
Übungen zur Gruppentheorie

Blatt 7

Aufgabe 1: Sei G eine p -separable Gruppe. Die p -Länge $\ell_p(G)$ von G ist rekursiv definiert durch

$$\ell_p(G) := 0, \text{ falls } G = O_{p'}(G), \text{ und}$$

$$\ell_p(G) := 1 + \ell_p(G/O_{p',p}(G)), \text{ falls } G \neq O_{p'}(G).$$

Zeigen Sie $\ell_p(G) \leq c(P)$ für alle $P \in \text{Syl}_p(G)$, wobei $c(P)$ die kleinstmögliche Länge einer Zentralreihe von P ist.

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$. Zeigen Sie, dass $H \cap S \in \text{Syl}_p(H)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $S \in \text{Syl}_p(G)$ gilt.

Aufgabe 3: Sei H eine auflösbare Untergruppe von G mit $H \cap S \in \text{Syl}_p(H)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $S \in \text{Syl}_p(G)$. Zeigen Sie, dass H subnormal in G ist.

Aufgabe 4: Sei $P \leq Z(G) \leq G$. Zeigen Sie $x^{\tau_{G \rightarrow P}} = \bar{x}^{|G:P|}$ für alle $x \in G$.

Aufgabe 5: Zeigen Sie $P \cap G' \cap Z(G) = 1$ für jede abelsche Halluntergruppe P von G .

Nur vier der Aufgaben sind verpflichtend.

Besprechung am 13. Juli 2023