

---

## Übungen zur Graphentheorie

### Blatt 7

Ein Graph  $G$  heißt *kritisch  $k$ -chromatisch*, wenn  $\chi(G) = k$  und  $\chi(G - v) < k$  für alle  $v \in V$ .

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Jeder kritisch  $k$ -chromatische Graph hat Minimalgrad mindestens  $k - 1$ .
- (ii) Jeder Graph  $G$  hat einen kritisch  $\chi(G)$ -chromatischen Untergraphen.

**Aufgabe 2\*:** Untersuchen Sie die Effizienz des in der Vorlesung vorgestellten Greedy-Algorithmus' für Eckenfärbungen:

- (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem Graphen  $G$  eine Aufzählung der Eckenmenge gibt, sodass der Greedy-Algorithmus genau  $\chi(G)$  Farben verwendet.
- (ii) Geben Sie zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  einen bipartiten Graphen mit  $2n$  Ecken und eine Aufzählung der Ecken an, sodass der Greedy-Algorithmus  $n$  Farben verwendet.

**Aufgabe 3\*:** Sei  $G$  ein Graph und  $k := \chi(G)$ . Zeigen Sie, dass es eine  $k$ -Färbung  $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  gibt, sodass  $G$  einen Weg  $P = v_1 \dots v_k$  mit  $c(v_i) = i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  enthält.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass in einem maximal plättbaren Graphen jede zusätzliche Kante einen  $TK^5$  erzeugt.

**Aufgabe 5+:** (2 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder kritisch  $k$ -chromatische Graph  $(k - 1)$ -kantenzusammenhängend ist.

*Hinweis:* Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und nutzen Sie das Bonusblatt.

Sei  $\{A, B\}$  eine Eckenpartition mit  $|E(A, B)| < k - 1$ . Führen Sie das Problem, die Farbklassen beider Seiten geeignet zu verschmelzen, auf ein Paarungsproblem in einem bipartiten Hilfsgraphen zurück.

\* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.