

## Übungen zur Graphentheorie

### Blatt 8

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie, ohne Proposition 4.3.1 zu verwenden, dass  $\chi'(G) = d$  für jeden  $d$ -regulären bipartiten Graphen  $G$  gilt.

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie, dass jeder bipartite Graph  $G$  Untergraph eines  $\Delta(G)$ -regulären bipartiten Graphen ist. Nutzen Sie Aufgabe 1, um hieraus Proposition 4.3.1 zu folgern.

**Aufgabe 3\*:** Zeigen Sie, dass es zu jedem Graphen  $G$  ein Polynom  $P_G \in \mathbb{Z}[X]$  von Grad  $|G|$  mit führendem Koeffizienten 1 gibt, sodass  $P_G(k)$  gerade die Anzahl der Eckenfärbungen  $V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  ist.

**Aufgabe 4\*:** Sei  $G$  ein  $d$ -regulärer Graph, der eine Artikulation besitzt. Zeigen Sie  $\chi'(G) = d + 1$ .

**Aufgabe 5<sup>+</sup>:** (2 Punkte) Sei  $G$  ein Graph und  $k \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i)  $\chi(G) \leq k$ .
- (ii)  $G$  hat eine Orientierung, in der kein gerichteter Weg die Länge  $k$  hat.
- (iii)  $G$  hat eine Orientierung wie in (ii) ohne gerichtete Kreise.

*Hinweis:* Die Implikationen (i)  $\leftrightarrow$  (iii)  $\rightarrow$  (ii) sollten leicht fallen. Zeigen Sie (ii)  $\rightarrow$  (i) durch Betrachtung eines maximalen Teilgraphen ohne gerichtete Kreise.

\* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 8. Juni 2015