Dr. Matthias Hamann
Dr. Max Pitz

WS 2015/16
zum 4. Dezember 2015

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 8

Aufgabe 1^{-}: Es sei $0 < \epsilon \leq 1$. Zeige, dass ein bipartiter Graph (A, B) mit $\leq \epsilon^3 |A||B|$ Kanten ϵ-regulär ist.

Aufgabe 2: Es sei $G_n = (A_n, B_n)$ bipartite Graphen mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und Kantenmenge $\{a_i b_j : i < j\}$. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben.

(i) Finde ein $M \geq 2$ und für all hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ eine explizite ϵ-reguläre Partition von G_n mit M Partitionsklassen.

(ii) Gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass jedes G_n eine ϵ-reguläre Partition mit M Partitionsklassen besitzt, in dem jedes Paar ϵ-regulär ist?

Aufgabe 3: (i) Zeige, dass das Regularitätslemma (wie formuliert in der Vorlesung) bereits aus der Annahme folgt, dass es für gegebene $\epsilon > 0$ and $m \geq 1$ für alle Graphen der Ordnung mindestens $\geq N = N(\epsilon, m)$ gilt.

(ii) Beweise das Regularitätslemma für nicht-dichte Graphen, d.h. für jede Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Graphen der Ordnung n mit $|G_n|/n^2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4: Zeige, dass für jedes $\gamma > 0$ ein $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ und ϵ-reguläre Partition $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ von G mit $k \geq m$ die Anzahl der Kanten mit einem Ende in V_0 oder beiden Enden im gleichen V_i wie folgt beschränkt ist:

$$||V_0, V \setminus V_0|| + \sum_{i=0}^{k} ||V_i, V_i|| < \gamma n^2.$$

Aufgabe 5*: Es seien $d > 2\epsilon > 0$. Zeige, dass ein $\eta > 0$ existiert, so dass jeder tripartite Graph (X_1, X_2, X_3), in dem jedes Paar (X_i, X_j) ϵ-regulär mit Dichte d ist, mindestens $\eta |X_1||X_2||X_3|$ Dreiecke enthält.

Aufgabe 6^{+}: Zeige, dass für jedes $\eta > 0$ ein $c > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren, so dass jeder Graph der Ordnung $n > N$, der höchstens cn^3 Dreiecke enthält, dreiecksfrei gemacht werden kann durch Löschen von höchstens $\eta \binom{n}{2}$ Kanten.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 4. Dezember 2015