Dr. Matthias Hamann
Daniel Weißauer SoSe 2015
27. April 2015

---

**Übungen zur Graphentheorie**

**Blatt 4**

**Aufgabe 1*:** Sei $G$ ein bipartiter Graph und $M$ eine Paarung in $G$ mit weniger als der größtmöglichen Anzahl an Kanten. Zeigen Sie, dass $G$ einen Verbesserungsweg zu $M$ enthält. Gilt das auch für nicht-bipartite Graphen?

**Quantitative Version des Satzes von Hall:**
*Sei $G$ ein bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$ und $d \in \mathbb{N}$. Genau dann besitzt $G$ eine Paarung der Größe $|A| - d$, wenn für jede Teilmenge $S$ von $A$ gilt $|N(S)| \geq |S| - d$.*

**Aufgabe 2*:** Leiten Sie jeweils einen der Paarungssätze direkt aus dem anderen ab, *ohne* Induktion, alternierende Wege, etc.:

(i) ... den Satz von Hall aus dem Satz von König,

(ii) ... die quantitative Version des Satzes von Hall aus dem Satz von Hall,

(iii) ... den Satz von König aus der quantitativen Version des Satzes von Hall.

**Aufgabe 3:** Die 52 Spielkarten eines französischen Blattes (13 Zahlenwerte, jeweils in 4 Farben) werden beliebig auf 13 Stapel gleicher Größe verteilt. Zeigen Sie, dass es stets möglich ist, aus jedem Stapel genau eine Karte aufzunehmen, sodass man am Ende alle 13 Zahlenwerte auf der Hand hat.

**Aufgabe 4:** Sei $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass es entweder eine monoton fallende oder eine monoton steigende Teilfolge der Länge $n + 1$ gibt.

**Aufgabe 5$^+$:** *(2 Punkte)* Sei $G$ ein bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$, $\delta(G) \geq 1$ und $d(a) \geq d(b)$ für je zwei Nachbarn $a \in A$, $b \in B$. Zeigen Sie, dass $G$ eine Paarung von $A$ besitzt.

> *Hinweis:* Betrachten Sie eine größte Teilmenge von $A$, die Halls Heiratsbedingung genügt.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 4. Mai 2015