Dr. Matthias Hamann
Dr. Max Pitz

WS 2015/16
zum 22. Januar 2016

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 13

Aufgabe 1: Zeige, dass der Kreis C^n zusammenhängende Baumweite $\lceil n/2 \rceil$ hat.

Aufgabe 2: Beweise rigoros, dass für jeden plättbare Graphen G ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass G ein Minor des $k \times k$-Gitters ist.

Eine *Wegzerlegung* ist eine Baumzerlegung, deren Baum ein Weg ist. Die *Wegbreite* $\mathrm{pw}(G)$ von G ist die geringste Weite einer Wegzerlegung von G. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *Intervallgraph*, wenn es eine Menge $\{ I_v \mid v \in V \}$ reeller Intervalle gibt, so dass genau dann $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ gilt, wenn $uv \in E$ ist.

Aufgabe 3: Zeige, dass ein Graph genau dann eine Wegzerlegung in sämtlich vollständige Teile besitzt, wenn er isomorph zu einem Intervallgraphen ist.

Aufgabe 4: Zeige das folgende Analogon zu Proposition 10.3.10 für die Wegbreite: für jeden Graphen G ist $\mathrm{pw}(G) + 1$ gleich der geringsten Cliquenzahl eines Intervallgraphen $H \supseteq G$.

Aufgabe 5: Zwei Teilungen $\{U_1, U_2\}$ und $\{W_1, W_2\}$ von G heißen *geschachtelt*, wenn es $i, j \in \{1, 2\}$ gibt mit $U_i \subseteq W_j$ und $U_{3-i} \supseteq W_{3-j}$.

(i) Zeige, dass die Teilungen $S_e := \{U_1, U_2\}$ in Lemma 10.3.1 für verschiedene Kanten $e = t_1 t_2 \in T$ stets geschachtelt sind.

(ii) Zeige umgekehrt, dass es zu jeder Menge $\mathcal{S}$ geschachtelter Teilungen von G stets eine Baumzerlegung $(\mathcal{V}, T)$ mit $\{ S_e \mid e \in E(T) \} = \mathcal{S}$ gibt.

> *Hinweis:* Für (i) übersetze die Schachtelungsbedingung in eine entsprechende Bedingung an die Komponenten von $T - e$ für die beiden Wahlen der Kante e. Für (ii) definiere entweder die V_t auf geniale Weise direkt, oder verwende Induktion nach $|\mathcal{S}|$ und lösche zum Induktionsschritt eine Teilung (A, B) aus $\mathcal{S}$ mit minimalem A. In der zu $\mathcal{S} \setminus \{\{A, B\}\}$ gehörigen Baumzerlegung füge A als neuen Teil an einen durch Orientierungen wie in Lemma 10.3.4 gefundenen Teil an.

Aufgabe 6$^+$: Haben Bäume unbeschränkte Wegbreite?