Dr. Matthias Hamann
Daniel Weißauer

SoSe 2015
20. April 2015

Übungen zur Graphentheorie

Blatt 3

Aufgabe 1: Es sei T ein Graph. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) T ist ein Baum.

(ii) Zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg.

(iii) T ist maximal kreisfrei: Für je zwei nicht-benachbarte Ecken x, y von T enthält $T + xy$ einen Kreis.

(iv) T ist minimal zusammenhängend: Für jede Kante $e \in E(T)$ ist $T - e$ nicht zusammenhängend.

Aufgabe 2*: Zeigen Sie, dass jeder Graph $G = (V, E)$ einen bipartiten Teilgraphen $H = (V, F)$ besitzt, sodass $d_H(v) \geq d_G(v)/2$ für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 3*: Sei T ein Baum und $\mathcal{T}$ eine Familie von Teilbäumen von T. Zeigen Sie:

(i) Wenn je zwei Elemente von $\mathcal{T}$ nicht-leeren Schnitt haben, so ist $\bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset$.

(ii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Entweder enthält $\mathcal{T}$ eine Familie von k disjunkten Teilbäumen oder es gibt eine Menge von weniger als k Ecken, die von jedem Baum aus $\mathcal{T}$ eine Ecke enthält.

Eine *Orientierung* weist jeder Kante xy eines Graphen eine Richtung $\overrightarrow{xy}$ („von x nach y") oder $\overleftarrow{xy}$ („von y nach x") zu. Ein Weg $x_1x_2 \ldots x_k$ heißt dann *gerichtet*, wenn jede Kante x_ix_{i+1} von x_i nach x_{i+1} zeigt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann 2-kantenzusammenhängend ist, wenn es eine Orientierung gibt, sodass es zwischen je zwei Ecken v, w einen gerichteten Weg von v nach w und einen von w nach v gibt.

Aufgabe 5$^+$: *(2 Punkte)* Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit Minimalgrad mindestens $2k$ einen $(k+1)$-kantenzusammenhängenden Teilgraphen enthält.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 27. April 2013