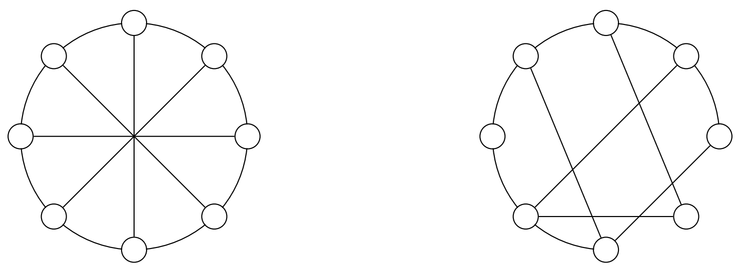
Dr. Matthias Hamann WS 2015/16
Dr. Max Pitz zum 11. Dezember 2015

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 9

Aufgabe 1$^-$: Leite die Aussage $(*)$ aus dem ersten Beweis von Satz 7.3.1. aus der Aussage des Satzes her (d.h. zeige, dass $(*)$ nur formal stärker ist als der Satz selbst).

Aufgabe 2: Beweise oder widerlege: G_i ist ein Ramseygraph für P^3 (den Weg mit 3 Kanten).



G_1 G_2

Aufgabe 3: Zeige, dass es zu je zwei Graphen H_1, H_2 einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ gibt mit der Eigenschaft, dass G zu jeder *Ecken*färbung mit den Farben 1 und 2 einen induzierten H_1 der Farbe 1 oder einen induzierten H_2 der Farbe 2 enthält.

Aufgabe 4: Zeige, dass ein bipartiter Graph $G = (A \cup B, E)$ mit Dichte d genau dann ϵ-regulär ist, wenn für alle $X \subset A$ und $Y \subset B$ mit $|X| = \lceil \epsilon |A| \rceil$ und $|Y| = \lceil \epsilon |B| \rceil$ gilt, dass $|d(X,Y) - d| \leq \epsilon$.

Aufgabe 5: Zeige: *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graphen mit mindestens N Ecken gilt: Wenn sich die Kantenmenge von G in mindestens ϵn^2 kantendisjunkte Dreiecke partitionieren lässt, dann enthält G ein $(6,3)$-Tripel.* Dabei ist ein $(6,3)$-Tripel der Graph auf 6 Ecken, dessen Kanten die Vereinigung von drei kantendisjunkten Dreiecken sind.

> *Hinweis:* Finde ein Dreieck im Regularitätsgraphen R von G und benutze Lemma 6.4.3.

Aufgabe 6$^+$: Der Satz von Roth besagt, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $n \geq N$ gilt: Jede Teilmenge $A \subset [n]$ mit $|A| \geq \epsilon n$ enthält eine 3-arithmetische Progression.

Beweise den Satz von Roth mithilfe von Aufgabe 5: Finde ein $(6,3)$-Tripel in dem Graphen $G = (X \cup Y \cup Z, E)$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_{3n}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$ und $Z = \{z_1, \ldots, z_{3n}\}$. Dabei induziere $\{x_i, y_j, z_k\}$ ein Dreieck in G, wenn $k - j = j - i \in A$ gilt.