

## Übungen zur Graphentheorie

### Blatt 1

**Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass es in jedem Graphen zwei Ecken  $u$  und  $v$  gleichen Grades gibt, also mit  $d(u) = d(v)$ .

*Hinweis:* Welche Werte kann die Gradfunktion  $d$  annehmen?

**Aufgabe 2\*:** Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $X \subseteq V(G)$  eine Menge von  $k \geq 2$  Ecken, die jeweils paarweise Abstand mindestens  $\ell$  voneinander haben. Ziel ist es,  $X$  durch Hinzunahme möglichst weniger zusätzlicher Ecken zu verbinden, d. h. wir suchen einen kleinstmöglichen zusammenhängenden Teilgraphen  $H$  von  $G$  mit  $X \subseteq V(H)$ . Wie viele Ecken muss  $H$  mindestens enthalten? Bestimmen Sie die bestmögliche Schranke in Abhängigkeit von  $k$  und  $\ell$ . Beweisen Sie die Optimalität Ihrer Schranke durch Angabe einer unendlichen Familie von Beispielen.

*Hinweis:* Betrachten Sie für geeignetes  $j$  die Mengen

$$B_j(x) = \{v \in V \mid d(x, v) \leq j\}$$

und beachten Sie gegebenenfalls die Parität von  $\ell$ .

**Aufgabe 3<sup>+</sup>:** (2 Punkte) Beweisen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph  $G$  einen Weg der Länge  $\min\{2\delta(G), |G| - 1\}$  enthält.

*Hinweis:* Betrachten Sie einen längsten Weg in  $G$  und die Nachbarn der Endecken.

\* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 13. April 2013