe mit mehr als einem Ende stets als freies Produkt mit Amalgamation zweier Gruppen oder HNN-Erweiterung einer Gruppen über jeweils einer endlichen Gruppe schreiben lässt.

Dem Rest dieses Abschnitts widmen wir der Charakterisierung endlich erzeugter Gruppen mit genau zwei Enden.

Definition. Eine Gruppe heißt **virtuell zyklisch**, falls es eine zyklische Untergruppe von endlichem Index gibt.

Satz 3.4.6. *Sei G eine endlich erzeugte unendliche Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *G ist virtuell zyklisch;*

(2) *$G \sim_{QI} \mathbb{Z}$;*

(3) *$e(G) = 2$.*

Beweis. Die Implikation (1)⇒(2) folgt aus Korollar 3.2.3. Korollar 3.4.2 und Beispiel 3.4.5 (3) implizieren die Implikation (2)⇒(3).

Wir nehmen nun an, dass $e(G) = 2$ gilt. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Cayley-Graph von G und einem endlichen Erzeugendensystem S von G. Dann existiert ein endlicher zusammenhängender Teilgraph $\Delta \subseteq \Gamma$, sodass $\Gamma \setminus \Delta$ genau zwei Komponenten C_1, C_2 hat und diese beiden unendlich sind.

Behauptung 1. Für jedes $g \in G$ sind entweder $C_1 \cap gC_1$ und $C_2 \cap gC_2$ oder $C_1 \cap gC_2$ und $C_2 \cap gC_1$ unendlich. Die anderen beiden Schnitte sind endlich.

> *Beweis von Behauptung* 1. Da $\Delta \cup g\Delta$ die vier involvierten Schnitte trennt, zusammen mit diesen die Eckenmenge von Γ überdeckt und bereits Δ zwei unendlich Komponenten hinterlässt, müssen genau zwei der vier Schnitte unendlich sein. Da diese aber weder beide in C_1 noch gC_1 noch C_2 noch gC_2 liegen können, da dessen Komplement auch unendlich ist, folgt die Behauptung. □

Sei

$$H := \{g \in G \mid C_1 \cap gC_1 \text{ und } C_2 \cap gC_2 \text{ sind unendlich}\}.$$

Behauptung 2. Die Menge H ist eine Untergruppe von G mit $|G : H| \leq 2$.

> *Beweis von Behauptung* 2. Offenbar enthält H zu jedem Element auch dessen Inverses. Wenn $g, h \in H$, dann ist $g(C_1 \cap hC_1)$ unendlich. Weil $C_2 \cap g(C_1 \cap hC_1)$ nach Behauptung 1 endlich ist, erhalten wir, dass $C_1 \cap g(C_1 \cap hC_1)$ und somit $C_1 \cap ghC_1$ endlich sind. Also ist H abgeschlossen unter Multiplikation und ist eine Untergruppe.
>
> Nehmen wir an, dass $G \neq H$ gilt. Wir wollen $|G : H| = 2$ zeigen. Seien $g, h \in G \setminus H$. Nach Behauptung 1 und Definition von H sind $C_1 \cap gC_2$ und $C_2 \cap gC_1$ unendlich und gleiches gilt für h statt g. Somit muss die

Menge $C_1 \cap g(C_1 \cap hC_2) \subseteq C_1 \cap gC_1$ endlich sein. Da auch $C_1 \cap g(C_2 \cap hC_2)$ endlich ist, folgt, dass $C_1 \cap ghC_2$ endlich ist. Nach Behauptung 1 liegt also gh in H. Damit sind g und h in der gleichen Nebenklasse von H und es folgt also $|G : H| = 2$. □

Behauptung 3. Für $h \in H$ mit $\Delta \cap h\Delta = \emptyset$ und für $\overline{C}_1 := V \setminus C_1$ gilt entweder

(i) $C_1 \cap h\overline{C}_1 = \emptyset$ und $\overline{C}_1 \cap hC_1 \neq \emptyset$ oder

(ii) $C_1 \cap h\overline{C}_1 \neq \emptyset$ und $\overline{C}_1 \cap hC_1 = \emptyset$.

Beweis von Behauptung 3. Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zusammenhang von Δ. □

Nach der Wahl von H und wegen Behauptung 1 ist $|C_1 \cap h\overline{C}_1| - |\overline{C}_1 \cap hC_1|$ endlich für alle $h \in H$. Wir definieren eine Funktion

$$\varphi\colon H \to \mathbb{Z},\ \varphi(h) := |C_1 \cap h\overline{C}_1| - |\overline{C}_1 \cap hC_1|.$$

Behauptung 4. Die Funktion φ ist ein Homomorphismus.

Beweis von Behauptung 4. Seien $g, h \in H$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(gh) &= |C_1 \cap gh\overline{C}_1| - |\overline{C}_1 \cap ghC_1| \\
&= |C_1 \cap g\overline{C}_1 \cap gh\overline{C}_1| + |C_1 \cap gC_1 \cap gh\overline{C}_1| \\
&\quad - |\overline{C}_1 \cap gC_1 \cap ghC_1| - |\overline{C}_1 \cap g\overline{C}_1 \cap ghC_1| \\
&= |C_1 \cap g\overline{C}_1 \cap gh\overline{C}_1| + |C_1 \cap gC_1 \cap gh\overline{C}_1| \\
&\quad - |\overline{C}_1 \cap gC_1 \cap ghC_1| - |\overline{C}_1 \cap gC_1 \cap gh\overline{C}_1| \\
&\quad + |C_1 \cap g\overline{C}_1 \cap ghC_1| + |\overline{C}_1 \cap gC_1 \cap gh\overline{C}_1| \\
&\quad - |\overline{C}_1 \cap g\overline{C}_1 \cap ghC_1| - |C_1 \cap g\overline{C}_1 \cap ghC_1| \\
&= |C_1 \cap g\overline{C}_1| - |\overline{C}_1 \cap gC_1| \\
&\quad + |gC_1 \cap gh\overline{C}_1| - |g\overline{C}_1 \cap ghC_1| \\
&= \varphi(g) + |C_1 \cap h\overline{C}_1| - |\overline{C}_1 \cap hC_1| \\
&= \varphi(g) + \varphi(h).
\end{aligned}$$

Also ist φ ein Homomorphismus. □

Behauptung 5. Der Kern von φ ist endlich.

Beweis von Behauptung 5. Weil Δ ein endlicher Teilgraph von Γ ist und G frei auf Γ operiert, gibt es nur endlich viele $h \in H$, für die $\Delta \cap h\Delta \neq \emptyset$ gilt. Für alle anderen $h \in H$ folgt aus Behauptung 3, dass $\varphi(h)$ von 0 verschieden sein muss. □

Sei $h \in H \setminus \varphi^{-1}(0)$. Dann hat $\varphi(h)$ und damit auch h unendliche Ordnung. Also gilt $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$. Da der Index von $\langle \varphi(h) \rangle$ in $\mathbb{Z}$ endlich ist und $\ker(\varphi)$ nach Behauptung 5 auch endlich ist, hat $\langle h \rangle$ endlichen Index in H und nach Behauptung 2 auch in G. □

3.5 Gruppenwachstum

Definition. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S ein endliches Erzeugendensystem von G. Für $r \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ definieren wir

$$B_r^{G,S}(g) := \{h \in G \mid d_S(g,h) \leq r\}.$$

Die Funktion

$$\beta_{G,S} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ r \mapsto |B_r^{G,S}(e)|$$

nennen wir die **Wachstumsfunktion** von G bezüglich S.

Beachte, dass $|B_r^{G,S}(e)| = |B_r^{G,S}(g)|$ für alle $g \in G$ gilt.

Beispiel 3.5.1. (1) Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S eine endliches Erzeugendensystem von G. Genau dann ist G endlich, wenn $\beta_{G,S}$ schließlich stationär ist.

(2) Sei S_1 das Standard-Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$. Dann gilt $\beta_{\mathbb{Z},S_1}(r) = 2r+1$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

(3) Sei $S_2 := \{2,3\}$ ein weiteres Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\beta_{\mathbb{Z},S_2}(r) = \begin{cases} 1, & \text{falls } r = 0, \\ 5, & \text{falls } r = 1, \\ 6r+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Sei S das Standard-Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}^2$. Dann gilt

$$\beta_{\mathbb{Z}^2,S}(r) = 1 + 4 \cdot \sum_{j=1}^{r} j = 2r^2 + 2r + 1.$$

(5) Sei F eine endlich erzeugte freie Gruppe vom Rang mindestens 2 und S ein freies Erzeugendensystem von F. Dann ist $\beta_{F,S}$ eine exponentielle Funktion.[6]

Beispiel 3.5.1 zeigt, dass verschiedene Erzeugendensysteme der gleichen Gruppe zu verschiedenen Wachstumsfunktionen führen. Wir werden jedoch später einsehen, dass all diese Funktionen zu gegebener Gruppe im Wesentlichen sehr ähnlich sind.

Proposition 3.5.2. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S ein endliches Erzeugendensystem von G.*

(1) (Submultiplikativität) *Für alle $r, r' \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r').$$

[6] Beweis: Übung

(2) *Sei F eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\beta_{G,S} \leq \beta_{F,S}.$$

Beweis. Übung □

Definition. Seien $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Funktionen.

(i) Ist f steigend, so heißt sie **verallgemeinerte Wachstumsfunktion**.

(ii) Seien f und g verallgemeinerte Wachstumsfunktionen. Die Funktion g **dominiert** f, falls es $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass

$$f(r) \leq \gamma g(\gamma r + c) + c$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Wir schreiben $f \prec g$.

(iii) Seien f und g verallgemeinerte Wachstumsfunktionen. Die Funktionen f und g heißen **äquivalent**, falls $f \prec g$ und $g \prec f$ gelten. Wir schreiben $f \sim g$.

Beispiel und Definition 3.5.3. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S ein endliches Erzeugendensystem von G. Dann ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ r \mapsto \beta_{G,S}\left(\lceil r \rceil\right)$$

eine verallgemeinerte Wachstumsfunktion. Ist H eine weitere endlich erzeugte Gruppe und T ein endliches Erzeugendensystem von H, so nennen wir $\beta_{G,S}$ **dominierend/äquivalent** zu $\beta_{H,T}$, falls gleiches für die zugehörigen verallgemeinerten Wachstumsfunktionen gilt.

Lemma 3.5.4. (1) *Dominanz von (verallgemeinerten) Wachstumsfunktionen ist eine Quasiordnung.*[7]

(2) *Äquivalenz von (verallgemeinerten) Wachstumsfunktionen ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Übung □

Nun wollen wir zeigen, dass verschiedene endliche Erzeugendensysteme der gleichen Gruppe im Wesentlichen die gleichen Wachstumsfunktionen liefern, d. h., dass sie äquivalente Wachstumsfunktionen liefern.

Proposition 3.5.5. *Seien G und H endlich erzeugte Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen S von G und T von H. Falls es eine quasi-isometrische Einbettung $\varphi\colon (G, d_S) \to (H, d_T)$ gibt, so gilt*

$$\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}.$$

[7] Eine Quasiordnung ist eine reflexive und transitive Relation.

Beweis. Seien $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die zur quasi-isometrischen Einbettung φ gehörigen Konstanten. Sei $e := \varphi(1_G)$. Dann gilt

$$d_T(e, \varphi(g)) \leq \gamma d_S(1_G, g) + c \leq \gamma r + c$$

für alle $g \in B_r^{G,S}(1_G)$ und damit

$$\varphi(B_r^{G,S}(1_G)) \subseteq B_{\gamma r + c}^{H,T}(e).$$

Seien $g, g' \in G$ mit $\varphi(g) = \varphi(g')$. Dann gilt

$$\frac{1}{\gamma} d_S(g, g') - c \leq d_T(\varphi(g), \varphi(g'))$$

und damit

$$d_S(g, g') \leq \gamma(d_T(\varphi(g), \varphi(g')) + c) = \gamma c.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \beta_{G,S}(r) &= |B_r^{G,S}(1_G)| \\ &\leq |B_{\gamma c}^{G,S}(1_G)| \cdot |B_{\gamma r + c}^{H,T}(e)| \\ &\leq |B_{\gamma c}^{G,S}(1_G)| \cdot |B_{\gamma r + c}^{H,T}(1_H)| \\ &= \beta_{G,S}(\gamma c) \cdot \beta_{H,T}(\gamma r + c). \end{aligned}$$

Weil der erste Faktor von r unabhängig ist, folgt $\beta_{G,S} \preccurlyeq \beta_{H,T}$. □

Proposition 3.1.5 liefert uns folgende Korollare:

Korollar 3.5.6. *Quasi-isometrische Gruppen haben äquivalente Wachstumsfunktionen.* □

Korollar 3.5.7. *Verschiedene Wachstumsfunktionen der gleichen endlich erzeugten Gruppe sind äquivalent.* □

Definition. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Der **Wachstumstyp** von G ist die Äquivalenzklasse der verallgemeinerten Wachstumsfunktionen, die alle Wachstumsfunktionen von G (bezüglich endlicher Erzeugendensysteme) enthält. Die Gruppe G hat ...

(i) ... **exponentielles Wachstum**, falls der Wachstumstyp die Funktion $x \mapsto e^x$ enthält;

(ii) ... **polynomielles Wachstum**, falls für eine endliche Erzeugendenmenge S von G ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\beta_{G,S} \preccurlyeq (x \mapsto x^a)$$

existiert;

(iii) ... **mittleres Wachstum**, falls das Wachstum weder exponentiell noch polynomiell ist.

Beispiel 3.5.8. (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Wachstumstyp der Gruppe $\mathbb{Z}^n$ ist polynomiell.[8]

(2) Sei F eine endlich erzeugte freie Gruppe vom Rang $n \geq 2$. Der Wachstumstyp von F ist exponentiell.

Bemerkung 3.5.9. (1) Nach Korollar 3.5.7 ist der Wachstumstyp einer endlich erzeugten Gruppe eine Quasi-Isometrie-Invariante.

(2) Da freie Gruppen vom Rang mindestens 2 exponentielles Wachstum haben, folgt aus Proposition 3.5.2, dass jede Gruppe höchstens exponentielles Wachstum hat. Andererseits folgt aus einem Satz von van den Dries und Wilkies, dass jede polynomielle Funktion von Wachstumsfunktionen endlich erzeugter Gruppen mit mittlerem Wachstum dominiert wird.

Bemerkung 3.5.10. Wir kennen Gruppen mit polynomiellem und mit exponentiellem Wachstum. Es gibt auch Gruppen mit mittlerem Wachstum, z. B. die sogenannte Grigorchuk-Gruppe.

Satz 3.5.11. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem S und sei H eine endlich erzeugte Untergruppe von G mit endlichem Erzeugendensystem T. Dann gilt*

$$\beta_{H,T} \preccurlyeq \beta_{G,S}.$$

Beweis. Die Menge $S' := S \cup T$ ist ein endliches Erzeugendensystem von G. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $h \in B_r^{H,T}(1)$:

$$d_{S'}(1,h) \leq d_T(1,h) \leq r.$$

Also gilt $B_r^{H,T}(1) \subseteq B_r^{G,S'}(1)$ und zusammen mit Korollar 3.5.7 folgt

$$\beta_{H,T} \preccurlyeq \beta_{G,S'} \preccurlyeq \beta_{G,S}. \qquad \square$$

Korollar 3.5.12. *Besitzt eine endlich erzeugte Gruppe G eine freie Untergruppe vom Rang 2, so hat G exponentielles Wachstum.* $\square$

Definition. Sei G eine Gruppe.

(i) Sei $G_1 := G$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv G_n als den **Kommutator**

$$[G_{n-1}, G] := \{h^{-1}g^{-1}hg \mid h \in G_{n-1}, g \in G\}$$

von G_{n-1} und G. Die Gruppe G heißt **nilpotent**, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $G_n = 1$ gibt. (Die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **absteigende Zentralreihe**.)

(ii) Die Gruppe G heißt **virtuell nilpotent**, falls sie eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index hat.

Ohne Beweis zitieren wir einen der bedeutendsten Sätze auf dem Gebiet des Gruppenwachstums:

---

[8] Beweis: Übung

Theorem 3.5.13 (Gromov)**.** *Eine endlich erzeugte Gruppe hat genau dann polynomielles Wachstum, wenn sie virtuell nilpotent ist.*

Korollar 3.5.14. *Virtuell nilpotent zu sein ist eine quasi-isometrische Invariante für endlich erzeugte Gruppen.* □

Kapitel 4

Bass-Serre-Theorie

Definition. Eine Gruppe G operiert **inversionsfrei** auf einem Graphen, falls jedes Element aus G, das eine Kante xy fixiert, bereits ihre beiden inzidenten Ecken x und y fixiert.

4.1 Gruppenoperationen auf Bäumen

In der Übung haben wir bereits gesehen, dass jede endliche Gruppe, die auf einem Baum operiert, einen Fixpunkt hat und dass wir das gleiche nicht von beliebigen Gruppenoperationen auf Bäumen erwarten können. Wir werden im Laufe dieses Abschnitts das Analogon dieser Übungsaufgabe für unendliche Gruppen beweisen.

Wir benötigen zunächst einen Begriff der unendlichen Graphentheorie.

Definition. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Eine Folge $\ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots$ von paarweise verschiedenen Ecken mit $x_ix_{i+1} \in E$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist ein **Doppelstrahl**.

Definition. Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Für $g \in G$ sei $R = \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots$ ein g-invarianter Doppelstrahl, i. e. $gR = R$. Dann operiert g als **Translation** auf R, falls es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $gx_i = x_{i+z}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gibt, und g operiert als **Reflexion** auf R, falls es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $gx_{z-i} = x_{z+i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gibt.

Für jedes $g \in G$ setzen wir $|g| := \min\{d(v, gv) \mid v \in V(T)\}$ und nennen diesen Wert die **Translationslänge** von g. Das Gruppenelement g heißt **elliptisch**, falls $|g| = 0$ gilt, und sonst **hyperbolisch**.

Bemerkung 4.1.1. Jedes elliptisches Element hat einen Fixpunkt.

Notation. Für zwei Ecken x, y in einem Baum sei $[x, y]$ der eindeutige Weg zwischen ihnen.

Wir beschreiben zunächst einige Eigenschaften hyperbolischer Elemente.

Lemma 4.1.2. *Die Gruppe G operiere auf dem Baum T inversionsfrei. Dann gelten die folgenden Aussagen für jedes hyperbolische $g \in G$:*

(i) *Es existiert genau ein g-invarianter Doppelstrahl R in T. Auf diesem operiert g als Translation.*

(ii) *Die Ordnung von g ist unendlich.*

(iii) *Es gilt $d(v, g^z v) = |z| \cdot |g| + 2d(v, R)$ für alle $v \in V(T)$ und $z \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$.*

(iv) *Es gilt $|g^z| = |z| \cdot |g|$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $v \in V(T)$ mit $d(v, gv) = |g|$ und sei $R := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} [g^z v, g^{z+1} v]$. Als erstes zeigen wir, dass R ein Doppelstrahl ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $[g^{z-1}v, g^z v]$ und $[g^z v, g^{z+1} v]$ sich nur in $g^z v$ schneiden, und somit reicht es aus zu zeigen, dass $[g^{-1}v, v]$ und $[v, gv]$ sich nur in v schneiden. Angenommen, es existiert eine von v verschiedene Ecke in dem Schnitt der beiden Wege. Dann ist der Nachbar w von v auf $[v, gv]$ auch in dem Schnitt $[v, g^{-1}v] \cap [v, gv]$. Dann liegt $g^{-1}w$ ebenfalls in $[g^{-1}v, gv]$ und wegen $d(w, gw) = d(w, g^{-1}w) \leq d(v, gv)$ folgt aus der Wahl von v, dass $w = g^{-1}v$ und $g^{-1}w = v$ gilt, was aber ein Widerspruch zur inversionsfreien Operation von G auf T liefert, da g die Kante vw fixiert, aber nicht die beiden mit ihr inzidenten Ecken v und w. Also ist R ein Doppelstrahl.

Da R offensichtlich g-invariant ist und g auf R als Translation operiert, ist für (i) nur noch die Eindeutigkeit von R zu zeigen. Sei dazu R' ein von R verschiedener Doppelstrahl. Dann gibt es eine Ecke u auf R mit minimalem Abstand zu R' und, weil R und R' verschieden sind, gibt es eine Ecke auf R mit beliebig großem Abstand zu R', die zudem in der gleichen g-Bahn wie u liegt. Dann kann aber R' nicht von g invariant gelassen werden. Dies zeigt (i).

Da R ein Doppelstrahl ist, müssen unendlich viele $g^z v$ verschieden sein. Deswegen kann g nicht endliche Ordnung haben, was (ii) zeigt.

Wir bemerken, dass aus der Definition von R folgt, dass (iii) für alle Ecken auf R gilt. Sei $x \in V(T)$ und $z \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Es existiert eine eindeutige Ecke $y \in R$ mit $d(x, y) = d(x, R)$. Dann gilt $[x, g^z x] = [x, y] \cup [y, g^z y] \cup [g^z y, g^z x]$ und damit folgt (iii).

Die Aussage (iv) ist eine direkte Folgerung von (iii). □

Eine im Beweis von Lemma 4.1.2 verwendete Eigenschaft hyperbolischer Elemente ist sogar schon hinreichend für eine Charakterisierung dieser Elemente.

Lemma 4.1.3. *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Sei $g \in G$. Genau dann ist g hyperbolisch, wenn es eine Ecke $v \in V(T)$ mit $v \neq gv$ gibt, sodass $[v, gv] \cap [gv, g^2 v]$ nur gv enthält.*

Beweis. Ist g hyperbolisch, so haben wir bereits im Beweis von Lemma 4.1.2 (i) gesehen, dass für jedes $v \in V(T)$ mit $d(v, gv) = |g|$ der Schnitt $[v, gv] \cap [gv, g^2 v]$ nur gv enthält. Für die andere Richtung folgt aus der Voraussetzung, dass $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}} [g^z v, g^{z+1} v]$ ein Doppelstrahl ist, auf dem g als Translation operiert. Insbesondere kann g keine Ecke fixieren und es folgt $|g| > 0$. Also ist g hyperbolisch. □

Falls zwei elliptische Elemente einen gemeinsamen Fixpunkt haben, so fixiert deren Produkt diese Ecke ebenfalls. Dieses offensichtliche Hindernis dafür, dass das Produkt elliptischer Elemente hyperbolisch ist, ist sogar das einzige, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 4.1.4. *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Seien g, h elliptische Elemente aus G. Dann ist gh genau dann hyperbolisch, wenn g und h keinen gemeinsamen Fixpunkt haben.*

Beweis. Es reicht, die Rückrichtung zu zeigen. Sei x ein Fixpunkt von g und y ein Fixpunkt von h, sodass $d(x, y)$ minimal ist. Nach Voraussetzung gilt $d(x, y) > 0$. Dann enthält $[x, y] \cap [gx, gy] = [x, y] \cap [x, gy]$ nur die Ecke x wegen der Minimalität von $d(x, y)$. Analog enthält $[x, y] \cap [hx, hy] = [x, y] \cap [hx, y]$ nur die Ecke y und beide Aussagen gelten auch für g^{-1} statt g bzw. h^{-1} statt h. Da x die Ecken y und $g^{-1}y$ trennt, erhalten wir, dass $h^{-1}y = y$ und $h^{-1}g^{-1}y$ durch $h^{-1}x$ getrennt werden. Daher und weil $h^{-1}x$ und x durch y getrennt werden und y und $gy = ghy$ durch x getrennt werden, folgt, dass y die Ecken $h^{-1}g^{-1}y$ und $ghy = gy$ trennt. Dies impliziert zusammen mit Lemma 4.1.3 die Behauptung. □

Definition. Die Gruppe G operiere auf X. Mit $\mathrm{Fix}(g)$ bezeichnen wir die Menge der **Fixpunkte** von $g \in G$, d. h. $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$.

Lemma 4.1.5. *Eine endlich erzeugte Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Ist jedes Element aus G elliptisch, so gibt es ein $x \in V(T)$ mit $Gx = \{x\}$.*

Hinweis. Wir werden später (Lemma 4.1.9) sehen, dass Lemma 4.1.5 ohne die Voraussetzung, dass G endlich erzeugt ist, nicht gilt.

Beweis von Lemma 4.1.5. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G. Für jedes $g \in G$ erzeugt $\mathrm{Fix}(g)$ einen nicht-leeren Teilbaum von T. Lemma 4.1.4 impliziert $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) \neq \emptyset$ für alle $g, h \in G$. Damit ist der endliche Schnitt $\bigcap_{s \in S} \mathrm{Fix}(s)$ ebenfalls nicht leer und jedes Element aus diesem Schnitt wird von ganz G fixiert. □

Lemma 4.1.6. *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Seien $g, h \in G$ hyperbolisch. Sei R_g der eindeutige g-invariante Doppelstrahl und R_h der eindeutige h-invariante Doppelstrahl. Wenn der Schnitt $R_g \cap R_h$ endlich ist, dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$, sodass g^m und h^n eine freie Gruppe vom Rang 2 erzeugen.*

Beweis. Wir setzen $P := R_g \cap R_h$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|P| + 2 \leq \min\{|g^m|, |h^n|\}$. Falls $P \neq \emptyset$, seien x_g, y_g die beiden Nachbarn der Endecken von P auf $R_g \setminus P$, sodass $g^m x_g$ in der Komponente von $R_g \setminus P$ liegt, die y_g enthält. Ansonsten seien a auf R_g und b auf R_h mit $d(a, b)$ kleinst möglich und seien x_g und y_g Nachbarn von a mit der genannten Eigenschaft. Falls $P \neq \emptyset$, sei A_g die Komponente von $T \setminus P$, die y_g enthält, und sei B_g die Komponente von $T \setminus P$, die x_g enthält. Ansonsten seien A_g und B_g die entsprechenden Komponenten von $T - x_g y_g$.

Analog wählen wir uns Ecken x_h, y_h auf R_h und Komponenten A_h, B_h von $T \smallsetminus P$. Weil g^m als Translation auf R_g operiert mit Translationslänge $|g^m| \geq d(x_g, y_g)$, folgt $(T \smallsetminus B_g)g^m \subseteq A_g$. Analog gilt $(T \smallsetminus B_h)h^n \subseteq A_h$. Mit Lemma 2.1.12 folgt, dass g^m und h^n eine freie Untergruppe von G frei erzeugen. □

Satz und Definition 4.1.7. *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(1) *G operiert* **trivial** *auf T, d. h., es existiert ein $v \in V(T)$ mit $Gv = \{v\}$. Wir nennen diese Operation* **elliptisch**.

(2) *Es gibt zwei hyperbolische Elemente g, h in G, die eine freie Untergruppe vom Rang 2 erzeugen und sodass der g-invariante und der h-invariante Doppelstrahl sich nur in einem endlichen Weg treffen. Wir nennen diese Operation* **hyperbolisch**.

(3) *Die Operation von G auf T ist nicht elliptisch und es existiert ein G-invarianter Doppelstrahl in T, auf dem alle Elemente aus G als Translation operieren. Wir nennen diese Operation* **zyklisch**.

(4) *Die Operation von G auf T is nicht elliptisch und nicht zyklisch und es existiert ein G-invarianter Doppelstrahl in T, auf Elemente aus G als Translation und als Reflexion operieren. Wir nennen diese Operation* **diedrisch**.

(5) *Die Operation von G ist weder elliptisch noch zyklisch und es existiert ein Strahl R, sodass für jedes $g \in G$ der Schnitt $R \cap Rg$ ein Teilstrahl von R ist. Wir nennen diese Operation* **parabolisch**.

Beweis. Offenbar können keine zwei der fünf Aussagen gleichzeitig eintreten. Daher müssen wir nur noch zeigen, dass für die Operation von G auf T eine der genannten Aussagen gilt.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass alle Elemente aus G elliptisch sind. Wir nehmen an, dass (1) nicht gilt, und wollen (5) zeigen. Dazu konstruieren wir zwei Folgen: eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Ecken und eine Folge $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Gruppenelementen. Sei $g_0 \in G$ beliebig und $x_0 \in \mathrm{Fix}(g_0)$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $g_i \in G$ so, dass $g_i x_{i-1} \neq x_{i-1}$ gilt, und $x_i \in V(T)$ so, dass $g_j x_i = x_i$ für alle $j \leq i$ gilt und $d(x_i, x_{i-1})$ minimal mit dieser Eigenschaft ist. Da G nach Lemma 4.1.5 nicht endlich erzeugt ist aber nach gleichem Lemma der endliche Schnitt $\bigcap_{j\leq i} \mathrm{Fix}(g_j)$ nicht leer ist, finden wir die beiden Folgen. Wir setzen

$$R = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots$$

Dann ist R wegen der Minimalität von $d(x_i, x_{i-1})$ und wegen Lemma 4.1.4 ein Strahl. Nun wollen wir zeigen, dass für jedes $g \in G$ der Schnitt $R \cap gR$ wiederum ein Strahl ist. Falls dies für ein $g \in G$ nicht der Fall ist, dann muss $R \cap gR$ endlich sein. Da g elliptisch ist, existiert ein Fixpunkt von g. Sei x ein solcher, der minimalen Abstand zu R hat und sei y die Ecke auf R, die diesen Abstand realisiert. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $gx_i \neq x_i$ und $d(x_0, x_i) > d(x_0, y)$. Wir haben bereits im Beweis von Lemma 4.1.5 bemerkt, dass $\mathrm{Fix}(g_{i+1})$ und $\mathrm{Fix}(g)$

jeweils einen Teilbaum erzeugen. Da $g_{i+1}x_i \neq x_i \neq gx_i$ gilt und x_{i+1} und x in verschiedenen Komponenten von $T - x_i$ liegen, haben g und g_{i+1} somit keinen gemeinsamen Fixpunkt. Lemma 4.1.4 impliziert also, dass gg_{i+1} hyperbolisch ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Operation von G auf T parabolisch.

Wir betrachten nun den Fall, dass G hyperbolische Elemente enthält. Daher kann die Operation von G auf T nicht elliptisch sein. Falls es zwei hyperbolische Elemente g, h gibt, sodass der Schnitt ihrer beiden invarianten Doppelstrahlen endlich ist, so impliziert Lemma 4.1.6 die Aussage (2). Also nehmen wir im Folgenden an, dass für je zwei hyperbolische Elemente g, h der Schnitt deren invarianter Doppelstrahlen R_g und R_h unendlich ist. Da $R_g \cap R_h$ zusammenhängend sein muss, ist es also entweder ein Strahl oder ein Doppelstrahl. Falls es für zwei hyperbolischen Elemente stets ein Doppelstrahl ist, so muss $R_g = R_h$ gelten für alle hyperbolischen $g, h \in G$. Da für ein elliptisches Element $f \in G$ dann g^f ebenfalls hyperbolisch ist und $R_{g^f} = f^{-1}R_g$ wegen $g^f(f^{-1}R_g) = f^{-1}gR_g = f^{-1}R_g$ für den eindeutigen g^f-invarianten Doppelstrahl R_{g^f} gilt, lassen auch die elliptischen Elemente R_g invariant. Damit gilt entweder (3) oder (4). Also nehmen wir an, dass g und h existieren, sodass $R' := R_g \cap R_h$ ein Strahl ist und wir setzen $f := g^h$. Dann ist f hyperbolisch und es gilt wie eben $R_f = h^{-1}R_g$. Weil $h^{-1}R' \cap R'$ unendlich ist und in $h^{-1}R_g$ liegt, enthält R_f ein unendliches Teilstück von R'. Sei $R := R' \cap R_f$. Angenommen, (5) gilt nicht, d. h., es existiert ein $e \in G$, sodass $eR \cap R$ endlich ist. Es ist $eR = R_{f^{e^{-1}}} \cap R_{g^{e^{-1}}} \cap R_{h^{e^{-1}}}$ und damit muss einer dieser drei Doppelstrahlen $R_{f^{e^{-1}}}$, $R_{g^{e^{-1}}}$ oder $R_{h^{e^{-1}}}$ endlichen Schnitt mit R haben und damit auch mit einem der drei (verschiedenen!) Doppelstrahlen R_f, R_g oder R_h. Dieser Widerspruch zeigt (5). □

Aus der Übung wissen wir bereits:

Lemma 4.1.8. *Inversionsfreie Operationen endlicher Gruppen auf Bäumen sind stets elliptisch.*

Beweis. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einem Baum T inversionsfrei operiert. Sei $t \in V(T)$. Dann ist die Bahn von t endlich. Der minimale Teilbaum T' von T, der diese Bahn enthält, ist damit auch endlich und G operiert auf ihm. Die mittlere Ecke oder Kante (abhängig davon, ob T' gerade oder ungeraden Durchmesser hat) eines längsten Weges in T' muss von G fixiert werden, da wir ansonsten einen Widerspruch zur Maximalität seiner Länge erhielten. Da die Operation von G auf T und damit auch auf T' inversionsfrei ist, muss dies eine Ecke sein und damit ist die Operation von G auf T' und damit auch auf T elliptisch. □

Lemma 4.1.9. *Für jede abzählbare Gruppe, die nicht endlich erzeugt ist, gibt es einen Baum, auf dem sie ingversionsfrei parabolisch operiert und sodass sie bezüglich dieser Operation nur elliptische Elemente hat.*

Beweis. Sei G eine abzählbare Gruppe, die nicht endlich erzeugt ist. Dann existieren abzählbar viele Untergruppen $U_0 < U_1 < \ldots$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = G$: da G

abzählbar ist, finden wir ein abzählbares Erzeugendensystem $S = \{s_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von G; wir setzen $V_i := \langle s_j \mid j \leq i\rangle$ und wählen dann eine strikt aufsteigende unendliche Teilfolge. Würde diese unendliche Teilfolge nicht existieren, gibt es also bereits ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = G$, was nach Voraussetzung nicht möglich ist.

Wir betrachten den Graphen T, dessen Eckenmenge aus den Nebenklassen der U_i bestehen, d. h. $V(T) = \{gU_i \mid g \in G, i \in \mathbb{N}\}$. Zwei Ecken gU_m und hU_n seien genau dann benachbart, wenn $|m - n| = 1$ und $gU_m \subseteq hU_n$ oder $hU_n \subseteq gU_m$ gelten. Zunächst zeigen wir, dass T zusammenhängend ist. Wegen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = G$, existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $g, h \in U_i$. Dann enthält

$$gU_m, gU_{m+1}, \ldots, gU_i = U_i = hU_i, hU_{i-1}, \ldots, hU_n$$

einen Weg von gU_m nach hU_n.

Jedes gU_0 hat genau einen Nachbarn, da die Nebenklassen von U_1 eine Partition von G bilden und gU_0 und gU_1 offenbar benachtbart sind. Zudem hat jedes gU_i genau einen Nachbarn in den Nebenklassen von U_{i+1}. Daraus folgt, dass T kreisfrei ist.

Mittels Linksmultiplikation operiert G auf T. Da für jedes $g \in G$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $g \in U_i$ existiert und somit $gU_i = U_i$ gilt, ist g elliptisch. Andererseits gibt es für jedes U_i ein Element g in $U_{i+1} \setminus U_i$. Für dies gilt dann $gU_i \neq U_i$. Ferner gilt $h^{-1}(hU_i) \neq hU_i$ für jede von U_i verschiedene Nebenklasse hU_i. Somit gibt es keinen Fixpunkt von ganz G. Nach dem Beweis von Satz 4.1.7 muss die Operation von G auf T somit parabolisch sein. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden wir aus der Kenntnis aller Operationen einer gegebenen Gruppe auf Bäumen Rückschlüsse über die Gruppe selber ziehen.

Definition. Eine Gruppe heißt **noethersch**, falls es keine unendliche echt aufsteigende Folge an Untergruppen gibt.

Eine Gruppe habe die Eigenschaft (**AR**), falls jede ihrer inversionsfreien Operationen auf Bäumen entweder elliptisch, zyklisch oder diedrisch ist.

Satz 4.1.10. *Sei G eine Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *G ist noethersch.*

(b) *Jede Untergruppe von G ist endlich erzeugt.*

(c) *Jede Untergruppe von G hat die Eigenschaft* (AR).

Beweis. Die Implikation (a)⇒(b) folgt unmittelbar, da jede Gruppe, die nicht endlich erzeugt ist, eine unendliche echt aufsteigende Folge von Untergruppen hat.

Um (b)⇒(c) zu zeigen, nehmen wir an, dass eine Untergruppe H von G nicht die Eigenschaft (AR) hat. Also existiert ein Baum T, auf dem H inversionsfrei und entweder hyperbolisch oder parabolisch operiert. Als erstes betrachten wir den Fall, dass H hyperbolisch auf T operiert. Damit enthält U eine freie Untergruppe F vom Rang 2 und somit eine Untergruppe von F, die nicht endlich erzeugt ist, im Widerspruch zu (b). Also sei die Operation von H auf T parabolisch. Sei $R = x_0 x_1 \ldots$ ein Strahl, sodass für alle $h \in H$ der Schnitt $hR \cap R$ wieder ein Strahl ist. Die Untergruppe $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_{x_i}$ von H ist endlich erzeugt nach Voraussetzung. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $H_{x_i} = H_{x_n}$ für alle $i \geq n$. OBdA gelte $n = 0$. Ist $g \in H$ elliptisch, so fixiert es eine Ecke $v \in V(T)$. Da $R \cap gR$ ein Strahl ist und $d(gx_i, v) = d(x_i, v)$ für das $i \in \mathbb{N}$ mit minimalem Abstand zu v gilt, muss $gx_j = x_j$ für alle $j \geq i$ gelten. Also gilt $g \in U$ und damit ist U die Gruppe aller elliptischen Elemente von H. Da T keinen Punkt hat, der von ganz G fixiert wird, aber $Ux_i = \{x_i\}$ gilt, existiert ein hyperbolisches Element h in H. Sei R_h der h-invariante Doppelstrahl in T. Für jede Ecke x auf R_h existiert ein $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass $h^z x$ und $h^{2z} x$ auf R liegen. Aus $H_{h^z x} = H_{h^{2z} x} = U$ folgt $H_x = U$. Also ist R_h invariant unter U. Sei nun g ein weiteres hyperbolisches Element und R_g der eindeutige g-invariante Doppelstrahl in T. Durch Ersetzen von g durch g^{-1} oder h durch h^{-1}, falls nötig, dürfen wir annehmen, dass $gx_j = x_{j+|g|}$ für alle x_j auf $R \cap R_g$ und $hx_j = x_{j+|h|}$ für alle x_j auf $R \cap R_h$ gilt. Setze $f := h^{-|g|} g^{|h|}$. Dann ist f elliptisch, also in U. Insbesondere gilt $R_h = h^{|g|} f R_h = g^{|h|} R_h$. Also ist R_h invariant unter $g^{|h|}$ und damit auch unter g. Somit ist R_h invariant unter ganz H und die Operation von H auf T nicht parabolisch. Dies zeigt die Implikation (b)$\Rightarrow$(c).

Es bleibt, die Implikation (c)$\Rightarrow$(a) zu zeigen. Nehmen wir dazu an, G wäre nicht noethersch. Wir finden also eine echt aufsteigende unendliche Folge $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Untergruppen von G. Sei $s_0 \in H_0$ und für $i \geq 1$ sei $s_i \in H_i \setminus H_{i-1}$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $U_i := \langle s_j \mid j \leq i \rangle$ eine unendliche Folge echt aufsteigender abzählbarer Untergruppen von G und $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ist ebenfalls eine abzählbare Untergruppe von G. Da jede endliche Teilmenge von U in einem U_i liegt, ist U nicht endlich erzeugt. Aus Lemma 4.1.9 folgt nun, dass es einen Baum gibt, auf dem U parabolisch operiert. Also hat U nicht die Eigenschaft (AR). $\square$

Nun werden wir freie Produkte mit inversionsfreien Operationen auf Bäumen in Beziehung setzen. Dazu betrachten wir zunächst die Situation, dass wir ein freies Produkt gegeben haben (Proposition 4.1.11) und anschließend gehen wir von einer Operation mit gewissen Eigenschaften aus und zeigen, dass die operierende Gruppe ein freies Produkt ist (Propositionen 4.1.13 und 4.1.14).

Proposition 4.1.11. *Seien A und B Gruppen. Dann existiert ein Baum T, auf dem $G := A * B$ operiert, sodass diese Operation die folgenden Eigenschaften hat:*

(1) *Die auf den Kanten induzierte Operation ist frei und transitiv.*

(2) *Die Operation ist inversionsfrei.*

(3) *Es gibt genau zwei Bahnen auf der Eckenmenge.*

(4) *Es gibt eine Kante $uv \in E(T)$ mit $A = G_u$ und $B = G_v$.*

Beweis. Sei T der Graph mit Eckenmenge aus den Linksnebenklassen von A und von B besteht, sodass zwei Ecken gA und hB benachbart sind, falls $g = h$ gilt. Der Beweis, dass T ein Baum ist, folgt seinem Analogon im Beweis von Satz 2.5.12: wir beachten dazu, dass wir in dem Abschnitt nicht verwendet haben, dass die dort betrachteten Gruppen endlich sind.

Dort haben wir ebenfalls gesehen, dass $G_A = A$ und $G_B = B$ gilt. (Ebenfalls wurde hierfür die Endlichkeit der involvierten Gruppen nicht gebraucht.) Weil A und B benachbart sind, folgt (4). Die Operation von G auf T hat auf den Ecken genau zwei Bahnen: die Linksnebenklassen von A bilden eine Bahn und die Linksnebenklassen von B bilden die zweite Bahn. Es folgen (2) und (3). Es bleibt (1) zu zeigen, wobei dort die Transitivität eine direkte Folgerung aus der Definition der Kanten ist. Der Stabilisator einer Kante uv muss wegen (3) im Schnitt von G_u und G_v enthalten sein. Da dieser trivial ist, folgt, dass G frei auf den Kanten von T operiert. □

Wir benötigen die folgende Variante des Ping-Pong-Lemmas.

Lemma 4.1.12. *Die Gruppe G operiere auf X. Seien $H_1, H_2 \leq G$ mit $|H_1| \geq 3$. Seien A, B zwei nicht-leere disjunkte Teilmengen von X. Es gelte $gB \subseteq A$ für alle $g \in H_1$ mit $g \neq 1$ und $gA \subseteq B$ für alle $g \in H_2$ mit $g \neq 1$. Dann ist die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe von G isomorph zu $H_1 * H_2$.*

Beweis. Übung □

Proposition 4.1.13. *Sei T ein unendlicher Baum. Die Gruppe G operiere auf T mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *G operiere transitiv und frei auf den Kanten von T.*

(2) *G operiere transitiv auf den Ecken von T.*

Sei $vw \in E(T)$ und $g \in G$ mit $gv = w$. Dann gilt $G \cong G_v * \langle g \rangle$.

Beweis. Da die Operation von G auf T inversionsfrei ist, folgt aus Lemma 4.1.3 wegen $ge \neq e$ für alle Kanten e, dass g hyperbolisch ist und daher nach Lemma 4.1.2 (ii) unendliche Ordnung hat.

Sei $e = vw$. Offensichtlich ist $(\{v\}, \emptyset)$ ein Fundamentalbereich der Operation von G auf T. Mit Satz 1.3.2 folgt also

$$G = \langle G_v \cup \{h \in G \mid vhv \in E(T)\}\rangle.$$

Beachte, dass es höchstens zwei G_v-Bahnen auf den mit v inzidenten Kanten gibt und daher auch höchstens zwei G_v-Bahnen auf den Nachbarn von v. Falls $g^{-1}v$ und gv in der gleichen G_v-Bahn liegen, dann erhalten wir einen Widerspruch, da die Existenz eines $h \in G_v$ mit $hgv = g^{-1}v$ impliziert, dass hg die Kante e fest lässt, was wegen $hg \neq 1$ nicht möglich ist. Daher gibt es genau zwei G_v-Bahen auf den Nachbarn von v. Diejenigen Ecken in der gleichen Bahn wie w können als Bild von v unter hg für ein geeignetes $h \in G_v$ erhalten werden und diejenigen

Ecken in der gleichen Bahn wie $g^{-1}v$ können als Bild von v unter hg^{-1} für ein geeignetes $h \in G_v$ erhalten werden. Somit haben wir folgendes gezeigt:

$$G = \langle G_v \cup \{g\} \rangle.$$

Sei A die Menge all derjenigen Ecken, die von v aus nur durch Wege erreichbar sind, die entweder gv oder $g^{-1}v$ enthalten, und sei B die Menge all derjenigen Ecken, die von v aus durch einen Weg erreichbar sind, der weder gv noch $g^{-1}v$ enthält. Offenbar ist $g^z B \subseteq A$ für alle $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Da G frei auf den Kanten von T operiert und $g \notin G_v$ ist, gilt $hgv \notin \{gv, g^{-1}v\}$ und $hg^{-1}v \notin \{gv, g^{-1}v\}$ für alle $h \in G_v$. Daraus folgt $hA \subseteq B$. Lemma 4.1.12 impliziert $G \cong G_v * \langle g \rangle$. □

Eine Modifikation des Beweises von Proposition 4.1.13 liefert die folgende Proposition.

Proposition 4.1.14. *Sei T ein vom Doppelstrahl verschiedener unendlicher Baum. Die Gruppe G operiere auf T, sodass diese Operation transitiv und frei auf den Kanten von T ist. Dann gilt $G \cong G_v * G_w$ für benachbarte Ecken $v, w \in V(T)$.*

Beweis. Übung □

4.2 Fundamentalgruppen von Graphen

Definition. Ein **Graph mit Involution** ist ein gerichteter Multigraph Γ zusammen mit einer Abbildung $\bar{\cdot}\colon E(\Gamma) \to E(\Gamma)$ mit $\bar{e} \neq e$ und $\bar{\bar{e}} = e$ und so, dass, falls e eine Kante von u nach v ist, $\bar{e}$ eine Kante von v nach u ist. Mit $i(e)$ bezeichnen wir die Anfangs- und mit $t(e)$ die Endecke von e. (Es soll also $t(e) = i(\bar{e})$ und $t(\bar{e}) = i(e)$ gelten.)

Beispiel 4.2.1. In einem (Multi-)Graphen können wir jede Kante durch je eine Orientung pro Richtung von ihr ersetzen und die Involution vertauscht die beiden Orientungen der Kante. Dadurch erhalten wir einen Graphen mit Involution.

Definition. Sei Γ ein Graph mit Involution. Sei $K = v_0e_0v_1 \ldots e_{k-1}v_k$ ein gerichteter Kantenzug in Γ, d. h., die Kante e_i mit $i(e_i) = v_i$ und $t(e_i) = v_{i+1}$. Gilt $\bar{e}_i = e_{i+1}$, so nennen wir $v_iv_{i+1}v_{i+2}$ einen **Stachel**. Hat K keinen Stachel, so ist K **stachelfrei**. Ist $v_iv_{i+1}v_{i+2}$ ein Stachel, so ist

$$K' = v_0e_0 \ldots e_{i-1}v_ie_{i+2} \ldots v_k$$

durch das **Entfernen** eines Stachels aus K entstanden. Gegeben seien zwei gerichtete Kantenzüge $K_1 = v_0e_0v_1 \ldots e_{k-1}v_k$ und $K_2 = w_0f_0w_1 \ldots f_{\ell-1}w_\ell$ mit $v_k = w_0$. Dann ist

$$K_1K_2 := v_0e_0v_1 \ldots e_{k-1}v_kf_0w_1 \ldots f_{\ell-1}w_\ell$$

ebenfalls ein gerichteter Kantenzug, die **Komposition** von K_1 und K_2.

Bemerkung 4.2.2. In einem Graphen mit Involution kann jeder gerichtete Kantenzug durch eine endliche Folge von Entfernen von Stacheln in einen stachelfreien gerichteten Kantenzug überführt werden.

Definition. Seien K, K' zwei gerichtete Kantenzüge eines Graphen Γ mit Involution. Wir schreiben $K \sim K'$, falls es eine Folge $K = K_0, \ldots, K_n = K'$ von gerichteten Kantenzügen gibt, sodass entweder K_i aus K_{i-1} oder K_{i-1} aus K_i durch Entfernen eines Stachels entstanden ist.

Bemerkung 4.2.3. Die Relation $\sim$ auf den gerichteten Kantenzügen in einem Graphen mit Involution ist eine Äquivalenzrelation.

Lemma 4.2.4. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Involution. Dann enthält jede Äquivalenzklasse von $\sim$ genau einen stachelfreien Kantenzug.*

Beweis. Übung □

Lemma 4.2.5. *Seien K_1, K_2, L_1, L_2 vier gerichtete Kantenzüge eines Graphen mit Involution, für die die Kompositionen K_1K_2 und L_1L_2 existieren. Wenn $K_1 \sim L_1$ und $K_2 \sim L_2$ gelten, so gilt auch $K_1K_2 \sim L_1L_2$.*

Beweis. Sei $K_1 = M_1, \ldots, M_m = L_1$ eine Folge an gerichtete Kantenzügen, die $K_1 \sim L_1$ verifiziert, und sei $K_2 = N_1, \ldots, N_n = L_2$ eine ebensolche Folge für $K_2 \sim L_2$. Dann ist $M_1N_1, \ldots, M_mN_1, \ldots, M_mN_n$ eine Folge, die $K_1K_2 \sim L_1L_2$ zeigt. □

Definition. Sei Γ ein Graph mit Involution. Sei $\pi_1(\Gamma, v)$ mit $v \in V(\Gamma)$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim$ auf den gerichteten Kantenzügen in Γ, die bei v starten und enden. Auf $\pi_1(\Gamma, v)$ definieren wir eine Multiplikation mittels $[K][L] := [KL]$. Lemma 4.2.5 impliziert, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist.

Lemma 4.2.6. *Sei Γ ein zusammenhängender Graph mit Involution und sei $v \in V(\Gamma)$.*

(1) *$\pi_1(\Gamma, v)$ ist eine Gruppe.*

(2) *Ist $u \in V(\Gamma)$, so sind $\pi_1(\Gamma, v)$ und $\pi_1(\Gamma, u)$ isomorph.*

Beweis. Die Aussage (1) ist durch die Wohldefiniertheit der Multiplikation offensichtlich.

Für (2) wählen wir uns einen gerichteten v–u-Kantenzug K und bemerken, dass jedes Element $[L]$ aus $\pi_1(\Gamma, v)$ durch „Konjugation mit K" zu einem Element $[K^{-1}LK]$ aus $\pi_1(\Gamma, u)$ wird, wobei K^{-1} die Umkehrung des Kantenzugs K ist, in der wir jede Kante e auf K durch $\bar{e}$ ersetzen. Da wir umgekehrt aus jedem Element $[M]$ aus $\pi_1(\Gamma, u)$ durch „Konjugation mit K^{-1}" ein Element $[KMK^{-1}]$ aus $\pi_1(\Gamma, v)$ wird, sind die entsprechenden Abbildungen invers zueinander. Ferner sind sie offensichtlich Homomorphismen, also gilt (2). □

Definition. Die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(\Gamma)$ eines zusammenhängenden Graphen Γ mit Involution ist ein Element Isomorphismenklasse der Gruppen $\pi_1(\Gamma, v)$ mit $v \in V(\Gamma)$.

Hinweis. Auch wenn die Elemente der Fundamentalgruppe Äquivalenzklassen von gerichteten Kantenzügen sind, so betrachten wir in der Regel Repräsentanten solcher Äquivalenzklassen als Elemente der Fundamentalgruppe und verstehen darunter die kanonischen Bilder.

Bemerkung 4.2.7. Durch Beispiel 4.2.1 übertragen sich unsere Definitionen auch auf (Multi-)Graphen.

Beispiel 4.2.8. Ist T ein Baum, so gilt $\pi_1(T) = 1$.

Definition. Für einen (gerichteten) Multigraphen Γ und eine Teilmenge $F \subseteq E(\Gamma)$ sei Γ/F der (gerichtete) Multigraph, dessen Eckenmenge die Menge der Komponenten von $(V(\Gamma), F)$ ist. Für jede Kante in $E(\Gamma) \setminus F$ fügen wir eine Kante zwischen den Komponenten, die ihre Endecken enthalten, hinzu. Wir beachten, dass dadurch Schlaufen und Mehrfachkanten entstehen können.

Lemma 4.2.9. *Sei Γ ein zusammenhängender Multigraph und sei T ein Teilbaum von Γ. Dann gilt $\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\Gamma/E(T))$.*

Beweis. Es reicht, die Behauptung für Graphen mit Involutionen zu zeigen, wobei dann der „Baum“ zu jeder Kante e auch $\bar{e}$ enthalte. Wir betrachten die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Gamma, x)$ bezüglich einer Ecke $x \in V(T)$ und die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Gamma/E(T))$ bezüglich der Ecke v_T aus $\Gamma/E(T)$, die alle Ecken von T enthält. Wir definieren eine Abbildung $\varphi_T \colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma/E(T))$. Für einen geschlossenen gerichteten Kantenzug $K = v_0e_0v_1 \dots v_k$ mit $v_0 = x = v_k$ in Γ sei $\varphi_T(K)$ das kanonische Bild von K in $\Gamma/E(T)$: zuerst ersetzen wir alle maximalen Teilkantenzüge in T durch v_i und anschließend ersetzen wir alle Kanten mit genau einer inzidenten Ecke in T durch ihr kanonisches Bild $\Gamma/E(T)$. Offenbar ist φ_T ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Es bleibt, die Bijektivität von φ_T zu zeigen.

Sei $K = v_0e_0v_1 \dots e_{k-1}v_k$ ein geschlossener gerichteter Kantenzug in $\Gamma/E(T)$. Durch Ersetzen der Ecke $v_i = v_T$ für $i \neq 0$ und $i \neq k$ durch einen Kantenzug, der die Endecken der Kanten e_i und e_{i+1} in T verbindet und Hinzufügen eines gerichteten Kantenzuges von x zur Endecke von e_0 in $V(\Gamma)$ und eines von der Endecke in $V(\Gamma)$ von e_{k-1} nach x erhalten wir einen geschlossenen gerichteten Kantenzug in Γ, der bei x beginnt und endet. Dieser wird offenbar durch φ_T auf K abgebildet. Also ist φ_T surjektiv.

Sei nun $K = v_0e_0v_1 \dots e_{k-1}v_k$ ein stachelfreier gerichteter Kantenzug im Kern von φ_T mit $v_0 = x = v_k$. Dann können wir K als eine Komposition $K_1L_1K_2 \dots L_{m-1}K_m$ von gerichteten Kantenzügen ansehen, wobei die K_i Kantenzüge in T und die L_i Kantenzüge in $\Gamma \setminus T$ sind. Wir nehmen an, dass K nicht trivial ist. Da $L_1L_2 \dots L_m$ in $\Gamma/E(T)$ äquivalent zum trivialen Kantenzug ist und nach Lemma 4.2.4 der triviale Kantenzug der eindeutige stachelfreie Kantenzug in seiner Äquivalenzklasse ist, enthält $L_1L_2 \dots L_m$ einen Stachel. Dieser kann in keinem der L_i enthalten sein, ist also bei der Komposition von einem L_i mit L_{i+1} entstanden. In Γ entspricht der Stachel einem Kantenzug $vew\bar{e}v$. Somit muss K_{i+1} ein geschlossener Kantenzug in T mit Anfangs- und Endecke w sein. Da $\pi_1(T)$ nach Beispiel 4.2.8 trivial und K_{i+1} stachelfrei ist, ist K_{i+1} der triviale Kantenzug. Dies widerspricht der stachelfreien Wahl von K und damit ist φ_T injektiv. □

Lemma 4.2.10. *Für jeden zusammenhängenden Multigraphen $\Gamma = (V, E)$ ist $\pi_1(\Gamma)$ eine freie Gruppe.*

Ist Γ endlich, so ist $|E| - |V| + 1$ der Rang von $\pi_1(\Gamma)$.

Beweis. Für den ersten Teil reicht es erneut, die Behauptung für Graphen mit Involution zu zeigen. Also nehmen wir an, dass Γ ein solcher sei. Sei T ein Spannbaum von Γ. (Erneut enthalte diese für jede Kante e auch $\bar{e}$.) Nach Lemma 4.2.9 gilt $\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\Gamma/T)$ und wir können uns auf den Fall beschränken, dass Γ genau eine Ecke hat.

Sei S eine minimale Teilmenge von $E(\Gamma)$ mit der Eigenschaft

$$E(\Gamma) = S \cup \{\bar{s} \mid s \in S\}.$$

Wir zeigen, dass $\pi_1(\Gamma)$ und die freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S isomorph sind. Jedes Element aus $\pi_1(\Gamma)$ hat nach Lemma 4.2.4 einen eindeutigen gerichteten Kantenzug als Repräsentanten, der stachelfrei ist. Indem wir jede Kante $\bar{s}$ durch s^{-1} ersetzen und die Ecken fallenlassen, entspricht dieser Kantenzug einem reduzierten Wort aus $S \cup S^{-1}$, das genau dann trivial ist, wenn der Kantenzug trivial ist. Umgekehrt entspricht jedes reduzierte Wort über $S \cup S^{-1}$ einem gerichteten Kantenzug in Γ, indem wir s^{-1} durch $\bar{s}$ ersetzen und die entsprechenden Ecken einfügen. Da diese Zuordnungen Kompositionen von Kantenzügen und Konkatenationen von Wörtern respektieren, sind $\pi_1(\Gamma)$ und die freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S isomorph.

Sei nun Γ lediglich ein zusammenhängender Multigraph. Dann gilt

$$|E| - |V| + 1 = |E(\Gamma/E(T))| - |V(\Gamma/E(T))| + 1$$

nach unseren Überlegungen für den erste Teil und damit folgt der Zusatz unmittelbar. □

Hinweis. Die Existenz eines Spannbaumes kann mit dem Lemma von Zorn gezeigt werden. Es ist sogar so, dass über dem Axiomensystem ZF die Existenz von Spannbäumen für alle (Multi-)Graphen äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

Definition. Eine Gruppe G operiere auf einem Graphen Γ. Dann ist der **Quotientengraph** Γ/G definiert als Multigraph, dessen Eckenmenge die Bahnen von G in $V(\Gamma)$ bilden und dessen Kantenmenge durch die Bahnen von G in $E(\Gamma)$ induziert ist.[1]

[1] D. h., es existiert eine Bijektion zwischen den Kanten von Γ/G und den Bahnen der Kanten in Γ, sodass ür jede Kante e in Γ/G ihre inzidenten Ecken genau die Bahnen der inzidenten Ecken einer Kante f aus dem Bild von e ist. Beachte, das dies unabhängig von der Wahl von f ist.

Beispiel 4.2.11. Sei G eine Gruppe mit Erzeugendensystem S und sei Γ der Cayleygraph von Γ und S. Dann ist Γ/G ein Graph mit genau einer Ecke und höchstens $|S|$ vielen Schlingen. (Beachte, dass es weniger Schlingen geben kann, falls $S \cap S^{-1}$ nicht leer ist.)

Bemerkung 4.2.12. Die Gruppe G operiere auf dem Graphen Γ. Dann ist die kanonische Projektion $\varrho\colon \Gamma \to \Gamma/G$ ein surjektiver Graphenhomomorphismus, d. h., benachbarte Ecken werden durch ϱ auf benachbarte Ecken abgebildet.

Proposition und Definition 4.2.13. *Für jeden zusammenhängenden Graphen Γ existiert ein Baum T_Γ und eine freie Operation von $\pi_1(\Gamma)$ auf T_Γ mit $T_\Gamma/\pi_1(\Gamma) \cong \Gamma$. Der Baum T_Γ heißt die* **universelle Überlagerung** *von Γ.*

Beweis. Sei T ein Spannbaum von Γ. Ist S eine Orientierung der Kanten von $\Gamma - T$, so haben wir im Beweis von Lemma 4.2.10 gesehen, dass $\pi_1(\Gamma)$ isomorph zur freien Gruppe mit freiem Erzeugendensystem S ist. Insbesondere gibt es eine kanonische Abbildung $\varphi\colon S \to \pi_1(\Gamma)$, die jedem $s \in S$ den eindeutigen Kreis in $T + s$ zuordnet. (Beachte, dass wir formal gesehen jede Kante aus T durch zwei entgegengesetzt orientierte Kanten ersetzen müssen, um einen gerichteten Kreis hier zu erhalten.) Wir definieren einen Graphen T_Γ wie folgt: seine Eckenmenge sei

$$\bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} \{(g, v) \mid v \in V(T)\}$$

und seine Kantenmenge sei die Vereinigung der Mengen

$$E_1 := \bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} \{\{(g, u), (g, v)\} \mid \{u, v\} \in E(T)\}$$

und

$$E_2 := \bigcup_{s=(u,v) \in S} \bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} \{\{(g, u), (gs, v)\}\}\,.$$

Beachte, dass E_1 uns liefert, dass T_Γ aus Kopien von T besteht, und E_2 uns sagt, wie die Kanten zwischen einelnen Kopien von T aussehen.

Zu zeigen, dass T_Γ tatsächlich die geforderten Bedingungen erfüllt, verbleibt als Übungsaufgabe. □

Das folgende Korollar haben wir im Beweis von Proposition 4.2.13 eingesehen.

Korollar 4.2.14. *Sei Γ ein Graph, T ein Spannbaum von Γ und T_Γ die universelle Überlagerung von Γ (konstruiert bezüglich des Spannbaums T). Dann enthält T_Γ eine isomorphe Kopie von T, die durch die kanonische Projektion $\varrho\colon T_\Gamma \to \Gamma$ auf T abgebildet wird.* □

4.3 Graphen von Gruppen

Bemerkung 4.3.1. Die inversionsfreie Operation einer Gruppe G auf einem Graphen Γ liefert uns folgende Aussagen:

(1) Γ/G ist ein Multigraph $\widehat{\Gamma}$.

(2) Für jede Ecke $v \in V(\widehat{\Gamma})$ existiert eine Gruppe G^v mit $G^v \cong G_x$ für alle $x \in V(\Gamma)$ mit $Gx = v$.

(3) Für jede Kante $e \in E(\widehat{\Gamma})$ existiert eine Gruppe G^e mit $G^e \cong G_f$ für alle $f \in E(\Gamma)$, die auf e abgebildet werden.

(4) Für jede Kante $e \in E(\widehat{\Gamma})$ gibt es die beiden injektiven Gruppenmonomorphismen $\iota_{e,i(e)}\colon G^e \to G^{i(e)}$ und $\iota_{e,t(e)}\colon G^e \to G^{t(e)}$.

In Analogie zu der vorigen Bemerkung machen wir nun folgende Definition.

Definition. Ein **Graph von Gruppen** ist ein Paar $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$, wobei Γ ein zusammenhängender Graph mit Involution ist und $\mathcal{G}$ eine Funktion, die jeder Ecke v eine Gruppe G_v und jeder Kante e eine Gruppe G_e zuordnet, sodass $G_e = G_{\bar{e}}$ gilt, und Λ eine Familie von Monomorphismen $\alpha_e\colon G_e \to G_{i(e)}$ ist, einer für jede Kante e. Die Gruppen G_v nennen wir **Eckengruppen** und die Gruppen G_e **Kantengruppen**.

Beispiel 4.3.2. Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf einem Graphen Γ operiert.

(1) Ist $\mathcal{G}$ eine Funktion, die jeder Ecke v und jeder Kante e ihren Stabilisator G_v bzw. G_e zuordnet, und ist Λdie Familie der kanonischen Abbildungen vom Stabilisator von e in den Stabilisator von v für jede mit e incidente Ecke v, so ist $(\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen.

(2) Der Quotientengraph Γ/G wird gemäß Bemerkung 4.3.1 zu einem Graphen von Gruppen.

Bemerkung 4.3.3. In der Regel werden wir mit G_v und G_e die Ecken- bzw. Kantengruppen bezeichnen. Dies kollidiert mit der Notation für Stabilisatoren der Ecken bzw. Kanten. Zudem wird der Fall, dass die Stabilisatoren der Ecken oder Kanten genau die Ecken bzw. Kantegruppen sind, eine für uns wichtige Rolle spielen. Sollte es in der jeweiligen Situation nicht klar sein, auf welche Notation wir uns beziehen, so werden wir dies extra herausstellen.

Als nächstes werden wir zwei Definitionen der Fundamentalgruppe von Graphen von Gruppen angeben und zeigen, dass beide definierten Gruppen in natürlicher Art und Weise isomorph zueinander sind. Eine neue Definition der Fundamentalgruppe (im Vergleich zum Abschnitt 4.2) ist nötig, um die Funktion $\mathcal{G}$ mit einzubeziehen.

Definition. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und sei T ein Spannbaum von Γ. Für jedes $e \in E(\Gamma)$ enthalte T dieses Mal höchstens ein Element aus $\{e, \bar{e}\}$. Für jede Eckengruppe G_v sei eine Präsentation $\langle S_v \mid R_v \rangle$ und für jede Kantengruppe G_e ein Erzeugendensystem S_e gegeben. Dann ist die **Fundamentalgruppe** von $\mathbb{G}$ (bezüglich T) definiert durch die Präsentation

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) := \left\langle \dot{\bigcup}_{v \in V(\Gamma)} S_v \cup \{g_e \mid e \in E(\Gamma)\} \mid \bigcup_{v \in V(\Gamma)} R_v \cup N \right\rangle,$$

wobei die g_e neue Erzeuger sind und die Menge N der Relatoren folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} N := &\{g_e \mid e \in E(T)\} \cup \{g_e g_{\bar{e}} \mid e \in E(\Gamma)\} \\ &\cup \{g_e(\alpha_{\bar{e}}(s)) g_e^{-1} (\alpha_e(s))^{-1} \mid e \in E(\Gamma), s \in S_e\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Beispiele von solchen Fundamentalgruppen und zwar habe darin der Graph im Wesentlichen eine Kante. Dies soll heißen, dass seine Kantenmenge $\{e, \bar{e}\}$ für ein e ist.

Beispiel 4.3.4. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen mit $E(\Gamma) = \{e, \bar{e}\}$. Sei T ein Spannbaum von Γ und seien Präsentationen und Erzeugermengen der Ecken- und Kantengruppen wie in der Definition der Fundamentalgruppe gegeben.

(1) Hat Γ genau zwei Ecken u, v, so enthält T ein Kante von Γ und es gilt in der Präsentation von $\pi_1(\mathbb{G}, T)$, dass alle g_e mit $e \in E(\Gamma)$ trivial sind. Mit Tietze-Transformationen (Entfernen der Erzeuger g_e) erhalten wir die Präsentation

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) = \left\langle S_u \cup S_v \mid R_u \cup R_v \cup \{(\alpha_{\bar{e}}(s))(\alpha_e(s))^{-1} \mid e \in E(\Gamma), s \in S_e\} \right\rangle.$$

Es folgt

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) \cong G_u *_{G_e} G_v,$$

wobei die für das freie Produkt mit Amalgamation notwendigen Monomorphismen durch α_e und $\alpha_{\bar{e}}$ gegeben sind.

(2) Hat Γ genau eine Ecke v, so sind die Kanten von Γ Schlingen. Mittels Tietze-Transformationen können wir den Erzeuger $g_{\bar{e}}$ (aber nicht gleichzeitig auch g_e) aus der Präsentation der Fundamentalgruppe entfernen und erhalten

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) = \left\langle S_v \cup \{g_e\} \mid R_v \cup \{g_e(\alpha_{\bar{e}}(s)) g_e^{-1} (\alpha_e(s))^{-1} \mid s \in S_e\} \right\rangle.$$

Also gilt

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) \cong G_v *_{\alpha_{\bar{e}}^{-1} \alpha_e},$$

wobei der für die HNN-Erweiterung benötigte Isomorphism durch $\alpha_{\bar{e}}^{-1} \alpha_e$ gegeben ist und die Bilder von G_e unter α_e und $\alpha_{\bar{e}}$ aufeinander abbildet.

Nun kommen wir zur zweiten Definition der Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen. Während die erste Definition von der Wahl eines Spannbaums abhängt, wird dies in der zweiten Definition nicht der Fall sein. Wenn wir später die Äquivalenz dieser beiden Definitionen zeigen, werden wir damit zeigen, dass die Gruppen aus der ersten Definition für verschiedene Spannbäume isomorph sind. Mit der zweiten Definition der Fundamentalgruppe verfolgen wir die in Abschnitt 4.2 benutzte Strategie für Graphen, die wir allerdings etwas an unsere neue Definition anpassen müssen.

Definition. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen. Ein **$\mathbb{G}$-Kantenzug** (der **Länge** $|P| = k$) von $u \in V(\Gamma)$ nach $v \in V(\Gamma)$ ist eine Folge $P = g_0 e_1 \dots e_k g_k$, wobei $e_1 \dots e_k$ einen gerichteten Kantenzug in Γ induziert und $g_0 \in G_u$ und $g_k \in G_v$ sowie $g_i \in G_{t(e_i)} = G_{i(e_{i+1})}$ für alle $0 < i < k$ sind. Für $0 \leq i \leq j \leq k$ ist $g_i e_{i+1} \dots e_j g_j$ ein **$\mathbb{G}$-Teilkantenzug** von P. Ist $P = g_0 e_1 \dots e_k g_k$ ein $\mathbb{G}$-Kantenzug von u nach v und $Q = h_0 f_1 \dots f_\ell h_\ell$ ein $\mathbb{G}$-Kantenzug von v nach w, so ist die **Konkatenation** von P und Q der $\mathbb{G}$-Kantenzug

$$PQ = g_0 e_1 \dots e_k (g_k h_0) f_1 \dots f_\ell h_\ell$$

von u nach w. Zwei $\mathbb{G}$-Kantenzüge P und Q heißen **elementar äquivalent**, falls Q aus P durch eine der beiden folgenden Operationen oder ihrer Umkehrungen entstanden ist:

(i) Ersetze einen $\mathbb{G}$-Teilkantenzug $ge(\alpha_{\bar{e}}(c))\bar{e}g'$ mit $e \in E(\Gamma)$, mit $c \in G_e$ und mit $g, g' \in G_{i(e)}$ durch $g(\alpha_e(c))g'$.

(ii) Ersetze einen $\mathbb{G}$-Kantenzug geg' mit $e \in E(\Gamma)$, mit $g \in G_{i(e)}$ und mit $g' \in G_{t(e)}$ durch $(g(\alpha_e(c)))e((\alpha_{\bar{e}}(c))^{-1}g')$, wobei $c \in G_e$ ist.

Sei $\sim$ auf den $\mathbb{G}$-Kantenzügen eine Relation, sodass für zwei $\mathbb{G}$-Kantenzüge P, Q genau dann $P \sim Q$ gilt, wenn es eine Folge $P = P_1 \dots P_k = Q$ von $\mathbb{G}$-Kantenzügen gibt, sodass P_i und P_{i+1} für alle $1 \leq i < k$ elementar äquivalent sind. Offenbar ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Um die Elemente der Äquivalenzklassen werden wir uns später genauer kümmern und zeigen, dass die bezüglich der Operation (i) entstandenen minimalen Elemente einer Äquivalenzklasse alle modulo der Operation (ii) äquivalent sind. Aber zunächst sind wir an der zweiten Definition der Fundamentalgruppe und der Äquivalenz beider Definitionen interessiert.

Definition. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und sei $v \in V(\Gamma)$. Dann ist die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(\mathbb{G}, v)$ von $\mathbb{G}$ (bezüglich v) auf den Äquivalenzklassen von $\mathbb{G}$-Kantenzügen von v nach v definiert, wobei die Multiplikation mittels $[P][Q] := [PQ]$ gegeben ist.

Bemerkung 4.3.5. Dass die Multiplikation auf $\pi_1(\mathbb{G}, v)$ wohldefiniert ist, folgt mit einer Argumentation ähnlich der im Beweis von Lemma 4.2.5. Damit haben wir dann auch direkt gegeben, dass die Fundamentalgruppe bezüglich einer Ecke $v \in V(\Gamma)$ eine Gruppe ist.

Proposition 4.3.6. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, $v \in V(\Gamma)$ und T ein Spannbaum von Γ. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi\colon \pi_1(\mathbb{G}, v) \to \pi_1(\mathbb{G}, T), [g_0 e_1 \ldots e_k g_k] \mapsto g_0 g_{e_1} \ldots g_{e_k} g_k$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Aus der Definition der Relation $\sim$ und der dritten Menge in der Definition von N in der Definition von $\pi_1(\mathbb{G}, T)$ folgt, dass φ wohldefiniert ist. Aus der Definition der Konkatenation von $\mathbb{G}$-Kantenzügen folgt, dass φ ein Homomorphismus ist. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Dazu konstruieren wir die Umkehrabbildung von φ.

Wir konstruieren eine Abbildung des Erzeugendensystems von $\pi_1(\mathbb{G}, T)$ nach $\pi_1(\mathbb{G}, v)$. Für $u \in V(\Gamma)$ sei $P_u = x_0 e_1 x_1 \ldots e_k x_k$ der eindeutige Kantenzug in T von v nach u und sei $P_{u,\mathbb{G}} = 1 e_1 1 \ldots e_k 1$ der zugehörige $\mathbb{G}$-Kantenzug. Für $g \in G_u$ mit $u \in V(\Gamma)$ definieren wir als Bild von g die Äquivalenzklasse von $P_{u,\mathbb{G}} g P_{u,\mathbb{G}}^{-1}$. Für $e \in E(\Gamma)$ definieren wir als Bild von s_e die Äquivalenzklasse von $P_{i(e),\mathbb{G}} e P_{t(e),\mathbb{G}}^{-1}$.

Es ist leicht einzusehen, dass die Relatoren in der Definition von $\pi_1(\mathbb{G}, T)$ alle auf die Äquivalenzklasse des trivialen $\mathbb{G}$-Kantenzuges abgebildet werden. Mit der universellen Eigenschaft der Präsentation einer Gruppe (Satz 2.3.4) folgt, dass die definierte Abbildung zu einem Homomorphismus

$$\psi\colon \pi_1(\mathbb{G}, T) \to \pi_1(\mathbb{G}, v)$$

fortgesetzt werden kann, der offenbar die Umkehrabbildung von φ ist. $\square$

Korollar 4.3.7. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, $v \in V(\Gamma)$ und T ein Spannbaum von Γ. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Proposition* 4.3.6 *ist die Menge*

$$\{[P_{u,\mathbb{G}} g P_{u,\mathbb{G}}^{-1}] \mid u \in V(\Gamma), g \in G_u\} \cup \{[P_{i(e),\mathbb{G}} e P_{t(e),\mathbb{G}}^{-1}] \mid e \in E(\Gamma \setminus T)\}$$

ein Erzeugendensystem von $\pi_1(\mathbb{G}, v)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Beweis von Proposition 4.3.6, da die angegebene Menge das Bild des Erzeugendensystems von $\pi_1(\mathbb{G}, T)$ aus dessen Definition ist. $\square$

Durch wiederholtes Anwenden von Proposition 4.3.6 bekommen wir folgende Folgerung:

Korollar 4.3.8. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, seien $v, w \in V(\Gamma)$ und seien T, T' Spannbäume von Γ. Dann gilt*

$$\pi_1(\mathbb{G}, v) \cong \pi_1(\mathbb{G}, w) \cong \pi_1(\mathbb{G}, T) \cong \pi_1(\mathbb{G}, T'). \qquad \square$$

Definition. Die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(\mathbb{G})$ eines Graphen von Gruppen $\mathbb{G}$ ist eine Gruppe aus der Isomorphieklasse der Fundamentalgruppen bezüglich eines beliebigen Spannbaums (bzw. einer beliebigen Ecke).

Definition. Wir nennen einen $\mathbb{G}$-Kantenzug **$\mathbb{G}$-reduziert**, falls wir keine Operation vom Typ (i) bei der Definition der elementaren Äquivalenz durchführen können. Für jede Kantengruppe G_e sei X_e eine Transversale (bezüglich der Rechtsnebenklassen) von $\alpha_e(G_e)$ in $G_{i(e)}$. Ein $\mathbb{G}$-reduzierter $\mathbb{G}$-Kantenzug $g_0e_1g_1\dots e_kg_k$ ist eine **Normalform**, falls $g_i \in X_{\bar{e}_i}$ für alle $0 < i \leq k$ gilt.

Wir werden (wie auch in früheren Situationen) zeigen, dass es genau eine Normalform in jeder Äquivalenzklasse gibt:

Satz 4.3.9. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und seien $P = g_0e_1\dots e_kg_k$ und $Q = h_0f_1\dots f_\ell h_\ell$ zwei $\sim$-äquivalente $\mathbb{G}$-reduzierte $\mathbb{G}$-Kantenzüge. Dann gilt $k = \ell$ und $e_i = f_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ und es existieren $a_i \in G_{e_i}$ mit:*

1. $g_0 = h_0(\alpha_{e_1}(a_0))$ *und*
2. $g_i = (\alpha_{\bar{e}_i}(a_i^{-1}))h_i(\alpha_{e_{i+1}}(a_{i+1}))$ *für alle* $1 \leq i < k$ *und*
3. $g_k = (\alpha_{\bar{e}_k}(a_k^{-1}))h_k$.

Insbesondere existiert in jeder Äquivalenzklasse genau eine Normalform.

Beweis. Es genügt den Zusatz zu zeigen, da dann zwei äquivalente $\mathbb{G}$-reduzierte $\mathbb{G}$-Kantenzüge äquivalent (mittels Operationen vom Typ (ii)) zu der gleichen Normalform sind. Die entsprechenden Operationen hintereinander gesetzt (mit Invertierung in dem zweiten Fall) liefert, dass die beiden $\mathbb{G}$-reduzierten $\mathbb{G}$-Kantenzüge mittels der Operation (ii) äquivalent sind. – Und genau das wird in der Aussage dieses Satzes behauptet.

Offenbar ist jeder $\mathbb{G}$-Kantenzug äquivalent zu einem $\mathbb{G}$-reduzierten $\mathbb{G}$-Kantenzug und auch zu einer Normalform, wobei die zweite Aussage dadurch folgt, dass wir g_i als $\alpha_{\bar{e}_i}(c_i)x_i$ mit $x_i \in X_{\bar{e}_i}$ und $c_i \in G_{\bar{e}_i} = G_{e_i}$ schreiben und dann $\alpha_{\bar{e}_i}(c_i)$ mittels der zweiten Operation über die Kante e_i zurückschieben können. Induktiv folgt dann die Aussage.

Für Ecken $u, v \in V(\Gamma)$ sei $P_{\mathbb{G}}(u, v)$ die Menge der $\mathbb{G}$-Kantenzüge von u nach v und $N_{\mathbb{G}}(u, v)$ die Menge der Normalformen von u nach v. Für eine Normalform $P = g_0e_1\dots e_kg_k$ von u nach v und für $g \in G_u$ setzen wir

$$\varphi(g, g_0e_1\dots e_kg_k) := (gg_0)e_1\dots e_kg_k$$

und, falls e eine Kante mit $t(e) = u$ ist, setzen wir

$$\varphi(1e1, g_0e_1\dots e_kg_k) := \begin{cases} (\alpha_e(g_e)g_2e_2\dots e_kg_k, & \text{falls } e = \bar{e}_1 \text{ und } x_e = 1, \\ \alpha_e(g_e)ex_ee_1\dots e_kg_k, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $g_e \in G_e$ und $x_e \in X_e$ mit $(g_e\alpha_e)x_e = g_0$ sind. Jeden $\mathbb{G}$-Kantenzug können wir als Konkatenation von $\mathbb{G}$-Kantenzügen $g \in G_v$ oder $1e1$ schreiben. Für eine Normalform N von u nach v und einen $\mathbb{G}$-Kantenzug P mit $P = P_1\dots P_n$, wobei die P_i die eben beschriebene Form haben, definieren wir nun rekursiv

$$\varphi(P, N) := \varphi(P_1, \varphi(P_2\dots P_n, N)).$$

Mit dieser Definition gilt offenbar

$$\varphi(N, 1) = N$$

für jede Normalform N von u nach v mit dem trivialen $\mathbb{G}$-Kantenzug 1 von v nach v. Wir wollen auch einsehen, dass für zwei äquivalente $\mathbb{G}$-Kantenzüge P_1, P_2 von u nach v und jede Normalform N von v nach w gilt:

$$\varphi(P_1, N) = \varphi(P_2, N),$$

denn dann folgern wir für zwei äquivalente Normalformen N_1, N_2 von u nach v:

$$N_1 = \varphi(N_1, 1) = \varphi(N_2, 1) = N_2$$

und damit liegt in jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ genau eine Normalform. Es reicht, die Gleichung

$$\varphi(P_1, N) = \varphi(P_2, N)$$

für $\mathbb{G}$-Kantenzüge P_1, P_2 zu verifizieren, die durch eine Operation in einander überführbar sind. Sei dazu zunächst ein $\mathbb{G}$-Kantenzug $P = P_1 g e(\alpha_{\bar{e}}(c))\bar{e}g' P_2$ gegeben. Wenn wir

$$\varphi(ge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g', N) = \varphi(g\alpha_e(c)g', N)$$

für Normalformen N von v nach $t(e)$ zeigen, dann folgt für Normalformen N von v nach der Endecke von P:

$$\begin{aligned}
&\varphi(P_1 ge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g' P_2, N)\\
&= \varphi(P_1, \varphi(ge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g', \varphi(P_2, N)))\\
&= \varphi(P_1, \varphi(g\alpha_e(c)g', \varphi(P_2, N)))\\
&= \varphi(P_1 g\alpha_e(c)g' P_2, N).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die in diesem Fall noch verbleibende Gleichung. Sei dafür $N = g_N e_1 g_1 \ldots e_k g_k$ eine Normalform und $N^- := 1 e_1 g_1 \ldots e_k g_k$. Sei $ge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g'$ wie oben gegeben und sei $x_e \in X_{\bar{e}}$, der Transversalen von $\alpha_{\bar{e}}(G_e)$ in $G_{t(e)}$, und $b \in G_{e'}$ mit $g' g_N = \alpha_e(b)x_e$. Dann gilt, falls $e \neq e_1$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(ge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g', N)\\
&= \varphi(ge\alpha_{\bar{e}}(c), \varphi(1\bar{e}1, \alpha_e(b)x_e N^-))\\
&= \varphi(ge1, \varphi(\alpha_{\bar{e}}(c)\alpha_{\bar{e}}(b)\bar{e}x_e N^-))\\
&= \varphi(g\alpha_e(c)\alpha_e(b)1\bar{e}1e1, x_e N^-)\\
&= g\alpha_e(c)g' N\\
&= \varphi(g\alpha_e(c)g', N).
\end{aligned}$$

Der Fall $e = e_1$ folgt mit einer analogen Argumentation. Ebenso ist der Fall der zweiten möglichen Operation mit einer ähnlichen Argumentation einsehbar. $\square$

Wir ziehen aus Satz 4.3.9 noch zwei Korollare, die die Fundamentalgruppe von Graphen von Gruppen betreffen.

Korollar 4.3.10. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, sei $v \in V(\Gamma)$ und sei $P = g_0 e_1 \dots e_k g_k$ ein $\mathbb{G}$-reduzierter $\mathbb{G}$-Kantenzug von v nach v. Genau dann gilt $[P] = 1 \in \pi_1(\Gamma, v)$, wenn $k = 0$ und $g_0 = 1 \in G_v$ gilt.* □

Korollar 4.3.11. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, seien $u, v \in V(\Gamma)$ und sei $P = g_0 e_1 \dots e_k g_k$ ein $\mathbb{G}$-Kantenzug von v nach u. Dann ist die Abbildung*

$$G_u \to \pi_1(\mathbb{G}, v),\ \ g \mapsto [PgP^{-1}]$$

ein Gruppenmonomorphismus. □

4.4 Struktursatz der Bass-Serre-Theorie

Unser nächstes Ziel ist es, in Analogie der universellen Überlagerung für Graphen durch Bäume (mittels der Fundamentalgruppe von Graphen, vgl. Proposition 4.2.13) eine solche auch für Graphen von Gruppen und deren Fundamentalgruppe zu definieren.

Definition. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und sei $v \in V(\Gamma)$. Auf der Menge der $\mathbb{G}$-Kantenzüge, die in v starten, definieren wir eine Relation $\approx$ mittels $P_1 \approx P_2$ genau dann, wenn

- P_1 und P_2 in der gleichen Ecke w enden und
- ein $g \in G_w$ mit $P_1 \sim P_2 g$ existiert.

Offenbar ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf den $\mathbb{G}$-Kantenzügen, die in v starten. Wir notieren die Äquivalenzklasse eines $\mathbb{G}$-Kantenzuges P von v nach w mit $P_w^{\mathbb{G}}$. Analog wie im Beweis von Satz 4.3.9 enthält jede Äquivalenzklasse $P_w^{\mathbb{G}}$ von $\approx$ genau einen Repräsentaten der Form $x_0 e_1 x_1 \dots x_{k-1} e_k 1$ mit $x_i \in X_i$, wobei X_i für $i > 0$ eine Transversale von $\alpha_{\bar{e}_i}(G_{e_i})$ in $G_{i(\bar{e}_i)}$ ist.

Wir definieren jetzt einen Graphen $\widetilde{\mathbb{G}}_v$: seine Eckenmenge sei die Menge der Äquivalenzklassen von $\approx$. Zwei Ecken[2] $P_u^{\mathbb{G}}, Q_w^{\mathbb{G}}$ seien durch die Kante $f := (P_u^{\mathbb{G}}, e, Q_w^{\mathbb{G}})$ mit $e \in E(\Gamma)$ benachbart, falls $i(e) = u$ und $t(e) = w$ und falls es ein $g \in G_u$ mit $Pge1 \in Q_w^{\mathbb{G}}$ gibt. (Beachte, dass diese Definition nicht von der Wahl von P abhängt.) Es sei $i(f) = P_u^{\mathbb{G}}$ und $t(f) = Q_w^{\mathbb{G}}$. Die Involution ist durch $\overline{(P_u^{\mathbb{G}}, e, Q_w^{\mathbb{G}})} := (Q_w^{\mathbb{G}}, \bar{e}, P_u^{\mathbb{G}})$ gegeben.

Bemerkung 4.4.1. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und sei $v \in V(\Gamma)$. Seien $P = g_0 e_1 \dots e_k g_k$ und $Q = h_0 f_1 \dots f_\ell h_\ell$ zwei $\mathbb{G}$-reduzierte $\mathbb{G}$-Kantenzüge von v nach u bzw. nach w, sodass $P_u^{\mathbb{G}}$ und $Q_w^{\mathbb{G}}$ in $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ benachbart sind. OBdA gelte $k \leq \ell$. Sei $(P_u^{\mathbb{G}}, e, Q_w^{\mathbb{G}})$ die entsprechende Kante. Dann existiert ein $g \in G_u$ sodass $Pge1 \approx Q$ gilt. Sowohl P als auch Q sind $\mathbb{G}$-reduziert und deshalb folgt mit Satz 4.3.9, dass $k + 1 = \ell$ und $f_\ell = e$ gelten.

[2]Mit der Bezeichnung $P_u^{\mathbb{G}}$ für Ecken wählen wir uns sogleich einen Repräsentaten P der Äquivalenzklasse und definieren u als letzte Ecke des $\mathbb{G}$-Kantenzuges P.

Satz und Definition 4.4.2. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und $v \in V(\Gamma)$. Dann ist der Graph $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ ein Baum. Er wird* **universeller Überlagerungsbaum** *oder auch* **Bass-Serre-Baum** *genannt.*

Beweis. Offenbar ist jede Ecke in der gleichen Komponente von $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ wie $1_v^{\mathbb{G}}$. Also ist der Graph zusammenhängend, und wir müssen nur noch die Kreisfreiheit nachweisen.

Sei
$$P = (P_0)_{v_0}^{\mathbb{G}} e_1 \dots e_k (P_k)_{v_k}^{\mathbb{G}}$$
ein geschlossener nicht-trivialer Kantenzug in $\widetilde{\mathbb{G}}_v$, wobei jedes P_i ein $\mathbb{G}$-reduzierten $\mathbb{G}$-Kantenzug sei. (Beachte, dass dies keine Einschränkung an den $\mathbb{G}$-Kantenzug an sich ist.) Wenn wir zeigen, dass P einen Stachel
$$(P_{i-1})_{v_{i-1}}^{\mathbb{G}} e_i (P_i)_{v_i}^{\mathbb{G}} e_{i+1} (P_{i+1})_{v_{i+1}}^{\mathbb{G}}$$
hat, dann folgt die Kreisfreiheit unmitelbar. Sei $0 \leq i \leq k$ derart, dass die Länge von P_i maximal ist. Durch zyklisches Permutieren des Kantenzuges P dürfen wir annehmen, dass $0 < i < k$ gilt. Wir betrachten $(P_{i-1})_{v_{i-1}}^{\mathbb{G}}$ und $(P_{i+1})_{v_{i+1}}^{\mathbb{G}}$. Aus Bemerkung 4.4.1 folgt, dass beide Ecken einen gemeinsamen $\mathbb{G}$-Kantenzug enthalten. Somit liegen sie in der gleichen Ecke in $\widetilde{\mathbb{G}}_v$, und es gilt ebenfalls mit Bemerkung 4.4.1:
$$e_i = ((P_{i-1})_{v_{i-1}}^{\mathbb{G}}, f_i, (P_i)_{v_i}^{\mathbb{G}})$$
und
$$e_{i+1} = ((P_i)_{v_i}^{\mathbb{G}}, \bar{f}_i, (P_{i+1})_{v_{i+1}}^{\mathbb{G}}).$$
Also gilt $e_i = \bar{e}_{i+1}$ und damit haben wir in P einen Stachel und damit die Kreisfreiheit von $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ nachgewiesen. □

Bemerkung. Es ist leicht zu überprüfen, dass Bass-Serre-Bäume zu verschiedenen Ecken v, w aus Γ isomorph sind: Wähle einen $\mathbb{G}$-Kantenzug P von v nach w. Dann induziert die Abbildung $Q \mapsto PQ$ von der Menge der $\mathbb{G}$-Kantenzüge, die in w beginnen, zu der Menge der $\mathbb{G}$-Kantezüge, die in v beginnen, einen Isomorphismus der entsprechenden Bass-Serre-Bäume $\widetilde{\mathbb{G}}_w$ und $\widetilde{\mathbb{G}}_v$.

Lemma 4.4.3. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und $v \in V(\Gamma)$. Dann wird durch*
$$[P]Q_w^{\mathbb{G}} := (PQ)_w^{\mathbb{G}}$$
und
$$[Q]((P_1)_u^{\mathbb{G}}, e, (P_2)_w^{\mathbb{G}}) := ([Q](P_1)_u^{\mathbb{G}}, e, [Q](P_2)_w^{\mathbb{G}})$$
eine inversionsfreie Operation von $\pi_1(\mathbb{G}, v)$ auf $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ definiert.

Beweis. Aus der Definition der Ecken von $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ folgt, dass die Zuordnung eine wohldefinierte Operation auf der Eckenmenge und auf der Kantenmenge ist. Da direkt aus der Definition der Zuordnung folgt, dass Kanten und Nicht-Kanten durch diese Zuordnung erhalten bleiben, folgt die Behauptung. □

Wir machen noch zwei kleine Aussagen über die Stabilisatoren der Ecken und Kanten des universellen Überlagerungsbaumes in der Fundamentalgruppe des Graphen von Gruppen:

Lemma 4.4.4. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und $v \in V(\Gamma)$. Für die in Lemma 4.4.3 definierte Operation von $\pi_1(\mathbb{G}, v)$ auf $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ gelten folgende Aussagen:*

(1) *Der Stabilisator einer Ecke $P_w^{\mathbb{G}}$ ist $\{[PgP^{-1}] \mid g \in G_w\}$.*

(2) *Der Stabilisator eine Kante $(P_w^{\mathbb{G}}, e, (Pgeg')_u^{\mathbb{G}})$ mit $g \in G_w$ ist*

$$\{[Pg\alpha_e(c)g^{-1}P^{-1}] = [Pge\alpha_{\bar{e}}(c)\bar{e}g^{-1}P^{-1}] \mid c \in G_e\}.$$

Beweis. Folgt durch einfaches Nachrechnen. □

In völliger Analogie zur universellen Überlagerung von Graphen erhalten wir auch für Graphen von Gruppen folgende Aussage, deren Beweis ähnlich wie bei den Graphen geführt wird und als Übung verbleibt.

Lemma 4.4.5. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und $v \in V(\Gamma)$. Sei $G := \pi_1(\mathbb{G}, v)$ und $T := \widetilde{\mathbb{G}}_v$. Dann gilt $T/G \cong \Gamma$.* □

Definition. Eine Gruppe G operiere auf einem Baum T und eine Gruppe H operiere auf einem Baum T'. Dann sind T und T' **isomorph bezüglich der Operationen von G und H**, falls es einen Gruppenisomorphismus $\varphi\colon G \to H$ und einen Graphenisomorphismus $f\colon T \to T'$ mit $f(gv) = \varphi(g)f(v)$ für alle $g \in G$ und $v \in V(T)$ gibt. Wir nennen (φ, f) einen **Isomorphismus** von (G, T) nach (H, T').

Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf einem Baum T operiere. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ der Graph von Gruppen aus Beispiel 4.3.2 (2) mit $\Gamma = T/G$ und sei $v \in V(\Gamma)$. Setze $H := \pi_1(\Gamma, v)$. Sei $\mathcal{T}$ ein Spannbaum von Γ. Nach der Übung gibt es einen Monomorphismus $\iota\colon \mathcal{T} \to T$. Somit ist ι auf allen Ecken von Γ, aber nur auf den Kanten in $\mathcal{T}$ definiert. Wir wollen ι auf ganz Γ fortsetzen. Dabei ist dann aber zu beachten, dass wir nur *Bilder* von Ecken und Kanten definieren, dies jedoch im Allgemeinen nicht zu einem Homomorphismus führt. Für jedes $e \in E(\Gamma) \smallsetminus E(\mathcal{T})$ setzen wir $\iota(e)$ so, dass neben $\iota(\bar{e}) = \overline{\iota(e)}$ auch $i(\iota(e)) = \iota(i(e))$ oder $t(\iota(e)) = \iota(t(e))$ gilt[3] und außerdem e die Bahn von $\iota(e)$ unter G ist. Falls $i(\iota(e)) \neq \iota(i(e))$, so sei $g_e \in G$ mit $i(\iota(e)) = g_e\iota(i(e))$ und, falls $i(\iota(e)) = \iota(i(e))$, so sei $g_e := g_{\bar{e}}^{-1}$. Für jeden stachelfreien Kantenzug $P = v_0e_1 \dots e_kv_k$ in $\mathcal{T}$ setzen wir $P_{\mathbb{G}} := 1e_11 \dots e_k1$.

Wir werden eine Abbildung von H nach G und eine Abbildung von $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ nach T definieren, von denen wir anschließend zeigen werden, dass es Isomorphismen sind. Wir definieren $\varphi\colon H \to G$. Zunächst setzen wir

$$\varphi([P_{\mathbb{G}}gP_{\mathbb{G}}^{-1}]) := \psi_u(g)$$

[3] Beachte, dass wir hier nicht beides verlangen.

für alle stachelfreien Kantenzüge P in $\mathcal{T}$ von v nach u, für alle $g \in G_u$ und für den kanonischen Isomorphismus $\psi_u\colon G_u \to G_{\iota(u)}$; ferner setzen wir

$$\varphi([P_{i(e),\mathbb{G}} e P^{-1}_{t(e),\mathbb{G}}]) := g_e$$

für alle $e \in E(\Gamma \setminus \mathcal{T})$, wobei $g_e \in G$ wie oben gewählt ist (d. h. mit $i(\iota(e)) = g_e\iota(i(e))$). Nach Korollar 4.3.7 haben wir damit φ auf einem Erzeugendensystem von H definiert. Sei ϕ der in Proposition 4.3.6 konstruierte Isomorphismus von $\pi_1(\mathbb{G}, \mathcal{T})$ nach $\pi_1(\mathbb{G}, v)$. Offenbar werden die Bilder unter ϕ von den Relatoren in der Definition von $\pi_1(\mathbb{G}, \mathcal{T})$ durch die Abbildung φ auf 1 abgebildet.[4] Wir können φ zu einem Homomorphismus $H \to G$ erweitern nach der universellen Eigenschaft für Gruppenpräsentationen, Satz 2.3.4.

Nun definieren wir eine Abbildung $f\colon \widetilde{\mathbb{G}}_v \to T$ mittels $f(P_u^{\mathbb{G}}) := \iota(u)$ für alle $u \in V(\Gamma)$ und alle $\mathbb{G}$-reduzierten $\mathbb{G}$-Kantenzüge P in $\mathcal{T}$ von v nach u und setzen $f(hP_u^{\mathbb{G}}) := \varphi(h)f(P_u^{\mathbb{G}})$ für alle $u \in V(\Gamma)$, alle $\mathbb{G}$-reduzierten $\mathbb{G}$-Kantenzüge P in $\mathcal{T}$ von v nach u und alle $h \in H$. Offenbar ist f wohldefiniert und erhält sowohl Kanten als auch Nicht-Kanten; f ist also ein Graphenhomomorphismus.

Beachte, dass φ in kanonischer Art und Weise Isomorphismen von Ecken- und Kantenstabilisatoren induziert.

Proposition 4.4.6. *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Baum T. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ der Graph von Gruppen aus Beispiel 4.3.2 (2) mit $\Gamma = T/G$ und sei $v \in V(\Gamma)$. Dann existiert ein Isomorphismus von $(\pi_1(\mathbb{G}, v), \widetilde{\mathbb{G}}_v)$ nach (G, T).*

Beweis. Wir wählen $\mathcal{T}$, φ und f wie in der Diskussion vor der Proposition und wollen zeigen, dass (φ, f) ein Isomorphismus von $(\pi_1(\mathbb{G}, v), \widetilde{\mathbb{G}}_v)$ nach (G, T) ist. Dazu müssen wir nur noch zeigen, dass φ und f bijektive Abbildungen sind, da nach Definition von f bereits $f(hP_u^{\mathbb{G}}) = \varphi(h)f(P_u^{\mathbb{G}})$ für alle $h \in H$ und alle $P_u^{\mathbb{G}} \in V(\widetilde{\mathbb{G}}_v)$ gilt.

Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Nach Definition gilt $\varphi(H)\iota(V(\mathcal{T})) = f(\widetilde{\mathbb{G}}_v)$. Also reicht es, die Gleichung $\varphi(H)\iota(V(\mathcal{T})) = V(T)$ einzusehen. Nehmen wir an, es gilt $\varphi(H)\iota(V(\mathcal{T})) \neq V(T)$. Dann existiert eine Kante $e_T \in E(T)$ mit $i(e_T) \in \varphi(H)\iota(V(\mathcal{T}))$ und $t(e_T) \notin \varphi(H)\iota(V(\mathcal{T}))$. Wir können e_T durch $\varphi(h)e_T$ ersetzen, um $i(e_T) \in \iota(V(\mathcal{T}))$ anzunehmen. Sei $e \in E(\Gamma)$ mit $G(\iota(e)) = Ge_T$. Dann gilt entweder $i(e_T) = i(\iota(e))$ oder $g_{e_T} i(e_T) = i(\iota(e))$. Also gilt entweder $ge_T = \iota(e)$ oder $gg_{e_T}e_T = \iota(e)$ für ein $g \in G_{i(\iota(e))} \leq \varphi(H)$ und damit folgt $e_T \in \varphi(H)\iota(E(\Gamma))$ und insbesondere $t(e_T) \in \varphi(H)\iota(V(\Gamma))$. Dieser Widerspruch zeigt, dass f surjektiv ist.

Wir zeigen, dass f injektiv ist. Zunächst zeigen wir, dass es keine zwei Kanten $e_1, e_2 \in E(\tilde{\mathbb{G}}_v)$ mit $i(e_1) = i(e_2)$ gibt, für die $f(e_1) = f(e_2)$ gilt. Existierten solche Kanten e_1, e_2, so existiert ein $h \in H$ mit $he_1 = e_2$. Es gilt $\varphi(h) \in G_{f(e_1)} = G_{f(e_2)}$. Dies widerspricht unserer früheren Beobachtung, dass φ Isomorphismen von Kantenstabilisatoren induziert. Also gilt $f(e_1) \neq f(e_2)$. Da sowohl $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ als auch T Bäume sind (nach Satz 4.4.2 bzw. nach Voraussetzung), folgt dann sofort, dass f injektiv ist.

[4] Damit meinen wir konkret: Ist $s_1 \dots s_n$ ein Relator, so ist $\varphi(\phi(s_1)) \dots \varphi(\phi(s_n)) = 1$ in G.

Wir zeigen, φ surjektiv ist. Da φ Isomorphismen der Eckenstabilisatoren induziert, gilt $G_v \leq \varphi(H)$ für alle $v \in V(T)$. Sei $g \in G$ und $w \in \iota(V(\mathcal{T}))$. Da $\varphi(H)\iota(V(\Gamma)) = V(T)$ gilt, existiert ein $h \in \varphi(H)$ mit $hgw \in V(\Gamma)$. Je zwei verschiedene Ecken von $\iota(V(\Gamma))$ liegen in verschiedenen Bahnen von G. Deswegen gilt $hgw = w$ und $hg \in G_w \leq \varphi(H)$. Es folgt $g = h^{-1}(hg) \in \varphi(H) \cdot G_w = \varphi(H)$. Also ist φ surjektiv.

Wir zeigen, φ injektiv ist. Dazu zeigen wir, dass der Kern von φ trivial ist. Sei $h \in H \smallsetminus \{1\}$. Wenn h einen Fixpunkt hat, dann folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass φ Isomorphismen auf den Stabilisatoren induziert, dass $\varphi(h) \neq 1$ ist. Also nehmen wir an, dass h keinen Fixpunkt hat. Dann gilt $hv \neq v$ für alle $v \in V(\Gamma)$ und deswegen $\varphi(h)f(v) = f(hv) \neq f(v)$, da f injektiv ist. Also folgt $\varphi(h) \neq 1$ und φ ist injektiv. □

Satz 4.4.7 (Struktursatz)**.** *Die Gruppe G operiere inversionsfrei auf dem Graphen X. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ der Graph von Gruppen aus Beispiel* 4.3.2 (2) *mit $\Gamma = X/G$, sei $v \in V(\Gamma)$ und seien φ und f wie in der Diskussion vor Proposition* 4.4.6*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *X ist ein Baum;*

(2) *$f\colon \widetilde{\mathbb{G}}_v \to X$ ist ein Isomorphismus;*

(3) *$\varphi\colon \pi_1(\mathbb{G}, v) \to G$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Ist X ein Baum, so gelten (2) und (3) nach Proposition 4.4.6. Da $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ nach Satz 4.4.2 ein Baum ist, folgt aus (2) bereits (1). Die letzte Implikation (3)$\Rightarrow$(2) folgt direkt aus der Definition von f. □

Bemerkung 4.4.8. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen mit $G_v = 1$ für alle $v \in V(\Gamma)$. Dann gilt $\pi_1(\mathbb{G}) \cong \pi_1(\Gamma)$.

Als direktes Korollar aus Satz 4.4.7 erhalten wir mittels Bemerkung 4.4.8:

Korollar 4.4.9. *Eine Gruppe, die frei auf einem Baum operiert, ist frei.* □

4.5 Minimale Operation

Definition. Eine Gruppe G operiert auf einem Baum T **minimal**, falls es keinen nicht-leeren G-invarianten echten Teilbaum von T gibt. Ein Graph von Gruppen heißt **minimal**, falls seine Fundamentalgruppe auf seinem Bass-Serre-Baum minimal operiert.

Bemerkung 4.5.1. Eine Gruppe G operiere auf einem Baum T. Existiert in G ein hyperbolisches Element g, so gibt es einen g-invarianten Doppelstrahl R. Damit ist der Schnitt über alle G-invarianten Teilbäume von T, die R enthalten, nicht-leer und nach Lemma 4.1.2 (iii) muss R in dem Schnitt aller nicht-leeren G-invarianten Teilbäume enthalten sein. Auf diesem Schnitt operiert G minimal. Enthält die Gruppe nur elliptische Elemente, so wissen wir aus dem Beweis von

Satz 4.1.7, dass die Operation von G auf T entweder elliptisch ist, wobei wir dann auch einen Teilbaum, z. B. einen Baum mit nur einer Ecke nehmen können, auf dem G minimal operiert, oder parabolisch ist. In dem letzten Fall enthält T keinen nicht-leeren minimalen G-invarianten Teilbaum, da der Schnitt über alle G-invarianten Teilbäume leer ist (vgl. Übung).

Diese Überlegungen implizieren also, dass bei einer minimalen parabolischen Operation hyperbolische Gruppenelemente existieren müssen.

Proposition 4.5.2. *Sei* $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ *ein minimaler Graph von Gruppen und sei* $v \in V(\Gamma)$*. Dann ist die Operation von* $\pi_1(\mathbb{G}, v)$ *auf* $\widetilde{\mathbb{G}}_v \ldots$

(i) *elliptisch genau dann, wenn* Γ *aus genau einer Ecke besteht und keiner Kante;*

(ii) *zyklisch genau dann, wenn* Γ *ein Kreis ist und alle Monomorphismen von den Kantengruppen in die Eckengruppen Isomorphismen sind;*

(iii) *diedrisch genau dann, wenn* Γ *ein nicht-trivialer Weg ist und die Monomorphismen der Kantengruppen in die Eckengruppen der inneren Ecken surjektiv ist und die Bilder der Monomorphismen in die Endecken des Weges jeweils Untergruppen vom Index* 2 *sind;*

(iv) *parabolisch genau dann, wenn* Γ *ein Kreis ist und für einen geschlossenen stachelfreien Kantenzug* $v_0 e_0 \ldots e_{k-1} v_k$ *gilt, dass* α_{e_i} *surjektiv für alle* $1 \leq i \leq n$ *ist, aber mindestens ein* $\alpha_{\bar{e}_i}$ *nicht surjektiv ist;*

(v) *hyperbolisch sonst.*

Beweis. In allen Situationen ist die Rückrichtung einfach. Deswegen beschränken wir uns jeweils auf die Hinrichtung. Sei $G := \pi_1(\mathbb{G}, v)$ und $T := \widetilde{\mathbb{G}}_v$. Falls die Operation von G auf T elliptisch ist, so hat T genau eine Ecke aufgrund der minimalen Operation. Also hat Γ auch nur eine Ecke und keine Kante.

Sei nun die Operation von G auf T zyklisch. Wegen der Minimalität der Operation ist T ein Doppelstrahl und G operiert als Translation auf T. Somit ist T/G ein Kreis. Da jedes Gruppenelement, das eine Ecke aus T fixiert, bereits beide mit ihr inzidenten Kanten fixieren muss (da es als Translation auf T operiert), sind die Monomorphismen der Kantengruppen in die Eckengruppen surjektiv.

Nehmen wir an, dass die Operation von G auf T diedrisch sei. Wie in der vorigen Situation ist T ein Doppelstrahl. Da es ein Element gibt, das als Reflexion auf T operiert, ist T/G ein Weg, der nicht-trivial ist (also mindestens zwei Ecken hat), da die Operation inversionsfrei ist. Jedes Gruppenelement, dass eine Kante stabilisiert, muss bereits ganz T fixieren. Da die Stabilisatoren der Endecken von T/G Index 2 in der Fixgruppe von T haben (ein Element aus so einem Stabilisator fixiert bereits ganz T oder operiert als Reflexion auf T), folgt die Aussage in (iii).

Als nächstes sei die Operation von G auf T parabolisch. In dem Fall, dass jedes Element aus G elliptisch auf T operiert, folgt aus Bemerkung 4.5.1, dass die Operation nicht minimal gewesen sein kann. Also existiert ein hyperbolisches Element. Sei $g \in G$ ein solches minimaler Translationslänge. Dann enthält T nach Lemma 4.1.2 (i) einen g-invarianten Doppelstrahl R_g. Dieser Doppelstrahl enthält einen Teilstrahl R, für den $R \cap hR$ wieder ein Strahl ist für alle $h \in G$. Der Teilgraph $\bigcup_{h\in G} hR_g$ ist somit zusammenhängend, also ein Teilbaum. Da er auch G-invariant ist, folgt aus der Minimalität der Operation, dass er bereits T ist. Jede Kante von T ist daher in einer gemeinsamen Bahn mit einer Kante aus R_g. Dann folgt aus der Minimalität von $|g|$, dass T/G ein Kreis mit $|g|$ Kanten ist. Offenbar muss der Stabilisator einer Ecke u auf R_g auch die inzidente Kante fixieren, die u von unendlich vielen Ecken auf R trennt. Also gibt es eine Orientierung des Kreises Γ, für dessen Kantengruppen die Monomorphismen in die Eckengruppen surjektiv sind. Desweiteren muss für eine Kante e von diesen gelten, dass $\alpha_{\bar{e}}$ nicht surjektiv ist, weil die Operation nach (ii) sonst zyklisch wäre.

Der letzte Fall folgt aus Satz 4.1.7. □

Definition. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen. Ein Paar (v, e) mit $v \in V(\Gamma)$ und $e \in E(\Gamma)$, sodass v den Grad 2 hat[5] und $i(e) = v \neq t(e)$ gilt, heißt **unbedeutend**, falls α_e surjektiv ist. Ein Graph von Gruppen heißt **reduziert**, falls er kein unbedeutendes Paar enthält.

Bemerkung 4.5.3. Ist $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen und (v, e) ein unbedeutendes Paar, so können wir im Graphen v und e unterdrücken, d. h., wir entfernen v und sowohl e als auch $\bar{e}$ aus der Ecken- bzw. Kantenmenge und setzen $t(f) = t(e)$ für alle Kanten f in Γ mit $t(f) = v$ und $i(f) = i(\bar{e})$ für alle Kanten f in Γ mit $i(f) = v$.[6] Für die Monomorphismen $\alpha_f \colon G_f \to G_v$ setzen wir den neuen Monomorphismus als $\alpha'_f := \alpha_{\bar{e}}\alpha_e^{-1}\alpha_f$. Es ist leicht zu überprüfen, dass bei dieser Operation die Fundamentalgruppe erhalten bleibt – oder präziser: dass die Fundamentalgruppen vor und nach dieser Operation isomorph zueinander sind. Ein Weg dies einzusehen ist, einen Spannbaum von Γ zu betrachten, der e enthält. Dann können die Relatorn $g_e\alpha_{\bar{e}}(s)g_e^{-1}(\alpha_e(s))^{-1}$ zu $\alpha_{\bar{e}}(s)(\alpha_e(s))^{-1}$ reduziert werden und wir können diese Information für die Relatoren der anderen Kante mit Anfangsecke $i(e)$ nutzen. Mittels Tietze-Transformationen erhalten wir die Fundamentalgruppe nach dieseer Operation.

Insbesondere können wir einen Graphen von Gruppen $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ mit endlichem Graphen Γ durch mehrere solcher Operationen in einen reduzierten Graphen von Gruppen überführen, der eine isomorphe Fundamentalgruppe hat.

Mit der vorstehenden Bemerkung 4.5.3 können wir in Proposition 4.5.2 die erhaltenen Möglichkeiten für Γ in den Fällen (ii)–(iv) genauer formulieren. Wir notieren hier noch diese Neuformulierung, wobei die Aussagen über die Gruppenstruktur zum Teil aus Beispiel 4.3.4 folgen.

[5]Das bedeutet für uns, dass es genau zwei Kanten gibt, die in v enden (oder äquivalent genau zwei Kanten gibt, die in v starten).

[6]Dies entspricht im Fall eines Graphens genau G/e. Nur müssen wir an dieser Stelle auf die Involution, die Richtungen der Kanten und Kantengruppen aufpassen.

Proposition 4.5.4. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein minimaler reduzierter Graph von Gruppen und sei $v \in V(\Gamma)$. Sei $G := \pi_1(\mathbb{G}, v)$ und $T := \widetilde{\mathbb{G}}_v$. Dann ist die Operation von G auf T...*

(i) *elliptisch genau dann, wenn Γ aus genau einer Ecke besteht und keiner Kante. Dann ist G genau der Kern der Operation.*[7]

(ii) *zyklisch genau dann, wenn Γ aus genau einer Ecke und genau einer Kante*[8] *besteht und die Monomorphismen der beiden Kantengruppen in die Eckengruppe Isomorphismen sind. Dann gilt $G \cong G_v *_\varphi$, wobei v die Ecke von Γ ist, e die Kante von Γ und $\varphi = \alpha_{\bar{e}} \alpha_e^{-1}$.*

(iii) *diedrisch genau dann, wenn Γ aus genau zwei Ecken und einer Kante besteht und die Bilder der beiden Monomorphismen der Kantengruppen in die Eckengruppen jeweils Untergruppen vom Index 2 sind. Dann gilt $G \cong G_u *_{G_e} G_v$ mit $|G_u : G_e| = 2 = |G_v : G_e|$, wobei u und v die beiden Ecken von Γ sind und $e \in E(\Gamma)$ eine Kante.*

(iv) *parabolisch genau dann, wenn Γ aus genau einer Ecke und genau einer Kante besteht und genau einer der beiden Monomorphismen von den Kantengruppen in die Eckengruppe surjektiv ist. Dann gilt $G \cong G_v *_\varphi$, wobei v die Ecke von Γ ist, e die Kante, sodass $\alpha_{\bar{e}} \colon G_{\bar{e}} \to G_v$ nicht surjektiv ist, und $\varphi = \alpha_{\bar{e}} \alpha_e^{-1}$.*

(v) *hyperbolisch sonst.* □

Definition. Ein freies Produkt mit Amalgamation $A *_C B$ heißt **echt**, falls keiner der Monomorphismen $\iota_A \colon C \to A$ und $\iota_B \colon C \to B$ surjektiv ist.

Proposition 4.5.5. *Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein minimaler Graph von Gruppen, sodass Γ mindestens eine Kante hat. Dann ist $\pi_1(\mathbb{G})$ ein echtes freies Produkt mit Amalgamation oder eine HNN-Erweiterung.*

Beweis. Übung □

Definition. Eine Gruppe habe die Eigenschaft (**FA**), falls jede inversionsfreie Operation von ihr auf jedem Baum elliptisch ist.

In der Übung haben wir bereits gesehen, dass endliche Gruppen immer die Eigenschaft (FA) haben. Wir wollen nun eine gruppentheoretische Charakterisierung von Gruppen mit der Eigenschaft (FA) angeben.

Satz 4.5.6. *Genau dann hat eine abzählbare Gruppe G die Eigenschaft* (FA), *wenn die folgenden Aussagen gelten:*

(1) *G ist endlich erzeugt;*

[7] Der **Kern** der Operation besteht aus den Elementen, die jede Ecke und jede Kante von T fixieren.

[8] bis auf ihr Bild unter der Involution

(2) *G ist kein echtes freies Produkt mit Amalgamation;*

(3) *G ist keine HNN-Erweiterung.*

Beweis. Nach Lemma 4.1.9 impliziert die Eigenschaft (FA) bereits, dass G endlich erzeugt ist. Nehmen wir an, dass G ein echtes freies Produkt mit Amalgamation $G \cong A *_C B$ für Gruppen A, B, C ist. Dann bilden wir den Graphen von Gruppen $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ mit genau zwei Ecken und einer Kante, wobei die Kantengruppen jeweils C sind und die Eckengruppen A bzw. B. Nach Beispiel 4.3.4 (1) gilt $G \cong \pi_1(\mathbb{G})$. Die Operation von $\pi_1(\mathbb{G})$ auf $\widetilde{\mathbb{G}}_v$ mit $v \in V(\Gamma)$ ist inversionsfrei, aber nicht elliptisch. Also ist G kein echtes freies Produkt mit Amalgamation. Analog können wir zeigen, dass G auch keine HNN-Erweiterung ist.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass (1)–(3) gelten. Sei T ein Baum, auf dem G inversionsfrei operiert. Nach Lemma 4.1.5 genügt es zu zeigen, dass jedes Element aus G elliptisch ist. Nehmen wir an, es gäbe ein hyperbolisches Element in G. Gemäß Bemerkung 4.5.1 gibt es einen minimalen G-invarianten Teilbaum von T und wir dürfen annehmen, dass die Operation von G auf T minimal ist. Nach Satz 4.4.7 können wir annehmen, dass $G = \pi_1(\mathbb{G})$ und $T = \widetilde{\mathbb{G}}_v$ mit $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma)$ und $v \in V(\Gamma)$, wobei $\mathbb{G}$ der in Beispiel 4.3.2 (2) definierte Graph von Gruppen mit $\Gamma = T/G$ ist. Da G ein hyperbolisches Element enthält, ist die Operation von G auf T nicht elliptisch und nach Proposition 4.5.4 (i) hat Γ also eine Kante. Somit folgt aus Proposition 4.5.5 ein Widerspruch zu (2) oder (3). Also operiert G elliptisch auf T. □

4.6 Satz von Kurosh

Beispiel 4.6.1. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen mit $G_e = 1$ für alle $e \in E(\Gamma)$ und sei T ein Spannbaum von Γ. Seien $G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle$ Präsentationen der Eckengruppen. Dann gilt

$$\pi_1(\mathbb{G}, T) = \left\langle \bigcup_{v \in V(\Gamma)} S_v \cup \{g_e \mid e \in E(\Gamma) \setminus E(T)\} \mid \right.$$
$$\left. \bigcup_{v \in V(\Gamma)} R_v \cup \{g_e g_{\bar{e}} \mid e \in E(\Gamma) \setminus E(T)\} \right\rangle .$$

Es existiert also eine freie Gruppe F mit $\pi_1(\mathbb{G}, T) \cong (*_{v \in V(\Gamma)} G_v) * F$.

Beispiel 4.6.2. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Gamma, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, wobei Γ ein Stern sei. Es gelte $G_e = A$ für alle $e \in E(\Gamma)$ und $G_z = A$ für die zentrale Ecke z von Γ. Seien $G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle$ Präsentationen der Eckengruppen. Dann hat $\pi_1(\mathbb{G}, \Gamma)$ die Präsentation

$$\left\langle \bigcup_{v \in V(\Gamma), v \neq z} S_v \mid \bigcup_{v \in V(\Gamma), v \neq z} R_v \right.$$
$$\left. \cup \left\{ \alpha_e(a) (\alpha_{\bar{e}}(a))^{-1} \mid e \in E(\Gamma) \text{ und } i(e) = z; a \in A \right\} \right\rangle .$$

Es gilt also $\pi_1(\mathbb{G},\Gamma) \cong *_A G_v$.

Satz 4.6.3. *Sei $G = *_{A,i\in I} G_i$ ein freies Produkt mit Amalgamation über A einer Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Gruppen. Sei $H \le G$ eine Untergruppe, die sich mit jedem A^g mit $g \in G$ trivial schneidet. Für $x \in G$ und $i \in I$ sei $H_{i,x} := H \cap xG_ix^{-1}$. Sei X_i ein Repäsentantensystem der Doppelnebenklassen HgG_i. Dann existiert eine freie Gruppe F mit*

$$H \cong (*_{i\in I, x\in X_i} H_{i,x}) * F.$$

Beweis. Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, X, \Lambda)$ ein Graph von Gruppen, wobei X ein Stern mit Zentrum v_A ist und für jedes $i \in I$ ein Blatt v_i existiert. Die Kantengruppen seien alle A und die Eckengruppe des Zentrums ebenfalls. Die Eckengruppe zum Blatt v_i sei G_i. Die Abbildungen α_e seien die Identität, falls $i(e) = v_A$ und ansonsten der Monomorphismus von A in G_i, der durch das freie Produkt mit Amalgamation gegeben ist. Sei $T := \widetilde{\mathbb{G}}_{v_A}$. Nach Beispiel 4.6.2 gilt $\pi_1(\mathbb{G}) \cong G$. Also operiert G und damit auch H inversionsfrei auf T und wir können die Ecken- bzw. Kantenstabilisatoren von Ecken oder Kanten aus T in $\pi_1(\mathbb{G})$ als Stabilisatoren in G auffassen (vgl. Lemmas 4.4.3 und 4.4.4). Insbesondere sind die Kantenstabilisatoren zu A konjugierte Untergruppen von G.

Sei $\Gamma := T/H$ und $\mathcal{T}$ ein Spannbaum von Γ. Sei $\mathbb{G}_H = (\mathcal{G}_H, \Gamma, \Lambda_H)$ der durch die Operation von H auf T induzierte Graph von Gruppen: es sei $G_v^H = G_v \cap H$ und $G_e^H = G_e \cap H$ für alle Ecken v und Kanten e von Γ. Dann gilt $H \cong \pi_1(\mathbb{G}_H, \mathcal{T})$ nach Satz 4.4.7. Die Voraussetzung, dass H jedes Konjugierte von A trivial schneidet, impliziert $G_e^H = 1$ für alle Kantengruppen von Γ. Nach Beispiel 4.6.1 folgt

$$H \cong \pi_1(\mathbb{G}_H, \mathcal{T}) \cong (*_{v\in V(\Gamma)} G_v^H) * F,$$

wobei F eine freie Gruppe ist.

Die Ecken von T entsprechen der Menge[9]

$$G/A \cup \bigcup_{i\in I} G/G_i,$$

und die Ecken von Γ und damit von $\mathcal{T}$ entsprechen damit der Menge[10]

$$H\backslash G/A \cup \bigcup_{i\in I} H\backslash G/G_i,$$

da wir die Bahnen unter H jeweils zusammenfassen. Die Einbettung von $\mathcal{T}$ in T definiert dann ein Repräsentantensystem $X_A \subseteq G/A$ von $H\backslash G/A$ und ein Repräsentantensystem $X_i \subseteq G/G_i$ von $H\backslash G/G_i$. Falls $x \in X_A$, dann ist die entsprechende Gruppe G_{v_A} genau $H \cap xAx^{-1}$ und, falls $x \in X_i$, dann ist die entsprechende Gruppe G_{v_i} genau $H \cap xG_ix^{-1}$. Weil $H \cap xAx^{-1} = 1$ gilt, folgt die Behauptung. □

[9] Beachte, dass Normalformen von $\mathbb{G}$-Kantenzügen in kanonischer Art und Weise (durch Entfernen der Kanten in der Folge) reduzierten Formen im freien Produkt G entsprechen.

[10] Für Untergruppen H, U einer Gruppe G ist $H\backslash G/U$ die Menge der Doppelnebenklassen HgU mit $g \in G$.

Satz 4.6.3 mit $A = 1$ liefert uns den Untergruppensatz von Kurosh.

Korollar 4.6.4 (Kuroshs Untergruppensatz). *Sei $G = *_{i \in I} G_i$ ein freies Produkt einer Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Gruppen. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Für $x \in G$ und $i \in I$ sei $H_{i,x} := H \cap xG_ix^{-1}$. Sei X_i ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen HgG_i. Dann existiert eine freie Gruppe F mit*

$$H \cong (*_{i \in I, x \in X_i} H_{i,x}) * F.$$

□

Beachte, dass aus Korollar 4.6.4 insbesondere folgt, dass die Ordnung jedes Elements von H, sofern sie endlich ist, bereits die Ordnung eines Elements aus einem der G_i sein muss.

4.7 Satz von Stallings

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass endlich erzeugte mehr-endige Gruppen immer über einer endlichen Gruppe zerfallen, entweder als HNN-Erweiterung oder freies Produkt mit Amalgamation.

Satz 4.7.1 (Stallings Theorem). *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit mehr als einem Ende. Dann gilt eine der folgenden Aussagen.*

(1) *Es existieren drei Untergruppen A, B, H von G, sodass H endlich und $A *_H B \cong G$ ein echtes freies Produkt mit Amalgamation ist.*

(2) *Es existiert eine Untergruppe H von G und ein Isomorphismus φ zwischen zwei endlichen Untergruppen von G mit $G \cong H*_{\varphi}$.*

Wir erhalten Satz 4.7.1 als Folgerung aus Proposition 4.7.2, wie wir gleich sehen werden.

Proposition 4.7.2. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit mehr als einem Ende. Dann existiert ein Baum, auf dem G inversionsfrei und Kanten-transitiv operiert, sodass die Kantenstabilisatoren endlich sind und kein Eckenstabilisator bereits ganz G ist.*

Beweis von Satz 4.7.1. Sei T der Baum aus Proposition 4.7.2. Der Graph von Gruppen bezüglich der Operation von G auf T besteht aus nur einer Kante und höchstens zwei Ecken wegen der Transitivität von G auf den Kanten von T. Mit Beispiel 4.3.4 folgt Satz 4.7.1 direkt, da nach der Aussage über die Eckenstabilisatoren die Monomorphismen der Kantengruppe in die Eckengruppen in Beispiel 4.3.4 nicht surjektiv sind. □

Somit ist es also unser Ziel, einen Baum zu konstruieren, auf dem G geeignet operiert.

Beweis von Proposition 4.7.2. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein lokal-endlicher Cayley-Graph von G. Dieser hat mehr als ein Ende, da G mehr als ein Ende hat. Zunächst betrachten wir den Fall, dass Γ mindestens drei Enden hat. Nach Lemma 3.4.3 hat Γ dann bereits unendlich viele Enden. Wir setzen

$$\mathcal{B}_i := \{U \subseteq V \mid |U| = \infty = |V \setminus U| \text{ und } |E(U, V \setminus U)| \leq i\}.$$

Weil Γ mehr als ein Ende hat, gibt es eine endliche Menge $S \subseteq V$, sodass zwei Strahlen schließlich in verschiedenen Komponenten von $G - S$ liegen. Ist i die Anzahl der Kanten von S in eine dieser Komponenten, so folgt $\mathcal{B}_i \neq \emptyset$. Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $\mathcal{B}_m \neq \emptyset$. Die Minimalität von m impliziert, dass alle $U \in \mathcal{B}_m$ zusammenhängend sind. Ist $U \subseteq V$, so sei $\overline{U} := V \setminus U$.

Behauptung 1. Ist $U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \ldots$ eine Kette in $\mathcal{B}_m$, so ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \emptyset$.

Beweis von Behauptung 1. Angenommen, es existiert in $\mathcal{B}_m$ eine Kette $U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \ldots$, sodass $U := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ nicht-leer ist. Dann finden wir eine Kante e_1 mit einer inzidenten Ecke in U und einer inzidenten Ecke in U_1 aber außerhalb von U und es gibt einen Index $i_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$e_1 \in E(\overline{U_{i_1}}, U) \setminus E(\overline{U_{i_1 - 1}}, U).$$

Analog finden wir eine Kante $e_2 \in E(U_{i_1})$ mit genau einer inzidenten Ecke in U. Sei $i_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$e_2 \in E(\overline{U_{i_2}}, U) \setminus E(\overline{U_{i_2 - 1}}, U).$$

Dann gilt $i_2 > i_1$ und sowohl e_1 als auch e_2 liegen in $E(\overline{U_{i_2}}, U)$. Wir können auf diesem Wege beliebig viele Kanten konstruieren und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein i_n, sodass die ersten n dieser so konstruierten Kanten in $E(\overline{U_{i_n}}, U)$ liegen. Dies widerspricht für $n > m$ der Wahl der $U_i \in \mathcal{B}_m$. $\square$

Wegen Behauptung 1 existiert ein minimales $W \in \mathcal{B}_m$ mit $1 \in W$.

Behauptung 2. Für jedes $U \in \mathcal{B}_m$ ist eine der folgenden vier Mengen endlich:

$$U \cap W,\ \overline{U} \cap W,\ U \cap \overline{W},\ \overline{U} \cap \overline{W}.$$

Beweis von Behauptung 2. Angenommen, alle vier Schnitte sind unendlich. Dann muss jeder Schnitt einen Strahl enthalten, weil Γ lokal-endlich ist (vgl. Übung). Für alle $A \in \{U, \overline{U}\}$ und $B \in \{W, \overline{W}\}$ gilt somit

$$E(A \cap B, \overline{A \cap B}) \geq m$$

wegen der Minimalität von m. Andererseits liegt jede Kante aus $E(U, \overline{U}) \cup E(W, \overline{W})$ in genau zwei der Mengen $E(A \cap B, \overline{A \cap B})$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&4m \\
&\leq \sum_{\substack{A \in \{U, \overline{U}\}, \\ B \in \{W, \overline{W}\}}} \left|E\left(A \cap B, \overline{A \cap B}\right)\right| \\
&\leq 2|E(U, \overline{U})| + 2|E(W, \overline{W})| \\
&\leq 4m,
\end{aligned}$$

weswegen bei dieser Ungleichungskette überall Gleichheit gelten muss und alle unendlichen Komponenten dieser Schnitte in $\mathcal{B}_m$ liegen müssen. OBdA liege 1 in $U \cap W$. Wegen $U \cap W \in \mathcal{B}_m$ und der Minimalität von W bezüglich 1 enthalten haben wir $U \cap W = U$, woraus $\overline{U} \cap W = \emptyset$ folgt. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Wir definieren auf $\mathcal{B}_m$ eine Äquivalenzrelation $\cong$ mittels

$$U_1 \cong U_2 :\Longleftrightarrow U_1 \cap \overline{U_2} \text{ und } \overline{U_1} \cap U_2 \text{ sind endlich}$$

und eine strikte Ordnung[11] mittels

$$U_1 \prec U_2 :\Longleftrightarrow \overline{U_1} \cap U_2 \text{ endlich, aber } U_1 \ncong U_2.$$

Der Nachweis, dass diese beiden Relationen die gewünschten Eigenschaften haben, ist einfach und wir verzichten an dieser Stelle darauf.

Behauptung 3. Seien $A, U \in \mathcal{B}_m$ mit $W \prec A \prec U$. Dann ist existieren nur endlich viele $g \in G$ mit $W \prec gA \prec U$.

Beweis von Behauptung 3. Sei $\Delta \subseteq \Gamma$ ein endlicher zusammenhängender Teilgraph, der $E(X, \overline{X})$ für alle $X \in \{A, U, W\}$ enthält. Für alle $g \in G$ außer endlichen vielen ist dann $\Delta \cap g\Delta = \emptyset$. Sei $g \in G$ mit $\Delta \cap g\Delta = \emptyset$ und nehmen wir an, dass $W \prec gA \prec U$ gilt. Dann sind $U \cap g\overline{A}$ und $gA \cap \overline{W}$ endlich. Weil Δ zusammenhängend ist und $E(gA, g\overline{A})$ vermeidet, liegt Δ entweder in gA oder in $g\overline{A}$. Zunächst liege Δ in gA. Dann gilt entweder $W \subseteq gA$ oder $\overline{W} \subseteq gA$, da W und $\overline{W}$ zusammenhängend sind. Weil $gA \cap \overline{W}$ endlich ist, muss $W \subseteq gA$ gelten. Dies impliziert aber $g\overline{A} \cap W = \emptyset$ und damit $gA \cong W$, was ein Widerspruch zu $W \prec gA$ ist. Mit einem ähnlichen Argument erhalten wir einen Widerspruch im Fall, dass Δ in $g\overline{A}$ liegt. □

Wir setzen

$$T := \{gW, g\overline{W} \mid g \in G\}/\cong.$$

Wir setzen die Definition vom Komplement und von $\prec$ auf T fort: für $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in T$ sei

$$\overline{\mathcal{U}_1} := \{\overline{U_1} \mid U_1 \in \mathcal{U}_1\}$$

und

$$\mathcal{U}_1 \prec \mathcal{U}_2 :\Longleftrightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2 \colon U_1 \prec U_2.$$

Behauptung 4. Das Tripel $(T, \bar{\cdot}, \prec)$ ist eine **Baum-Menge**, d. h., es hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\bar{\bar{t}} = t$ und $t \neq \bar{t}$ für alle $t \in T$;

(2) $\prec$ ist eine strikte Ordnung auf T;

[11] also eine asymmetrische, transitive Relation

(3) $t_1 \prec t_2 \iff \overline{t_2} \prec \overline{t_1}$ für alle $t_1, t_2 \in T$;

(4) für $t_1, t_2 \in T$ gilt genau einer der folgenden Fälle

$$t_1 = t_2,\ \overline{t_1} = t_2,\ t_1 \prec t_2,\ t_1 \prec \overline{t_2},\ \overline{t_1} \prec t_2,\ \overline{t_1} \prec \overline{t_2};$$

(5) für kein $t \in T$ enthält die Menge $T_t^{\prec} := \{t' \in T \mid t' \prec t\}$ eine unendliche Kette $t_1 \prec t_2 \prec \cdots$.

Zudem hat die Baum-Menge die folgende Eigenschaft.

(6) es existieren keine maximalen und keine minimalen Elemente bezüglich $\prec$.

Beweis von Behauptung 4. Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition des Komplements und (3) folgt direkt aus der Definition von $\prec$. Da $\prec$ eine strikte Ordnung auf $\mathcal{B}_m$ ist, gilt dies auch für $\prec$ auf T. Wegen Behauptung 2 folgt (4) und Behauptung 3 impliziert (5).

Angenommen, $U \in \mathcal{B}_m$ ist maximal bezüglich $\prec$. Insbesondere ist U unendlich. Sei Δ ein endlicher Teilgraph von Γ, sodass $\Gamma - \Delta$ drei unendliche Komponenten hat. Sei $g \in G$, sodass $g\Delta$ in U liegt. Dieses g existiert, da Γ lokal-endlich ist. Sei nun $h \in G$, sodass $hE(W, \overline{W})$ in einer unendlichen Komponente von $\Gamma - g\Delta$ liegt, die $\overline{U}$ trivial schneidet. Dann gilt $U \prec hW$ oder $U \prec h\overline{W}$, was der Maximalität von U widerspricht. Analog erhalten wir einen Widerspruch, falls U minimal bezüglich $\prec$ ist. Also hat T bezüglich $\prec$ keine maimxalen und minimalen Elemente. $\square$

Mit einer Übungsaufgabe folgt die Existenz eines Baumes $\mathcal{T}$ mit Kanten T und Ecken $T/{\sim}$, wobei

$$t_1 \sim t_2 :\iff t_1 = t_2 \vee (t_1 \prec \bar{t}_2 \wedge \neg \exists t \in T \colon t_1 \prec t \prec \bar{t}_2)$$

ist. Da T invariant unter G ist[12], operiert G auf dem Baum $\mathcal{T}$. Auf der Baum-Menge hat die Operation von G höchstens zwei Bahnen, da sie aus Äquivalenzklassen von Elementen gW oder $g\overline{W}$ besteht. In der Übungsaufgabe haben wir auch gesehen, dass gW und $g\overline{W}$ die gleiche Kante beschreiben (modulo deren Richtung). Also operiert G Kanten-transitiv auf $\mathcal{T}$. Ist diese Operation nicht inversionsfrei, so unterteilen wir jede Kante einmal und erhalten eine inversionsfreie Operation. Der Stabilisator von W ist endlich, weil er genau der Stabilisator der endlichen Kantenmenge $E(W, \overline{W})$ ist und G frei auf Γ operiert. Um dann zu zeigen, dass die Stabilisatoren der Kanten aus $\mathcal{T}$, also der Elemente aus T auch endlich sind, reicht es einzusehen, dass nur endlich viele Elemente aus $\{gW, g\overline{W} \mid g \in G\}$ äquivalent bezüglich $\cong$ sind. Dies ist aber eine unmittelbare Folgerung aus Behauptung 3 zusammen mit Behauptung 4 (6). Somit folgt die Aussage über alle Kanten-Stabilisatoren aus Lemma 1.1.10, weil jedes Element aus T in der Bahn der Äquivalenzklasse von W oder von $\overline{W}$ liegt.

[12] Beachte, dass die Äquivalenzrelation $\cong$ invariant unter G ist.

Da es keine maximalen oder minimalen Elemente bezüglich $\prec$ gibt nach Behauptung 4 (6), gibt es einen Weg der Länge mindestens 3 in $\mathcal{T}$ und daraus und der Kanten-Transitivität folgt, dass es keine Ecke gibt, die von ganz G fixiert wird.

Zum Abschluss diskutieren wir noch kurz den Fall, dass Γ genau zwei Enden hat. Der Grund, warum wir den gerade durchgeführten Beweis nicht einfach übertragen können, ist, dass der Beweis von Behauptung 4 (6) fehlschlägt, die Menge T aus höchstens zwei Elementen besteht und wir deshalb nicht folgern können, dass die gewonnene Zerlegung echt ist. In dieser Situation müssen wir uns noch etwas mehr anstrengen, um ein $U \in \mathcal{B}_m$ zu finden, sodass für U und gU bereits einer der Fälle aus Punkt (4) der Definition einer Baum-Menge mit $\prec$ ersetzt durch $\subseteq$ gilt. Damit bekommen wir dann ebenfalls einen Baum, der einen Weg der Länge 3 enthält, womit wir wieder zeigen können, dass die erhaltene Zerlegung echt ist.[13] $\square$

Korollar 4.7.3. *Die Eigenschaft, ein echtes freies Produkt mit Amalgamation oder eine HNN-Erweiterung über einer endlichen Gruppe zu sein, ist eine Quasi-Isometrie-Invariante.* $\square$

Wir haben also gezeigt, dass wir Gruppen mit mehr als einem Ende zerlegen können, z. B. als freies Produkt mit Amalgamation $A *_H B$. Allerdings kann es hierbei durchaus passieren, dass eine der beiden oder gar beide Gruppen A und B selbst wieder mehr als ein Ende haben. Können wir dieses Spiel unendlich fortsetzen? Kann es sogar passieren, dass immer wieder eine der bei der Zerlegung involvierten Gruppen mehr als ein Ende hat?

Definition. Eine endlich erzeugte Gruppe G nennen wir **0-erreichbar**, falls sie höchstens ein Ende hat. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt sie ***n*-erreichbar**, falls sie isomorph zu $A *_H B$ für Untergruppen $A \neq H \neq B$ ist, wobei H endlich ist und A und B beide i_A bzw. i_B-erreichbar für $i_A, i_B < n$ sind, oder isomorph zu $A*_\varphi$ für eine $(n-1)$-erreichbare Gruppe A und einen Isomorphismus φ endlicher Untergruppen ist. Wir nennen die Gruppe G **erreichbar**, falls sie n-erreichbar für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Erreichbarkeit von Gruppen lässt sich in der Bass-Serre-Theorie folgendermaßen charakterisieren.

Proposition 4.7.4. *Eine endlich erzeugte Gruppe ist genau dann erreichbar, wenn sie die Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen von Gruppen ist, dessen Kantengruppen endlich sind und dessen Eckengruppen endlich erzeugt sind und höchstens ein Ende haben.*

Beweis. Übung $\square$

Wall vermutete folgendes:

[13] Diese Verschärfung der Forderungen an ein Element aus $\mathcal{B}_m$ ist aber nicht mehr Gegenstand dieser Vorlesung.

Vermutung 4.7.5 (Wall 1971)**.** *Jede endlich erzeugte Gruppe ist erreichbar.*

Ein erstes positives Resultat konnte Dunwoody zeigen:

Satz 4.7.6 (Dunwoody 1985)**.** *Jede endlich präsentierte Gruppe ist erreichbar.*

Die allgemeine Vermutung wurde jedoch schließlich widerlegt:

Satz 4.7.7 (Dunwoody 1991)**.** *Es existieren endlich erzeugte Gruppen, die nicht erreichbar sind.*

Ein weiteres wichtiges Ergebnis zur Erreichbarkeit folgt aus einem Satz von Thomassen und Woess.

Theorem 4.7.8 (Thomassen und Woess 1993)**.** *Eine endlich erzeugte Gruppe ist genau dann erreichbar, wenn ein (und damit jeder) ihrer lokal-endlichen Cayley-Graphen die folgende Eigenschaft hat: es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass je zwei Enden durch höchstens n Kanten getrennt werden können.*

Korollar 4.7.9. *Erreichbarkeit ist eine Quasi-Isometrie-Invariante.*

Kapitel 5

Hyperbolische Gruppen

5.1 Hyperbolische Graphen und Gruppen

Definition. Sei $\Gamma = (V, E)$ eine Graph und sei $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seien $x_1, x_2, x_3 \in V$ und sei P_i ein kürzester Weg zwischen x_i und x_{i+1} (mod 3). Wir nennen das Tupel

$$(x_1, x_2, x_3; P_1, P_2, P_3)$$

ein **geodätisches Dreieck**. Es heißt **δ-dünn**, falls für jedes $x \in V(P_i)$ ein $y \in \bigcup_{i \neq j} V(P_j)$ mit $d(x, y) \leq \delta$ existiert. Der Graph Γ heißt **δ-hyperbolisch**, falls jedes geodätische Dreieck δ-dünn ist, und **hyperbolisch**, falls es δ'-hyperbolisch für ein $\delta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

Beispiel 5.1.1. (1) Bäume sind 0-hyperbolisch.

(2) Das Gitter $\mathbb{Z}^2$ ist nicht hyperbolisch.

Bemerkung. In der Literatur wird Hyperbolizität in der Regel für metrische Räume definiert. In dem Zusammenhang werden dann Graphen samt $[0, 1]$-Bilder der Kanten aufgefasst, ähnlich wie bei plättbaren Graphen. Dadurch ergeben sich leichte Verschiebungen der Konstanten δ. So ist das häufig gefundene Resultat *Bäume sind die 0-hyperbolischen Graphen* mit unserer Definition falsch.

Direkt aus der Definition von δ-dünnen geodätischen Dreiecken erhalten wir, dass in hyperbolischen Graphen geodätische Wege zwischen den gleichen Ecken nah beieinander liegen.

Lemma 5.1.2. *Sei Γ ein δ-hyperbolischer Graph und seien $x, y \in V(G)$. Seien P_1, P_2 zwei geodätische x–y-Wege. Es gilt $d(v, P_i) \leq \delta$ für alle $v \in V(P_j)$ mit $i, j \in \{1, 2\}$.* □

Das vorige Lemma gilt sogar für quasi-geodätische Wege. Bevor wir das jedoch zeigen können, müssen wir zunächst etwas über die Divergenz von geodätischen Wegen zeigen.

Definition. Sei Γ ein Graph. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine **Divergenzfunktion** für Γ, falls für alle geodätischen Wege $P_1 = x_0 \dots x_n$ und $P_2 = y_0 \dots y_m$ mit $x_0 = y_0$ und für alle $r, R \in \mathbb{N}$ mit $r + R \leq \min\{m, n\}$ folgendes erfüllt ist, sofern $d(x_R, y_R) > f(0)$: für alle Wege Q außerhalb von $B_{R+r-1}(x_0)$ von x_{R+r} nach y_{R+r} gilt $\ell(Q) > f(r)$.

Wir sagen **geodätische Wege divergieren exponentiell**, falls es eine exponentielle Divergenzfunktion gibt.[1]

Proposition 5.1.3. *Genau dann ist ein Graph hyperbolisch, wenn geodätische Wege in ihm exponentiell divergieren.*

Beweis. Zunächst sei Γ ein hyperbolischer Graph. Seien $P_1 = x_0 \dots x_{R+r}$ und $P_2 = y_0 \dots y_{R+r}$ zwei geodätische Wege mit gemeinsamer Startecke $x_0 = y_0$ und Länge $R + r$ mit $r, R \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_R, y_R) > 2\delta$ gilt. Sei Q ein x_{R+r}–y_{R+r}-Weg, der außerhalb von $B_{R+r-1}(x_0)$ liegt, und sei Q_g ein geodätischer x_{R+r}–y_{R+r}-Weg.

Sei $v \in V(Q_g)$ und sei $w \in V(Q)$ mit

$$d_Q(x_{R+r}, w) = \left\lceil \frac{d_Q(x_{R+r}, y_{R+r})}{2} \right\rceil .$$

Sei Q_1 ein geodätischer x_{R+r}–w-Weg und Q_2 ein geodätischer w–y_{R+r}-Weg. Dann existiert ein $u \in V(Q_1) \cup V(Q_2)$ mit $d(v, u) \leq \delta$. OBdA nehmen wir an, dass u auf Q_1 liegt. Per Induktion folgt

$$d(v, Q) \leq \delta \log_2(d_Q(x_{R+r}, y_{R+r})).$$

Wegen $d(x_R, y_R) > 2\delta$ kann es keine Ecke a auf P_2 geben mit $d(x_R, a) \leq \delta$: diese hätte Abstand mindestens $R - \delta$ und höchstens $R + \delta$ zu x_0 und damit Abstand höchstens δ zu y_R. Also gibt es eine Ecke auf Q_g mit Abstand höchstens δ zu x_R. OBdA sei diese v. Es folgt

$$r + R = d(x, Q) \leq d(x, v) + d(v, Q) \leq R - \delta + \delta \log_2(\ell(Q)).$$

Also gilt

$$\ell(Q) \geq 2^{\frac{r+\delta}{\delta}}$$

und somit divergieren geodätische Wege exponentiell in Γ.

Nun setzen wir voraus, dass Γ ein Graph ist, in dem geodätische Wege exponentiell divergieren. Sei dazu f eine exponentielle Divergenzfunktion für Γ. Sei $(x, y, z; P_1, P_2, P_3)$ ein geodätisches Dreieck in Γ. Seien $x_1 \in V(P_1)$ und $x_2 \in V(P_3)$ mit $d(x, x_1) = d(x, x_2)$ maximal, sodass $d(u, v) \leq f(0)$ für alle $u \in V(P_1)$ und alle $v \in V(P_3)$ mit $d(x, x_1) \geq d(x, u) = d(x, v)$ gilt. Analog definieren wir y_1 und y_2 auf P_2 bzw. P_1 und z_1 und z_2 auf P_3 bzw. P_2.

[1] Damit meinen wir streng genommen, eine Divergenzfunktion ist äquivalent zu einer exponentiellen Funktion in dem Sinne, wie (verallgemeinerte) Wachstumsfunktionen äquivalent zueinander sind.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass P_1 keine Ecke außerhalb von xP_1x_1 oder y_2P_1y hat: dann existieren $x_3 \in V(xP_3x_2)$ und $y_3 \in V(yP_2y_1)$ mit

$$d(x_3, y_3) \leq 2f(0) + 1.$$

Die Wege P_2 und P_3 sind geodätisch und deswegen folgt

$$d(z, x_3) + 2f(0) + 1 \geq d(z, y_3).$$

Da f eine exponentielle Divergenzfunktion ist, sind die Abstände $d(z_1, x_3)$ und $d(z_2, y_3)$ durch $f^{-1}(4f(0)+2)$ beschränkt. Somit sind die Abstände $d(z_1, x_2)$ und $d(z_2, y_1)$ durch den gleichen Wert beschränkt. Es folgt, dass unser geodätisches Dreieck λ-dünn ist, wobei

$$\lambda = f^{-1}(4f(0) + 2) + 2f(0) + 1$$

gewählt werden kann.

Nun betrachten wir den Fall, dass es eine Ecke auf P_1 außerhalb von xP_1x_1 und y_2P_1y gibt und analoges für die anderen beiden Seiten gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} K_1 &:= d(x_1, y_2),\\ K_2 &:= d(y_1, z_2) \text{ und}\\ K_3 &:= d(z_1, x_2). \end{aligned}$$

OBdA gelte $K_1 \geq K_2 \geq K_3$. Sei $v \in V(P_1)$ mit $d(x_1, v) = \lceil d(x_1, y_2)/2 \rceil$.

Behauptung 1. Der Weg x_2P_3z liegt außerhalb von $B_{d(y,v)-1}(y)$.

Beweis von Behauptung 1. Nehmen wir an, dass es eine Ecke $u \in V(x_2P_3z)$ mit $d(u, y) \leq d(y, v) - 1$ gibt. Wegen

$$d(y, v) + d(x, v) - 1 < d(x, y)$$

gilt $u \notin B_{d(x,v)}(x)$ und somit $d(u, x_2) \geq K_1/2$. Wegen $K_2 \geq K_3$ finden wir ein $w \in V(P_2)$ mit $d(u, z) = d(w, z)$. Es folgt

$$\begin{aligned} K_1/2 &\leq d(u, x_2)\\ &= d(x_2, z) - d(u, z)\\ &= d(x_2, z_1) + d(z_1, z) - d(u, z)\\ &\leq d(z_2, y_1) + d(z_2, z) - d(z, w)\\ &= d(z, y_1) - d(z, w)\\ &= d(w, y_1). \end{aligned}$$

Also liegt w nicht in $B_{d(y,v)-1}(y)$. Wir folgern

$$\begin{aligned} d(y, z) &= d(z, w) + d(w, y)\\ &\leq d(z, u) + d(u, y)\\ &< d(z, w) + d(w, y)\\ &= d(y, z). \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Sei $s \in V(P_2)$ mit $d(y,s) = d(y,v)$. Beachte, dass Behauptung 1 die Existenz von s impliziert. Es existiert ein v–s-Weg im Komplement von $B_{d(y,v)-1}(y)$ der Länge höchstens

$$\begin{aligned} & d(v,x_1) + f(0) + K_3 + 3f(0) + d(z_2,s) \\ \leq\ & \lceil K_1/2 \rceil + 4f(0) + K_1 + \lceil K_1/2 \rceil \\ \leq\ & 2K_1 + 4f(0) + 1. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$f\left(\left\lfloor \frac{K_1}{2} \right\rfloor\right) \leq 2K_1 + 4f(0) + 1.$$

Da f eine exponentielle Funktion ist, existiert ein (von K_1 unabhängiges) $K \in \mathbb{N}$ mit $K_1/2 \leq K$. Es folgt, dass mit $\lambda' := 4K + 4f(0) + 1$ unser geodätisches Dreieck λ'-dünn ist. Mit $\delta = \max\{\lambda, \lambda'\}$ folgt, dass Γ ein δ-hyperbolischer Graph ist. □

Proposition 5.1.4. *Sei Γ ein hyperbolischer Graph und seien $x, y \in V(G)$. Seien P_1 ein geodätischer und P_2 ein (γ, c)-quasi-geodätischer x–y-Weg mit $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

(1) *Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{N}$, das nur von (δ, γ, c) abhängt, mit $d(v, P_2) \leq \lambda$ für alle $v \in V(P_1)$.*

(2) *Es existiert ein $\kappa \in \mathbb{N}$, das nur von (δ, γ, c) abhängt, mit $d(v, P_i) \leq \kappa$ für alle $v \in V(P_j)$ mit $i, j \in \{1, 2\}$.*

Beweis. Nach Proposition 5.1.3 existiert eine exponentielle Divergenzfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sei $D := \max\{d(v, P_2) \mid v \in V(P_1)\}$ und sei $v \in V(P_1)$ mit $d(v, P_2) = D$. Sei u' eine Ecke auf xP_1v mit $d(u', v) = 2D$, falls es möglich ist, und $u' = x$ sonst. Analog wählen wir w' auf vP_1y. Beachte, dass nach der Wahl von v

$$d(v,x) \geq D \leq d(v,y)$$

gilt. Wir wählen $u \in V(u'P_1v)$ mit $d(u,v) = D$ und $w \in V(vP_1w')$ mit $d(v,w) = D$. Aufgrund der Wahl von D existieren $a \in V(P_2) \cap B_D(u')$ und $b \in V(P_2) \cap B_D(w')$. Somit gilt $d(a,b) \leq 6D$ und $d_{P_2}(a,b) \leq 6\gamma D + c$, weil P_2 ein (γ, c)-quasi-geodätischer Weg ist. Wir finden also einen Weg der Länge höchstens $4D + 6\gamma D + c$ von u nach w, der außerhalb von $B_{D-1}(v)$ liegt. Weil f eine exponentielle Divergenzfunktion ist, aber die Länge des Weges nur linear in D ist, folgt die Existenz einer oberen Schranke λ, die nur von (δ, γ, c) abhängt mit $D \leq \lambda$. Damit folgt (1).

Für den Beweis von (2) nehmen wir an, dass P_2 Ecken außerhalb von $B_\lambda(P_1)$ hat. Sei P' ein maximaler Teilweg von P_2, sodass das innere von P' außerhalb von $B_\lambda(P_1)$ liegt. Die Endecken von P' seien u und v. OBdA liege u auf xP_2v. Nach Wahl von P' existieren $a, b \in V(P_1)$ mit $a \in B_\lambda(u)$ und $b \in B_\lambda(v)$. Wegen (1) hat jede Ecke auf aP_1b Abstand höchstens λ zu einer Ecke auf P_2, die nach Wahl von P' in $xP_2u \cup vP_2y$ liegt. Insbesondere finden wir eine Ecke z auf aP_1b, die Abstand höchstens λ zu einer Ecke z_1 auf xP_2u und Abstand höchstens

$\lambda + 1$ zu einer Ecke z_2 auf vP_2y hat. Es folgt $d(z_1, z_2) \leq 2\lambda + 1$ und damit $d_{P_2}(z_1, z_2) \leq \gamma(2\lambda + 1) + c$, weil P_2 ein (γ, c)-quasi-geodätischer Weg ist. Damit ist die Länge von P' beschränkt durch $\gamma(2\lambda + 1) + c$ und es folgt Behauptung (2) mit $\kappa = \lambda + \gamma\lambda + \lceil(\gamma + c)/2\rceil$. $\square$

Lemma 5.1.5. *Seien Γ und Δ zwei Graphen, sei $\varphi\colon \Gamma \to \Delta$ eine (γ, c)-quasi-isometrische Einbettung mit $\gamma \geq 1$ und $c \geq 0$ und sei $P = x_0 \dots x_n$ ein geodätischer Weg in Γ. Dann induziert $\varphi(P)$ einen (γ', c')-quasi-geodätischen $x_0\varphi$–$x_n\varphi$-Weg Q in Δ, sodass jede Ecke von Q Abstand höchstens a zu einer Ecke aus $\varphi(P)$ hat, wobei γ', c' und a nur von γ und c abhängen.*

Beweis. Wähle zwischen $\varphi(x_i)$ und $\varphi(x_{i+1})$ einen geodätischer Weg Q_i und in der Vereinigung der Q_i, die einen $x_0\varphi$–$x_n\varphi$-Kantenzug bildet, einen $x_0\varphi$–$x_n\varphi$-Weg. Dass dieser Weg die Behauptung erfüllt, wird in der Übung gezeigt. $\square$

Proposition 5.1.6. *Seien Γ und Δ zwei Graphen. Existiert eine (γ, c)-quasi-isometrische Einbettung $\varphi\colon \Gamma \to \Delta$ für $\gamma \geq 1$ und $c \geq 1$ und ist Δ hyperbolisch, so ist Γ hyperbolisch.*

Beweis. Sei $(x_1, x_2, x_3; P_1, P_2, P_3)$ ein geodätisches Dreieck in Γ. Sei $y_i := \varphi(x_i)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann induziert $\varphi(P_i)$ gemäß Lemma 5.1.5 einen (γ', c')-quasi-geodätischen y_i–y_{i+1}-Weg P'_i, wobei γ' und c' nur von γ und c abhängen. Seien Q_i geodätische y_i–y_{i+1}-Wege für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Sei $x \in V(P_i)$. Nach Proposition 5.1.4 (2) existiert ein κ, das nur von (δ, γ, c) abhängt, sodass ein $x' \in V(Q_i)$ mit $d(\varphi(x), x') \leq \kappa$ existiert. Da Δ δ-hyperbolisch ist, finden wir ein $y' \in V(Q_j)$ für ein $j \neq i$ mit $d(x', y') \leq \delta$ und ein $y'' \in P'_j$ mit $d(y', y'') \leq \kappa$. Nach Lemma 5.1.5 existiert dann ein $y \in V(P_j)$ mit $d(y'', \varphi(y)) \leq \gamma + c$. Also gilt

$$\frac{1}{\gamma} d(x, y) - \gamma \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq 2\kappa + \delta + \gamma + c$$

und damit

$$d(x, y) \leq \gamma(2\kappa + \delta + \gamma + 2c).$$

Also ist Γ δ'-hyperbolisch mit $\delta' := \gamma(2\kappa + \delta + \gamma + 2c)$. $\square$

Korollar 5.1.7. *Seien Γ und Δ zwei quasi-isometrische Graphen. Genau dann ist Γ hyperbolisch, wenn Δ hyperbolisch ist.* $\square$

Definition. Eine endlich erzeugte Gruppe heißt **hyperbolisch**, falls einer (und damit nach Proposition 3.1.5 und Korollar 5.1.7 jeder) ihrer lokal-endlichen Cayley-Graphen hyperbolisch ist.

Beispiel 5.1.8. (1) Endliche Gruppen sind hyperbolisch.

(2) Freie Gruppen sind hyperbolisch.

(3) Die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ ist nicht hyperbolisch.

Lemma 5.1.9. *Sei Γ ein δ-hyperbolischer Graph und $K = x_0e_0 \dots x_n$ ein geschlossener Kantenzug in Γ mit $n > 4\delta + 4$. Dann existieren zwei Ecken x_i, x_j, sodass $d(x_i, x_j)$ kleiner ist als die Länge von sowohl $x_ie_i \dots x_j$ als auch $x_je_j \dots x_i$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Für alle x_i, x_j ist dann $x_ie_i \dots x_j$ oder $x_je_j \dots x_i$ ein Kantenzug, der einem geodätischen Weg entspricht. Insbesondere entspricht K einem Kreis C.

Seien nun $y_1, y_2, y_3 \in V(C)$ mit

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &= \lfloor \ell(C)/2 \rfloor, \\ d(y_2, y_3) &= \lceil \ell(C)/4 \rceil \text{ und} \\ d(y_3, y_1) &= \ell(C) - d(y_1, y_2) - d(y_2, y_3). \end{aligned}$$

Sei P_i das Teilstück von C von y_i nach y_{i+1}[2], das diesen Abstand realisiert. Die Wege P_i sind also geodätische Wege und $(y_1, y_2, y_3; P_1, P_2, P_3)$ ist ein geodätisches Dreieck. Wegen der Wahl von y_1 und y_2 und wegen $\ell(C) \geq 4\delta + 4$ existiert eine Ecke $v \in V(P_1)$ mit

$$d(v, y_1) > \delta < d(v, y_2).$$

Da Γ δ-hyperbolisch ist, existiert also ein $w \in V(P_2) \cup V(P_3)$ mit $d(v, w) \leq \delta$. Dies widerspricht der Voraussetzung $d(v, w) = d_C(v, w)$. □

Satz 5.1.10. *Hyperbolische Gruppen sind endlich präsentiert.*

Beweis. Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine δ-hyperbolische Gruppe, wobei S ein endliches Erzeugendensystem ist. Sei Γ der Cayley-Graph von G und S. Jeder Relator entspricht einem geschlossenen Kantenzug in Γ. Enthält R einen Relator w mit Länge mehr als $4\delta+4$, so entspricht dieser einem Kantenzug $K = x_0e_0 \dots x_n$ der Länge mehr als $4\delta + 4$. Nach Lemma 5.1.9 existieren Ecken x_i, x_j auf K, sodass $d(x, y)$ kleiner ist als die Längen von $x_ie_i \dots x_j$ und $x_je_j \dots x_i$. Sei $y_0f_0 \dots y_m$ mit $y_0 = x_i$ und $y_m = x_j$ ein kürzester Kantenzug zwischen x_i und x_j. Dann sind $x_ie_i \dots x_jf_{m-1} \dots f_0y_0$ und $y_0f_0 \dots f_{m-1}y_me_j \dots x_i$ geschlossene Kantenzüge, die Wörtern entsprechen, deren Konkatenation nach elementaren Reduktionen genau w ist. Damit liegt w im Normalteiler, der von den beiden Wörtern zu diesen kürzeren Kantenzügen erzeugt wird. Induktiv folgt, dass R als NOrmalteiler von Wörtern der Länge höchstens $4\delta + 4$ erzeugt wird. Da es nur endliche viele solcher Wörter über $S \cup S^{-1}$ gibt, folgt die Behauptung. □

5.2 Untergruppen hyperbolischer Gruppen

Wir wollen zeigen, dass unendliche hyperbolische Gruppen immer Elemente unendlicher Ordnung enthalten. Dafür müssen wir allerdings noch etwas Vorarbeit leisten.

[2] bzw. nach y_1, falls $i = 3$

Definition. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, S ein endliches Erzeugendensystem von G und $g \in G$. Der **Konus** von g bezüglich S ist die Menge

$$Cone_S(g) := \{h \in G \mid d_S(1, gh) \geq d_S(1, g) + d_S(1, h)\}.$$

Beispiel 5.2.1. Sei F eine freie Gruppe vom Rang $n \in \mathbb{N}$ mit freiem Erzeugendensystem S. Dann hat F genau $2 \cdot |S| + 1$ viele Konen: neben $Cone_S(1) = F$ noch $Cone_S(s) = \{s_1 \dots s_n \mid s_i \in S \cup S^{-1}, s_1 \neq s^{-1}\}$ für jedes $s \in S \cup S^{-1}$.

Offensichtlich sind diese Konen verschieden (in $Cone_S(s)$ ist s^{-1} als eindeutiges Element aus $S \cup S^{-1}$ nicht enthalten) und für jedes Wort $s_1 \dots s_n$ über $S \cup S^{-1}$ mit $n \geq 2$ gilt $Cone_S(s_1 \dots s_n) = Cone_S(s_n)$.

Definition. Eine Gruppe heißt **Torsionsgruppe**, falls jedes ihrer Elemente ein Torsionselement ist.

Proposition 5.2.2. *Sei G eine endlich erzeugte unendliche Gruppe, die nur endlich viele Konen bezüglich eines endlichen Erzeugensystems S hat. Dann ist G keine Torsionsgruppe.*

Beweis. Wir setzen

$$k := |\{Cone_S(g) \mid g \in G\}| .$$

Die Endlichkeit von S impliziert, dass der Cayley-Graph Γ von G und S lokalendlich ist. Somit folgt aus der Unendlichkeit von G die Existenz eines $g \in G$ mit $d(1, g) > k$. Sei $1 = g_0, g_1, \dots, g_m = g$ ein kürzester Weg in Γ von 1 zu g. Wegen $m > k$ existieren auf diesem Weg zwei Ecken $g_i \neq g_j$ mit $i < j$, die den gleichen Konus haben. Wir behaupten, dass $h := g_i^{-1} g_j$ unendliche Ordnung hat. Dazu werden wir per Induktion zeigen, dass

$$d_S(1, g_i h^n) \geq d_S(1, g_i) + n \cdot d_S(1, h)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Proposition folgt direkt aus dieser Aussage, weil die Elemente $g_i h^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ somit verschieden sein müssen.

Für $n = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Wahl von h. Sei also $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Aussage für n gilt. Dann folgt $d_S(1, h^n) = n \cdot d_S(1, h)$ wegen

$$\begin{aligned} d_S(1, g_i) + d_S(1, h^n) &\geq d_S(1, g_i h^n) \\ &\geq d_S(1, g_i) + n \cdot d_S(1, h) \\ &\geq d_S(1, g_i) + d_S(1, h^n). \end{aligned}$$

Außerdem gilt $h^n \in Cone_S(g_i) = Cone_S(g_i h)$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_S(1, g_i h^{n+1}) &= d_S(1, g_i h h^n) \\ &\geq d_S(1, g_i h) + d_S(1, h^n) \\ &= d_S(1, g_i) + d_S(1, h) + n \cdot d_S(1, h) \\ &= d_S(1, g_i) + (n+1) \cdot d_S(1, h), \end{aligned}$$

was die Induktion zeigt. □

Proposition 5.2.3. *Sei G eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem S. Dann hat G bezüglich S nur endlich viele verschiedene Konen.*

Beweis. Für $g \in G$ und $r \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$P_r^S(g) := \{h \in B_r^{G,S}(1) \mid d_S(1, gh) \leq d_S(1, g)\}.$$

Sei Γ der Cayley-Graph von G und S. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass Γ δ-hyperbolisch ist. Setze $r := 2\delta + 1$.

Wenn wir zeigen, dass die Menge $P_r^S(g)$ eines Gruppenelements $g \in G$ bereits seinen Konus bestimmt, so folgt aus der Tatsache, dass jedes $P_r^S(g)$ Teilmenge der endlichen Menge $B_r^{G,S}(1)$ ist, dass es nur endlich viele Konen geben kann. Also wollen wir jetzt zeigen, dass für alle $g, g' \in G$ aus $P_r^S(g) = P_r^S(g')$ bereits $Cone_S(g) = Cone_S(g')$ folgt.

Seien also $g, g' \in G$ mit $P_r^S(g) = P_r^S(g')$ und $h \in Cone_S(g)$. Per Induktion über $d_S(1, h)$ zeigen wir $h \in Cone_S(g')$.

Ist $d_S(1, h) = 0$, so gilt $h = 1$ und offenbar gilt $h \in Cone_S(g')$. Ist $d_S(1, h) = 1$, so impliziert $h \in Cone_S(g)$ zusammen mit den Definitionen eines Konus und von $P_r^S(g)$, dass h nicht in $P_r^S(g) = P_r^S(g')$ liegt, und folglich muss es in $Cone_S(g')$ liegen.

Sei nun $d_S(1, h) > 1$. Dann existiert $s \in S \cup S^{-1}$ und $h' \in G$ mit $h = h's$ und $d_S(1, h') = d_S(1, h) - 1$. Da $h \in Cone_S(g)$ gilt, gilt auch $h' \in Cone_S(g)$ und nach Induktion $h' \in Cone_S(g')$.

Wir nehmen an, dass $h \notin Cone_S(g')$ gilt. Dann gilt also

$$d_S(1, g'h) < d_S(1, g') + d_S(1, h).$$

Seien $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ mit $s_1 \ldots s_n = g'h$ und $n = d_S(1, g'h)$. Sei $k_1 := s_1 \ldots s_{d_S(1,g')}$ und $k_2 := k_1^{-1} g'h$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_S(1, g'h) &= d_S(1, k_1) + d_S(1, k_2) \text{ und} \\ d_S(1, k_1) &= d_S(1, g') \end{aligned}$$

und aus die Annahme an h (nämlich $h \notin Cone_S(g')$) folgt

$$d_S(1, k_2) \leq d_S(1, h) - 1.$$

Wir betrachten das Element $h'' := g'^{-1} k_1$. Es gilt

$$\begin{aligned} d_S(1, h'') &= d_S(1, g'^{-1} k_1) \\ &= d_S(g', k_1) \\ &\leq 2\delta + 1 \\ &\leq r, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Ungleichung ähnlich wie eine Übungsaufgabe gefolgert wird: die $s_1 \ldots s_n$ definieren einen geodätischen Weg und ein weiterer wird durch g'

und h definiert. Deren Endecken haben Abstand 1 und wir können eine Argumentation wie in der Übung benutzen, um $d_S(g', k_1) \leq 2\delta + 1$ zu folgern. Somit liegt h'' in $B_r^{G,S}(1)$.

Außerdem gilt

$$d_S(1, g'h'') = d_S(1, k_1) = d_S(1, g')$$

und deswegen folgt $h'' \in P_r^S(g') = P_r^S(g)$. Es folgt wegen $h \in Cone_S(g)$:

$$\begin{aligned} d_S(1,g) + d_S(1,h) &\leq d_S(1, gh) \\ &= d_S(1, gg'^{-1}g'h) \\ &= d_S(1, gg'^{-1}k_1k_2) \\ &\leq d_S(1, gh'') + d_S(1, k_2) \\ &\leq d_S(1,g) + d_S(1,h) - 1. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch beweist die Induktion und damit wie bereits besprochen die Proposition. □

Es folgt direkt aus Propositionen 5.2.2 und 5.2.3:

Satz 5.2.4. *Unendliche hyperbolische Gruppen sind keine Torsionsgruppen.* □

Unser nächstes Ziel ist einzusehen, dass keine hyperbolische Gruppe $\mathbb{Z}^2$ als Untergruppe enthält. Dazu zeigen wir zunächst, dass jede unendliche zyklische Untergruppe ein quasi-isometrisches Bild von $\mathbb{Z}$ in der hyperbolischen Gruppe ist.

Proposition 5.2.5. *Sei g ein Element unendlicher Ordnung in einer hyperbolischen Gruppe G. Dann ist die Funktion*

$$\psi\colon \mathbb{Z} \to G,\ z \mapsto g^z$$

eine quasi-isometrische Einbettung.

Beweis. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von der hyperbolischen Gruppe G und sei Γ der Cayley-Graph von G und S. Sei $\delta \geq 0$, sodass der Graph δ-hyperbolisch ist, und sei $n := |\{g \in G \mid d_S(1,g) \leq 4\delta + 1\}|$. Hier bezeichne ein **Mittelpunkt** eines Weges eine (von den höchstens zwei) mittleren Ecken. Unser erstes größeres Ziel wird sein, $d_S(1, g^{nr}) \geq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dafür sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit

$$d_S(1, g^k) > 8r + 4\delta + 1.$$

Sei P ein geodätischer 1–g^k-Weg, x ein Mittelpunkt von P und P_x ein Teilweg von P der Länge $2r$, sodass x ein Mittelpunkt von P_x ist. Zunächst zeigen wir die folgende Behauptung:

Behauptung 1. Sind $u \in B_r(1)$ und $v \in B_r(g^k)$, so gilt $d_S(y, P_x) \leq 4\delta + 1$ für jeden Mittelpunkt y eines geodätischen u–v-Weges P'.

Beweis von Behauptung 1. Sei P'' ein geodätischer 1–v-Weg. Es gilt

$$|d_S(1, g^k) - d_S(1, v)| \leq r$$

und

$$|d_S(1, g^k) - d_S(u, v)| \leq 2r.$$

Somit muss der Mittelpunkt y von P' mehr als δ von $B_r(1)$ und $B_r(g^k)$ entfernt sein und, weil Γ δ-hyperbolisch ist, existiert eine Ecke z auf P'' mit $d_S(y, z) \leq \delta$. Da sich die Längen von P' und P'' um höchstens r unterscheiden, gilt $d_S(y, z') \leq \lceil r/2 \rceil + \delta$, wobei z' ein Mittelpunkt von P'' ist. Analog finden wir eine Ecke x' auf P, die Abstand höchstens δ zu z hat und sodass

$$d(x, x') \leq 2(\lceil r/2 \rceil + \delta) \leq r + 2\delta + 1$$

gilt. Es folgt die Behauptung. □

Wegen $n = |B_{4\delta+1}(1)|$, haben höchstens $2nr$ viele verschiedene Ecken Abstand $4\delta+1$ oder weniger zu P_x. Da alle g^i verschieden sind und G frei auf Γ operiert, sind auch die Bilder von x unter den g^i verschieden. Es können höchstens $2nr$ von diesen Bildern Abstand höchstens $4\delta + 1$ von P_x haben. Deswegen und wegen $d_S(1, g^i) = d_S(1, g^{-i})$ muss es ein $f(r) \leq nr$ mit $0 < f(r)$ geben, sodass $g^{f(r)} \notin B_r(1)$ und $g^{k+f(r)} \notin B_r(g^k)$ gelten.

Behauptung 2. Es gilt $d_S(1, g^{nR}) \geq R$ für alle $R \in \mathbb{N}$ mit $R > 0$.

Beweis von Behauptung 2. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch sei. Es existiert also ein $R \in \mathbb{N}$ mit $d_S(1, g^{nR}) < R$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m > nR$ seien $n_m, r_m \in \mathbb{N}$ mit $m = n_m nR + r_m$ und $0 \leq r_m < nR$. Da n_m beliebig groß werden kann, es aber nur endlich viele Werte für r_m gibt, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein q_ε mit $n_m\varepsilon > d_S(1, g^{r_m})$ für alle m mit $n_m \geq q_\varepsilon$. Sei nun m derart, dass $n_m \geq q_\varepsilon$ gilt, wobei $\varepsilon := R - d_S(1, g^{nR})$ sei. Es folgt

$$\begin{aligned} d_S(1, g^m) &\leq d_S(1, g^{n_m nR}) + d_S(1, g^{r_m}) \\ &\leq n_m d_S(1, g^{nR}) + d_S(1, g^{r_m}) \\ &\leq n_m(R - \varepsilon) + d_S(1, g^{r_m}) \\ &< n_m R. \end{aligned}$$

Sei $M \in \mathbb{N}$, sodass $f(M) > nR$ und $n_{f(M)} \geq q_\varepsilon$. Dann gelten $f(M) \leq nM$ und $d_S(1, g^{f(M)}) \geq M$ nach der Wahl von $f(M)$. Es folgt nach der vorigen Rechnung:

$$d_S(1, g^{f(M)}) < n_{f(M)}R \leq f(M)/n \leq M.$$

Dies widerspricht der Wahl von $f(M)$ und zeigt die Behauptung. □

Jetzt können wir zeigen, dass ψ eine quasi-isometrische Einbettung ist. Seien dafür $i, j, m, r_{ij} \in \mathbb{Z}$ mit $0 \le m < n$ und $|i-j| = nr_{ij} + m$ und sei $K \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $d(1, g^{m'}) \le K$ für alle $0 \le m' < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}|i-j| - (n+K) &\le r_{ij} + m - (m+K)\\ &= r_{ij} - K\\ &\le d_S(1, g^{nr_{ij}}) - K\\ &\le d_S(1, g^{nr_{ij}+m})\\ &= d_S(1, g^{|i-j|})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}d_S(1, g^{|i-j|}) &= d_S(1, g^{nr_{ij}+m})\\ &\le d_S(1, g^{nr_{ij}}) + d_S(1, g^m)\\ &\le nr_{ij} d_S(1, g) + m d_S(1, g)\\ &\le d_S(1, g)(nr_{ij} + m)\\ &= d_S(1, g)|i-j|.\end{aligned}$$

Wenn die Konstanten für die potentielle quasi-isometrische Einbettung als $\gamma := \max\{n, d_S(1, g)\}$ und $c := n + K$ gewählt werden, zeigt dies die behauptete Aussage. □

Wir werden nun die Zentralisatoren der Elemente unendlicher Ordnung in hyperbolischen Gruppen untersuchen.

Definition. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Der **Zentralisator** von g ist die Untergruppe

$$C_G(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}.^3$$

Satz 5.2.6. *Sei G eine unendliche hyperbolische Gruppe und $g \in G$ ein Element unendlicher Ordnung. Dann gilt*

$$|C_G(g) : \langle g \rangle| \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G und sei $\delta \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, sodass der Cayley-Graph Γ von G und S δ-hyperbolisch ist. Nach Proposition 5.2.5 existieren $\gamma \in \mathbb{R}_{\ge 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, sodass

$$\mathbb{Z} \to G, \; z \mapsto g^z$$

eine (γ, c)-quasi-isometrische Einbettung ist. Sei $h \in C_G(g)$. Da die Ordnung von g unendlich ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$d_S(1, g^m) > 2d_S(1, h) + 4\delta + 2.$$

Wir wählen geodätische Wege

[3] Es ist leicht einzusehen, dass der Zentralisator wirklich eine Untergruppe ist.

- P_1 zwischen 1 und g^m,
- P_2 zwischen g^m und hg^m,
- P_3 zwischen hg^m und h,
- P_4 zwischen h und 1 und
- P_5 zwischen 1 und hg^m.

Sei x ein Mittelpunkt von P_1. Dann existiert eine Ecke y auf P_5 mit Abstand höchstens δ zu x, da nach der Wahl der Länge von P_1 jede Ecke auf P_2 weiter als δ von x entfernt ist. Analog finden wir eine Ecke z auf P_3 mit $d_S(y,z) \leq \delta$. Es gilt also $d_S(x,z) \leq 2\delta$.

Sei κ die Konstante aus Proposition 5.1.4 (2). Dann existieren also $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ mit $d_S(x, g^i) \leq \kappa$ und $d_S(z, hg^j) \leq \kappa$. Es folgt

$$d_S(1, hg^{j-i}) = d_S(g^i, hg^j) \leq 2\kappa + 2\delta$$

und damit enthält die Nebenklasse $h\langle g \rangle$ eine Ecke aus dem Ball $B_{2\kappa+2\delta}(1)$. Da dies für alle Nebenklassen von $\langle g \rangle$ gilt und der Ball endlich ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 5.2.7. *Keine hyperbolische Gruppe hat $\mathbb{Z}^2$ als Untergruppe.* □

Im Allgemeinen trifft es aber nicht zu, dass eine Gruppe, nur weil sie nicht hyperbolisch ist, keine Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe sein kann. So gilt:

Satz 5.2.8 (Rips)**.** *Es existiert eine hyperbolische Gruppe, die eine nicht-hyperbolische endlich erzeugte Untergruppe hat.*

Und es gilt sogar:

Satz 5.2.9 (Brady)**.** *Es existiert eine hyperbolische Gruppe, die eine nicht-hyperbolische endlich präsentierte Untergruppe hat.*

Die Beweise für diese Aussagen lassen wir weg.

5.3 Hyperbolischer Rand

Definition. Sei Γ ein hyperbolischer Graph. Ein (Doppel-)Strahl R heißt **geodätisch**, falls

$$d_R(x,y) = d(x,y)$$

für alle $x, y \in V(R)$ gilt. Er heißt **quasi-geodätisch**, falls es Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass für je zwei Ecken x, y auf R gilt:

$$d_R(x,y) \leq \gamma d(x,y) + c.$$

Zwei quasi-geodätische Strahlen R_1, R_2 heißen **äquivalent**, falls es eine Konstante m gibt, sodass für alle $i \neq j \in \{1,2\}$ der Strahl R_i unendlich viele Ecken vom Abstand höchstens m zu R_j hat.

Lemma 5.3.1. *Sei Γ ein δ-hyperbolischer Graph. Sind R_1 und R_2 zwei äquivalente quasi-geodätische Strahlen, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $d(x, R_i) \leq m$ für alle $x \in V(R_j)$ mit $i \neq j \in \{1, 2\}$.*

Beweis. Seien R_1 und R_2 zwei (γ, c)-quasi-geodätische Strahlen. Sei m die Konstante aus der Äquivalenz der beiden Strahlen R_1 und R_2. Seien $x_1, x_2 \in V(R_1)$ und $y_1, y_2 \in V(R_2)$ mit $d(x_i, y_i) \leq m$ und sei P_i ein kürzester x_i–y_i-Weg für alle $i \in \{1, 2\}$. Dann ist $Q := x_1 P_1 y_1 R_2 y_2 P_2 x_2$ ein $(\gamma, c + 2m)$-quasi-geodätischer Weg und es existiert nach Proposition 5.1.4 (2) eine Konstante κ, die nur von γ, c und m abhängt, sodass $x_1 R_1 x_2$ vollständig in einer κ-Umgebung von Q liegt und umgekehrt. Da die x_i beliebig waren, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 5.3.2. *Sei Γ ein hyperbolischer Graph. Äquivalenz quasi-geodätischer Strahlen in Γ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus Lemma 5.3.1. $\square$

Bemerkung 5.3.3. Gemäß Lemma 5.1.5 und Proposition 5.1.4 ist die Definition von der Äquivalenz quasi-geodätischer Strahlen invariant unter Quasi-Isometrien.

Lemma 5.3.2 und Bemerkung 5.3.3 bringen uns zu folgender Definition:

Definition. Sei Γ ein hyperbolischer Graph und G eine hyperbolische Gruppe. Der **hyperbolische Rand** $\partial_h(\Gamma)$ von Γ ist die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation auf den quasi-geodätischen Strahlen. Der **hyperbolische Rand** von G ist der hyperbolische Rand eines lokal-endlichen Cayley-Graphens von G.

Wir erhalten direkt das folgende Ergebnis.

Proposition 5.3.4. *Die Kardinalität des hyperbolischen Randes hyperbolischer Gruppen ist eine Quasi-Isometrie-Invariante.* $\square$

Beispiel 5.3.5. (1) Die Gruppe $\mathbb{Z}$ hat genau zwei hyperbolische Randpunkte.

(2) Ist F eine freie Gruppe von endlichem Rang, so gilt $|\partial_h(F)| = e(G)$.

Bemerkung 5.3.6. Sei Γ ein lokal-endlicher δ-hyperbolischer Graph.

(1) Ähnlich wie wir in einer Übungsaufgabe gezeigt haben, dass in jedem Ende ein geodätischer Strahl liegt, können wir zeigen, dass in jedem hyperbolischen Randpunkt ein geodätischer Strahl R liegt und sogar dass in jeder Ecke des Graphens ein geodätischer Strahl startet, der schließlich mit R übereinstimmt.

(2) Seien $R_1 = x_0 x_1 \ldots$ und $R_2 = y_0 y_1 \ldots$ zwei geodätische Strahlen, die in der gleichen Ecke $x_0 = y_0$ starten, aber nicht äquivalent (bzgl. quasi-geodätischer Strahlen) sind. Sei η_i der durch R_i definierte hyperbolische Randpunkt. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $d(x_r, y_r) > 2\delta$ und es gilt $d(x_r, R_2) > \delta$.

Weil geodätische Dreiecke δ-dünn sind, existiert für jedes geodätische Dreieck mit den Ecken x_0, x_i, y_i mit $i > r$ eine Ecke des geodätischen x_i–y_i-Weges in $B_\delta(x_r)$. Da es nur endlich viele solche Ecken in $B_\delta(x_r)$ gibt, liegt eine davon, nennen wir sie z, auf solchen x_i–y_i-Wegen für unendlich viele $i > r$. Damit finden wir (ähnlich wie in einer Übungsaufgabe) einen geodätischen Doppelstrahl, der einen Teilstrahl in η_1 und einen in η_2 hat.

(3) Seien nun R_1, R_2 zwei geodätische Doppelstrahlen, sodass die durch R_1 definierten hyperbolischen Randpunkte[4] die gleichen sind, wie die durch R_2 definierten. Dann existiert also eine Konstante m, sodass R_1 ganz in $B_m(R_2)$ liegt und umgekehrt. Wählen wir Ecken x_1, x_2 auf R_1 vom Abstand mindestens $2m + 2\delta$ in Γ und Ecken y_1, y_2 auf R_2 mit $d(x_i, y_i) \leq m$, so können wir die Definition δ-dünner geodätischer Dreiecke anwenden, um einzusehen, dass zu jeder Ecke x von $x_1R_1x_2$, die mehr als $m + 2\delta$ von jedem x_i entfernt ist, eine Ecke y auf $y_1R_2y_2$ mit $d(x, y) \leq 2\delta$ existiert. Somit können wir $m = 2\delta$ wählen.

(4) Seien R_1, R_2 zwei (γ, c)-quasi-geodätische Doppelstrahlen, sodass die durch R_1 definierten hyperbolischen Randpunkte die gleichen sind, wie die durch R_2 definierten. Dann existiert also eine Konstante m, sodass R_1 ganz in $B_m(R_2)$ liegt und umgekehrt. Wählen wir Ecken x_1, x_2 auf R_1 von Abstand mindestens $2m + 2\delta$ (in Γ) und y_1, y_2 auf R_2 mit $d(x_i, y_i) \leq m$, so können wir Proposition 5.1.4 (2) und die Eigenschaft δ-dünner geodätischer Dreiecke anwenden, um einzusehen, dass zu jeder Ecke x von $x_1R_1x_2$, die mehr als $m+2\delta$ von jedem x_i entfernt ist, eine Ecke y auf $y_1R_2y_2$ mit $d(x, y) \leq 2\delta+2\kappa$ existiert, wobei κ die Konstante aus Proposition 5.1.4 (2) ist. Somit können wir $m = 2\kappa + 2\delta$ wählen.

Satz 5.3.7. *Sei G eine hyperbolische Gruppe. Dann gilt $|\partial_h(G)| \in \{0, 2, \infty\}$.*

Beweis. Ist G endlich, so ist der hyperbolische Rand von G leer. Sei also G unendlich. Dann enthält G ein Element g unendlicher Ordnung nach Satz 5.2.4. Die quasi-isometrische Einbettung $\psi_g \colon \mathbb{Z} \to G,\ z \mapsto g^z$ (vgl. Proposition 5.2.5) definiert uns einen quasi-geodätischen Doppelstrahl $\ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots$ gemäß Lemma 5.1.5. Beachte, dass aus der Definition eines quasi-geodätischen Doppelstrahles folgt, dass die Strahlen $x_0x_1 \ldots$ und $x_0x_{-1} \ldots$ nicht äquivalent sind. Also gilt $|\partial_h(G)| \geq 2$.

Sei nun $|\partial_h(G)| \geq 3$. Wir wollen zeigen, dass der hyperbolische Rand unendlich ist. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G und Γ der Cayley-Graph von G und S. Dieser sei δ-hyperbolisch. Nehmen wir an, dass der hyperbolische Rand endlich ist. Beachte, dass zu je zwei verschiedenen hyperbolischen Randpunkten ein geodätischer Doppelstrahl existiert, der diese Randpunkte definiert (Bemerkung 5.3.6 (2)). Da geodätische Dreiecke δ-dünn sind, und wegen Bemerkung 5.3.6 (3) finden wir eine endliche Teilmenge B von $V(\Gamma)$, sodass jeder geodätische Doppelstrahl zwischen je zwei hyperbolischen Randpunkten

[4] Das sollen die hyperbolischen Randpunkte sein, die einen Teilstrahl von R_1 enthalten.

B trifft. Sei R ein geodätischer Doppelstrahl. Wegen $|\partial_h(G)| \geq 3$ existiert eine Ecke x auf einem der anderen geodeätischen Doppelstrahlen, die mehr als $2\mathrm{diam}(B) + 2\delta$ von R entfernt ist. Da G transitiv auf Γ operiert, existiert ein $g \in G$ mit $x \in gB$. Dann vermeidet gB aber den geodätischen Doppelstrahl R, was der Wahl von B widerspricht: der hyperbolische Rand ist G-invariant und damit muss auch gB jeden geodätischen Doppelstrahl treffen. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Satz 5.3.8. *Sei G eine hyperbolische Gruppe.*

(1) *Ist $|\partial_h(G)| = 2$, so ist G virtuell $\mathbb{Z}$.*

(2) *Ist $|\partial_h(G)| = \infty$, so hat G eine freie Untergruppe vom Rang 2.*

Beweis. Sei G eine unendliche hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem S. Für Aussage (1) sei $|\partial_h(G)| = 2$. Dann existiert ein geodätischer Doppelstrahl R zwischen den beiden hyperbolischen Randpunkten von G nach Bemerkung 5.3.6 (2) und wegen Aussage (3) dieser Bemerkung liegt jeder geodätische Doppelstrahl (der ja zwangsläufig zwischen den gleichen Randpunkten verlaufen muss) innerhalb $B_{2\delta}(R)$. Dann kann es wegen der Transitivität von Γ keine Ecke geben, die größeren Abstand zu R hat. Somit gilt $e(G) = 2$ und die Aussage folgt mit Satz 3.4.6.

Für den Beweis von (2) setzen wir $|\partial_h(G)| = \infty$ voraus. Nach Satz 5.2.4 existiert ein $g \in G$ unendlicher Ordnung. Wir betrachten die quasi-isometrische Einbettung von $\langle g \rangle$ in G gemäß Proposition 5.2.5. Diese induziert nach Lemma 5.1.5 einen (γ, c)-quasi-geodätischen Doppelstrahl R_g und nach Bemerkung 5.3.6 gibt es einen geodätischen Doppelstrahl R, der die gleichen Randpunkte definiert. Beachte, dass diese hyperbolischen Randpunkte g-invariant sind. Sei g^+ der hyperbolische Randpunkt, der durch den Teilstrahl von R definiert wird, der nah bei den g^i mit $i \in \mathbb{N}$ liegt und sei g^- zweite durch R definierte hyperbolische Randpunkt.

Sei $f \in G$, sodass $d(f, R) > 2\delta$ gilt. Dann hat $h := g^f$ ebenfalls unendliche Ordnung und $f^{-1}R$ ist ein geodätischer Doppelstrahl und $f^{-1}R$ ein (γ, c)-quasi-geodätischer. Wir setzen $h^+ := f^{-1}g^+$ und $h^- := f^{-1}g^-$.[5] Dann existiert zwischen je zwei Randpunkten aus

$$Y := \{g^+, g^-, h^+, h^-\}$$

ein geodätischer Doppelstrahl. Nach der Wahl von f gilt $|Y| \geq 3$, da nicht alle geodätischen Strahlen in $f^{-1}R$ nach Bemerkung 5.3.6 (3) äquivalent zu R sein können. Nehmen wir an, dass $|Y| = 3$ gilt. Dann existieren $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, sodass $d(g^{i_\ell}, h^{j_\ell}) \leq m$ mit $\ell \in \{1, 2\}$ und m wie in der Definition äquivalenter quasi-geodätischer Strahlen gilt und sodass $d(g^{i_1}, g^{i_2})$ und $d(h^{j_1}, h^{j_2})$ beliebig groß ist. Es folgt

$$d(g^{i_1 + k|i_1 - i_2|}, h^{j_1 + k|j_1 - j_2|}) \leq m$$

[5] Dies sei die kanonische Fortsetzung des Automorphismus f von Γ auf $\partial_h(\Gamma)$: Bilder äquivalenter quasi-geodätischer Strahlen sind wieder äquivalent und deswegen können wir jeden Automorphismus auf den Rand von Γ fortsetzen.

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Aber dann gilt $|Y| = 2$, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Wir finden nach Bemerkung 5.3.6, und weil geodätische Dreiecke δ-dünn sind, eine Konstante K, sodass $B_K(1)$ alle (γ, c)-quasi-geodätischen Doppelstrahlen zwischen Elementen aus Y trifft und von jedem weiteren hyperbolischen Randpunkt zu höchstens einem Element aus Y geodätische Doppelstrahlen nicht getroffen werden. Sei $B := B_{2K}(1)$. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\eta \in \partial_h(G) \mid \exists \text{ geod. Doppelstrahl von } \eta \text{ zu } g^+ \text{ in } \Gamma \setminus B\},\\
A_2 &:= \{\eta \in \partial_h(G) \mid \exists \text{ geod. Doppelstrahl von } \eta \text{ zu } g^- \text{ in } \Gamma \setminus B\},\\
B_1 &:= \{\eta \in \partial_h(G) \mid \exists \text{ geod. Doppelstrahl von } \eta \text{ zu } h^+ \text{ in } \Gamma \setminus B\},\\
B_2 &:= \{\eta \in \partial_h(G) \mid \exists \text{ geod. Doppelstrahl von } \eta \text{ zu } h^- \text{ in } \Gamma \setminus B\}.
\end{aligned}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(B, g^n B) > \operatorname{diam}(B) + 2\delta < d(B, h^n B)$$

und sei $\eta \in \partial_h(\Gamma) \setminus A_2$. Sei Q ein geodätischer Doppelstrahl zwischen $g^n\eta$ und g^+. Falls dieser B trifft, so ist er dort bereits $\operatorname{diam}(B)$ nah an R und dann muss er auf dem Weg nach g^+ noch $g^n B$ treffen (sagen wir in der Ecke x). Andererseits läuft jeder geodätische Doppelstrahl P von g^- nach $g^n\eta$ durch B und anschließend durch $g^n B$. Da geodätische Dreiecke δ-dünn sind, existiert eine Ecke y auf Q zwischen $g^n\eta$ und B, die 2δ dicht an $P \cap g^n B$ liegt. Dann gilt aber

$$d(x, y) \leq 2\delta + \operatorname{diam}(B) < d(B, g^n B) \leq d(y, B) + d(B, x) \leq d(x, y).$$

Dieser Widerspruch zeigt $Q \cap B = \emptyset$ und damit $g^n\eta \in A_1$. Analog folgen die weiteren Inklusionsbedingungen, um das Ping-Pong-Lemma (Lemma 2.1.12) anwenden zu können. Damit folgt, dass g^n und h^n eine freie Gruppe frei erzeugen. □

Zusammen mit Korollar 3.5.12 schließen wir aus Satz 5.3.8:

Korollar 5.3.9. *Ist eine hyperbolische Gruppe weder endlich noch virtuell $\mathbb{Z}$, so hat sie exponentielles Wachstum.* □

5.4 Quasi-konvexe Untergruppen

Definition. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei H eine Untergruppe von G. Sei Γ ein lokal-endlicher Cayley-Graph von G und einem endlichen Erzeugendensystem S. Sei $k > 0$. Dann ist H *k-quasi-konvex*, wenn jeder geodätische Weg in Γ mit Endecken in H in der K-Nachbarschaft von H liegt. Sie ist *quasi-konvex*, wenn sie ℓ-quasi-konvex für ein $\ell > 0$ ist.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass quasi-konvexe Untergruppen hyperbolischer Gruppen wieder hyperbolisch sind.

Lemma 5.4.1. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und sei H eine quasi-konvexe Untergruppe von G. Dann ist H endlich erzeugt und die kanonische Abbildung $H \to G$ ist eine quasi-isometrische Einbettung.*

Beweis. Sei Γ ein lokal-endlicher Cayley-Graph und sei $k > 0$, sodass H k-quasi-konvex für diesen Cayley-Graphen ist. Sei S die Menge aller elemente von H, die Abstand höchstens $2k+1$ zu 1 in Γ haben.

Sei $P = x_0 \dots x_n$ ein geodätischer Weg zwischen 1 und $h \in H$ in Γ. Für jedes x_i existiert ein $y_i \in H$ mit $d(x_i, y_i) \leq k$. Daher gilt $d(y_i, y_{i+1}) \leq 2k+1$. Wir nehmen an, dass $y_0 = 1$ und $y_n = h$ gelten. Dann ist $y_0 y_1 \dots y_n$ ein Weg im Cayley-Graphen von H und S, was zeigt, dass S tatsächlich ein Erzeugendensystem von H ist.

Nach Konstruktion gilt

$$\frac{1}{2k+1} d(a,b) \leq d_S(a,b) \leq d(a,b).$$

Daher ist die kanonische Einbettung von H nach G eine quasi-isometrische Einbettung. □

Lemma 5.4.2. *Sei H eine endlich erzeugte Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe G. Genau dann ist H quasi-konvex, wenn die kanonische Einbettung $H \to G$ eine quasi-isometrische Einbettung ist.*

Beweis. Wenn H quasi-konvex in G ist, dann impliziert Lemma 5.4.1, dass die canonische einbettung eine quasi-isometrische Einbettung ist. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass die kanonische Einbettung $\varphi \colon H \to G$ eine quasi-isometrische Einbettung ist. Sei P ein geodätischer Weg im Cayley-Graphen Δ von H bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems S_H von H. Dann definiert sein φ-Bild einen quasi-geodätischen Weg Q im Cayley-Graph Γ von G und einem endlichen Erzeugendensystem S_G von G nach Lemma 5.1.5. Somit impliziert Proposition 5.1.4 die Existenz einer Konstante κ, die nur von der hyperbolischen Konstante und der Konstante für die Quasi-Isometrie abhängt, sodass jeder Weg in Γ mit den gleichen Anfangs- und Endecken wie Q in der κ-Nachbarschaft von Q liegt. Daher ist H quasi-konvex. □

Korollar 5.4.3. *Jede quasi-konvex Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe ist hyperbolisch.*

Beweis. Sei H eine quasi-konvexe Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe G. Dann ist H endlich erzeugt nach Lemma 5.4.1 und die kanonische Einbettung $H \to G$ ist eine quasi-isometrische Einbettung. Dann impliziert Proposition 5.1.6, dass H hyperbolisch ist. □

Proposition 5.4.4. *Sei G entweder ein freies Produkt mit Amalgamation oder eine HNN-Erweiterung von endlich erzeugten Gruppen über endlichen Untergruppen. Dann sind die Faktoren quasi-konvex in G.*

Beweis. Offenbar ist auch G endlich erzeugt. Zuerst sei $G = A *_C B$, wobei C endlich ist. Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G, das aus genau den Elementen eines endlichen Erzeugendensystems für A und eines für B besteht. Sei Γ der Cayley-Graph von G und S. Sei P ein gedätischer Weg in Γ, dessen Endecken in A liegen. Sei ℓ die größte Entfernung in Γ zwischen Ecken aus C. Jedes Mal, wenn P die Eckenmenge A durch eine Nebenklasse von C verlässt, muss es durch die gleiche Nebenklasse wieder nach A reinkommen. (Dies folgt aus der Existenz von Normalformen.) Die letzte Ecke, bevor der Weg A verlässt und die erste Eckebeim Wiedereintritt nach A haben also Abstand höchstens ℓ. Daher hat jede Ecke aus P höchstens den Abstand $\ell/2$ zu A.

Ein ähnliches Argument gilt in dem Fall einer HNN-Erweiterung. □

Jetzt werden wir einen Satz beweisen, der ein Analogon von Satz 3.4.6 für freie Gruppen von beliebigem endlichen Rang ist.

Satz 5.4.5. *Genau dann ist eine endlich erzeugte Gruppe quasi-isometrisch zu einer endlich erzeugten freien Gruppe, wenn sie eine endlich erzeugte freie Gruppe als Untergruppe mit endlichem Index hat.*

Beweis. Beachte, dass wir nach Satz 3.4.6 annehmen dürfen, dass die involvierten freien Gruppen Rang mindestens 2 haben. Die Rückrichtung folgt aus Korollar 3.2.3. Also nehmen wir an, dass G eine endlich erzeugte Gruppe ist, die quasi-isometrisch zu einer endlich erzeugte freien Gruppe ist. Da freie Gruppen vom Rang mindestens 2 unendlich viele Enden haben, hat auch G unendlich viele Enden und wir können Satz 4.7.1 anwenden. Freie Gruppen sind hyperbolisch und damit ist G nach Korollar 5.1.7 auch hyperbolisch. Weil hyperbolische Gruppen endlich präsentiert sind (Satz 5.1.10), sind sie nach Satz 4.7.6 erreichbar und wir können G als freie Produkte mit Amalgamation und HNN-Erweiterungen über endlichen Gruppen schreiben, sodass die Faktoren höchstens ein Ende haben (Proposition **??**), oder äquivalent als Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen mit endlichem Graphen, endlichen Kantengruppen und Eckengruppen, die höchstens ein Ende haben. Nach Proposition5.4.4 sind die Faktoren quasi-konvex in G und daher hyperbolisch nach Korollar 5.4.3.

Beachte, dass die Enden von G mit seinen hyperbolischen Randpunkten im wesentlichen übereinstimmen: es gibt eine natürliche Bijektion zwischen ihnen. Daher hat jede Eckengruppe maximal einen hyperbolischen Randpunkt und somit nach Satz 5.3.7 keinen. Also sind alle Eckengruppen endlich. Also betrachten wir gerade einen endlichen Graphen von Gruppen mit endlichen Eckengruppen (und endlichen Kantengruppen). Aus der Übung wissen wir, dass dessen Fundamentalgruppe eine freie Untergruppe von endlichem Index hat. Gemäß Korollar 3.2.4 ist diese freie Gruppe endlich erzeugt. □

Literaturverzeichnis

[1] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Algebra **89** (1993), 3–47.

[2] G. Baumslag, *Topics in Combinatorial Group Theory*, Birkäuser Verlag, Basel, 1993.

[3] W. Dicks & M.J. Dunwoody, *Groups acting on graphs* Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] P. de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, University of Chicago Press, Chicago, 2000.

[5] C. Löh, *Geometric Group Theory. An Introduction*, Spinger, Cham, 2017.

[6] R.C. Lyndon & P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[7] J. Meier, *Groups, Graphs and Trees. An introduction to the Geometry of Infinite Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[8] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.