Dr. Matthias Hamann
Max Pitz

WS 2015/16
zum 30. Oktober 2015

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 3

Aufgabe 1: Finde einen zusammenhängenden Graphen, der zwei nicht-isomorphe kombinatorische Duale hat. Wer findet ein 2-zusammenhängendes Beispiel?

Aufgabe 2: Zeige die folgenden Aussagen über duale ebene Graphen G, G^*:

(i) Ist G zusammenhängend, so ist auch G^* zusammenhängend.

(ii) Ist G 2-zusammenhängend, so ist auch G^* 2-zusammenhängend.

(iii) Ist G 3-zusammenhängend, so ist auch G^* 3-zusammenhängend.

(iv) Ist G 4-zusammenhängend, so ist G^* nicht notwendig 4-zusammenhängend.

Aufgabe 3$^+$: Es sei G^* kombinatorisch dual zu G und $e = e^*$ eine Kante. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) G^*/e^* ist kombinatorisch dual zu $G - e$.

(ii) $G^* - e^*$ ist kombinatorisch dual zu G/e.

Hinweis: Wie sieht die Situation in der Ebene aus? Für die Beweise verwende kombinatorische Duale direkt; die Graphen müssen ja nicht zusammenhängend sein. Bei (ii) zeige geeignete Inklusionen statt Gleichheiten.

Eine Familie von Kreisen in einem Graphen G ist eine *doppelte Kreisüberdeckung* von G, wenn jede Kante von G auf genau zweien dieser Kreise liegt.

Aufgabe 4: Der Zyklenraum eines 2-zusammenhängenden Graphen G sei erzeugt durch eine schlichte Menge B von Kreisen. Zeige (ohne MacLane), dass B zu einer doppelten Kreisüberdeckung D von G ergänzbar ist.

Aufgabe 5: Finde den Fehler in dem folgenden kurzen "Beweis" von Satz 1.4.1. Eine Partition heiße *nicht-trivial*, wenn sie mindestens zwei Klassen hat und nicht jede Klasse nur ein Element enthält. Wir zeigen mit Induktion nach $|V| + |E|$, dass ein Graph $G = (V, E)$ stets k kantendisjunkte Spannbäume hat, wenn jede nicht-triviale Partition von V (in, sagen wir, r Klassen) mindestens $k(r-1)$ Partitionskanten hat. Der Induktionsanfang ist trivial mit $G = K^1$, wenn wir k Exemplare von K^1 als Familie kantendisjunkter Spannbäume von K^1 zulassen. Betrachten wir nun den Induktionsschritt. Hat jede nicht-triviale Partition von V in (sagen wir) r Klassen mehr als $k(r-1)$ Partitionskanten, so löschen wir irgendeine Kante von G und wenden die Induktionsannahme an. Anderenfalls hat V eine nicht-triviale Partition $\{V_1, \dots, V_r\}$ mit genau $k(r-1)$ Partitionskanten. Es sei etwa $|V_1| \geq 2$. Hat $G' := G[V_1]$ nun k disjunkte Spannbäume, so kombinieren wir diese mit den k disjunkten Spannbäumen, die G/V_1 nach Induktionsannahme hat. Nehmen wir daher an, G' habe keine k disjunkten

Spannbäume. Nach Induktionsannahme hat $V(G')$ dann eine nicht-triviale Partition $\{V_1', \ldots, V_s'\}$ mit weniger als $k(s-1)$ Partitionskanten. Dann ist aber $\{V_1', \ldots, V_s', V_2, \ldots, V_r\}$ eine nicht-triviale Eckenpartition von G in $r+s-1$ Klassen mit weniger als $k(r-1)+k(s-1) = k((r+s-1)-1)$ Parititonskanten, ein Widerspruch.