

## Übungen zur Graphentheorie

### Bonusblatt 1

**Aufgabe 1:** Sei  $G$  ein bipartiter Graph mit Partition  $\{A, B\}$ , mit  $|A| = |B| =: n$  und mit  $|E(G)| \geq n^2 - (n - 1)$ . Zeigen Sie, dass  $G$  eine Paarung der Größe  $n$  besitzt.

**Aufgabe 2:** Sei  $G$  ein Graph mit  $\alpha(G) \leq k \leq |G|/3$ , wobei  $\alpha(G)$  die Größe einer größten unabhängigen Eckenmenge in  $G$  ist. Zeigen Sie, dass  $G$  einen Kreis der Länge mindestens  $|G|/k$  enthält.

**Aufgabe 3:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei  $V = V_1 \cup V_2$  und  $G_i := G[V_i]$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2).$$

(ii) Sei  $E = E_1 \cup E_2$  und  $G_i := (V, E_i)$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2).$$

Mit diesem Blatt können Bonuspunkte für den ersten Übungsteil gesammelt werden.