Dr. Matthias Hamann
Daniel Weißauer

SoSe 2015
11. Mai 2015

Übungen zur Graphentheorie

Blatt 6

Aufgabe 1: Sei G ein ebener Graph mit mindestens drei Ecken und X die Menge aller Ecken von Grad höchstens 5. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{x \in X} (6 - d(x)) \geq \sum_{v \in V} (6 - d(v)) \geq 12.$$

Folgern Sie: Ist $\delta(G) \geq 4$, so gilt $|X| \geq 6$. Ist $\delta(G) \geq 5$, so gibt es mindestens 12 Ecken von Grad 5.

Aufgabe 2*: Sei G ein ebener Graph der Taillenweite $g < \infty$ mit n Ecken. Zeigen Sie

$$|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 3 um hieraus zu schließen, dass jeder 5-reguläre ebene Graph einen Kreis der Länge 4 enthalten muss.

Zum Verständnis der folgenden Aufgabe ist es hilfreich, sich klarzumachen, dass ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er kreuzungsfrei in die *Sphäre* (anstatt in die Ebene) eingebettet werden kann. Man kann beispielsweise durch *stereographische Projektion* Einbettungen von Graphen ineinander überführen, sodass Aussagen über Gebiete (wie Eulers Formel) erhalten bleiben.

Aufgabe 3: Ein Fußball lässt sich als ein in die Sphäre eingebetteter Graph auffassen, sodass die Nähte den Kanten entsprechen und ihre Kreuzungspunkte den Ecken. Dieser Graph ist kubisch, brückenlos und jeder Gebietsrand ist ein Fünf- oder Sechskreis.

Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass jeder ebene kubische brückenlose Graph, dessen Gebietsränder alles Fünf- oder Sechskreise sind, genau k Gebiete hat, die durch einen Fünfkreis berandet sind.

Aufgabe 4*: Es sei G ein ebener Graph mit n Ecken. Zeigen Sie, dass für je drei verschiedene Ecken x, y, z gilt:

$$d(x) + d(y) + d(z) \leq 2n + 2.$$

Aufgabe 5$^+$: *(3 Punkte)* Die Kanten eines ebenen Graphen werden beliebig mit den Farben rot und blau gefärbt. Von jeder Ecke v aus gehen wir im Uhrzeigersinn die dort inzidenten Kanten durch und zählen mit $c(v)$, wie oft sich die Farbe ändert (das heißt, wie viele Paare aufeinanderfolgender Kanten beide Farben aufweisen). Zeigen Sie, dass es eine Ecke v mit $c(v) \leq 2$ gibt.

> *Hinweis:* Begründen Sie zunächst, dass es genügt, ebene Dreiecksgraphen zu betrachten.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 18. Mai 2015