Übungen zur Gruppentheorie

Blatt 1

Für eine Gruppe G und $g \in G$ sei $C_G(g) := \{h \in G \mid gh = hg\}$ der **Zentralisator** von g und $Z(G) := \{h \in G \mid hh' = h'h \text{ für alle } h' \in G\}$ das **Zentrum** von G .

Aufgabe 1*: Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^n$ für ein $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es sei $|G : C_G(g)| \leq p$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie:

(a) $C_G(g) \trianglelefteq G$ für alle $g \in G$.

(b) $G' \leq Z(G)$.

Aufgabe 2: Sei G eine Gruppe und seien $A, B \leq G$ mit $G = AB$. Gilt $A' = 1 = B'$, so ist G' abelsch.

Aufgabe 3*: Sei G eine Gruppe und L eine maximale Untergruppe von G . Zeigen Sie, dass alle minimalen Normalteiler N von G mit $N \cap L = 1$ isomorph sind.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe und L eine maximale Untergruppe von G , die nicht abelsch ist, aber einfach. Dann existieren in G höchstens zwei minimale Normalteiler.

Aufgabe 5: Sei G eine Gruppe und $p \in \mathbb{P}$ der kleinste Primteiler von $|G|$. Sei $N \trianglelefteq G$ mit $|N| = p$. Dann gilt $N \leq Z(G)$.

Nur vier der Aufgaben sind verpflichtend.

* Dies ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Besprechung am 13. April 2023