
Übungen zur Gruppentheorie

Blatt 6

Aufgabe 1*: Zeigen Sie, dass G auflösbar ist, falls eine der folgenden Aussagen gilt.

- (i) $|G| = p^n q$ für $p, q \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $|G| = pqr$ für $p, q, r \in \mathbb{P}$.

Aufgabe 2: Sei $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass G einen nicht-trivialen Normalteiler hat, dessen Ordnung nicht durch p teilbar ist, falls $G/\Phi(G)$ einen solchen hat.

Aufgabe 3: Sei \mathcal{C} die Klasse aller Gruppen H mit

$$C_H(F(H)) \leq F(H).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) $O_{\mathcal{C}}(G) \in \mathcal{C}$ und $G/O_{\mathcal{C}}(G) \in \mathcal{C}$.
- (ii) Sei $N \trianglelefteq G$. Sind N und G/N in \mathcal{C} , so ist auch G in \mathcal{C} .

Aufgabe 4*: Zeigen Sie die folgenden Gleichungen.

- (i) $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$
- (ii) $\widehat{\Pi} = \Pi$

Aufgabe 5: Sei G p -separabel für einen Primteiler p von $|G|$. Für alle weiteren Primteiler q von $|G|$ und $S \in \text{Syl}_q(G)$ gelte

$$\text{Syl}_p(N_G(S)) \subseteq \text{Syl}_p(G).$$

Zeigen Sie $G = O_{p'p}(G)$.

Nur vier der Aufgaben sind verpflichtend.

* Dies ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Besprechung am 29. Juni 2023