

## Übungen zur Graphentheorie

### Blatt 5

**Aufgabe 1:** Es seien  $G$  ein Graph und  $X, X' \subseteq V(G)$  zwei minimale  $G$ -trennende Eckenmengen. Die Menge  $X$  treffe mindestens zwei Komponenten von  $G - X'$ . Zeigen Sie, dass  $X'$  alle Komponenten von  $G - X$  trifft und  $X$  alle Komponenten von  $G - X'$ .

**Aufgabe 2\*:** Sei  $G$  ein  $k$ -zusammenhängender Graph mit mindestens  $2k$  Ecken. Zeigen Sie, dass je  $k$  Ecken von  $G$  auf einem gemeinsamen Kreis der Länge mindestens  $2k$  liegen.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass es überhaupt einen Kreis gibt, der die gegebenen Ecken enthält.

**Aufgabe 3\*:** Leiten Sie den Satz von König (Satz 1.1.1) aus dem *max-flow min-cut theorem* (Satz 5.2.2 und Korollar 5.2.3) ab.

**Rekonstruktionsproblem:** Gegeben natürliche Zahlen  $z_1, \dots, z_m$  und  $s_1, \dots, s_n$ , finde eine Matrix  $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , sodass die  $z_i$  gerade die Zeilensummen und die  $s_j$  die Spaltensummen von  $A$  sind, oder zeige, dass keine solche Matrix existieren kann.

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie zu gegebenen  $z_1, \dots, z_m, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$  ein Netzwerk und eine Zahl  $r$ , sodass Flüsse der Stärke (mindestens)  $r$  in dem Netzwerk genau den Lösungen des Rekonstruktionsproblems entsprechen.

**Aufgabe 5<sup>+</sup>:** (2 Punkte) Beweisen Sie Korollar 2.3.5 aus dem *max-flow min-cut theorem* (Satz 5.2.2 und Korollar 5.2.3).

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst (ii) und beweisen Sie dann (i) durch geeignete Modifikation des Netzwerks.

\* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.