Dr. Matthias Hamann
Max Pitz

WS 2015/16
zum 6. November 2015

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 4

Aufgabe 1: Für kubische Graphen stellt Lemma 1.3.1 eine erhebliche Verschärfung des Satzes von Erdős und Pósa dar (da man in jedem Graphen der Ordnung $< s_k$ sicher all seine Kreise durch $< s_k$ Ecken treffen kann). Existiert allgemeiner eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit Minimalgrad ≥ 3 und mindestens $g(k)$ Ecken k disjunkte Kreise enthält (für alle $k \in \mathbb{N}$)?

Aufgabe 2$^+$: Beweise die Kantenversion des Satzes von Erdős und Pósa (1.3.2): es existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, für die zu jedem $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph entweder k kantendisjunkte Kreise enthält oder eine Menge von höchstens $g(k)$ Kanten, die alle Kreise des Graphen überdeckt.

> *Hinweis:* Betrachte in jeder Komponente einen normalen Spannbaum T. Angenommen, für viele Sehnen xy mit $x <_T y$ treffen sich die Wege xTy paarweise in mindestens einer Kante. Finde entweder viele solche Ecken x, deren Partnerecken y übereinstimmen, oder eine Ecke in T, über der viele unvergleichbare y liegen, oder einen langen aufsteigenden Weg in T, deren größte Ecke t_y auf xTy für viele y verschieden ist. Finde dann eine lange Folge $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ von zu diesen y gehörigen Partnerecken x,und viele kantendisjunkte Kreise in der Vereinigung der Wege x_iTy_i zusammen mit den Sehnen x_iy_i.

Aufgabe 3: Die Rundflüsse auf einem Graphen mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ bilden in natürlicher Weise nicht nur eine Gruppe, sondern einen $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum. Zu welchem Raum aus Kapitel 0.9 ist er isomorph? Benenne einen Isomorphismus explizit.

Aufgabe 4: Es sei H eine abelsche Gruppe, $G = (V, E)$ ein Graph, T ein Spannbaum, und f eine (F1) erfüllende Abbildung von der Menge der Orientierungen der Kanten in $E \setminus E(T)$ nach H. Zeige, dass f eindeutig zu einem Rundfluss auf G mit Werten in H fortsetzbar ist.

> *Hinweis:* Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachte Fundamentalschnitte.

Aufgabe 5: (Fortsetzung der vorigen Übung) Es sei $\mathcal{V}_H = \mathcal{V}_H(G)$ die Gruppe aller Abbildungen $V \to H$ und $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_H(G)$ die Gruppe aller (F1) erfüllenden Abbildungen $\vec{E} \to H$, jeweils mit punktweiser Addition. Jedes $\varphi \in \mathcal{V}_H$ definiert ein $\psi \in \mathcal{E}_H$ durch $\psi(e, x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$.

(i) Zeige, dass diese ψ eine Untergruppe $\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_H(G)$ von $\mathcal{E}_H$ mit $\mathcal{D}_H = \{\, \psi \in \mathcal{E}_H \mid \psi(\vec{C}) = 0 \text{ für jeden orientierten Kreis } C \subseteq G \,\}$ bilden.

(ii) Zeige, dass jede (F1) erfüllende Abbildung $\vec{E}(T) \to H$ eindeutig zu einer Abbildung in $\mathcal{D}_H$ fortsetzbar ist.