Dr. Matthias Hamann
Dr. Max Pitz

WS 2015/16
zum 15. Januar 2016

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 12

Aufgabe 1: Sind die zusammenhängenden endlichen Graphen bereits durch Kontraktion allein (d.h. durch Minorenbildung ohne Kanten- oder Eckenlöschung) wohlquasigeordnet?

Aufgabe 2: Es sei G ein Graph, T eine Menge, und $(V_t)_{t \in T}$ eine Familie von Teilmengen von $V(G)$, die die Bedingungen (T1) und (T2) aus der Definition einer Baumzerlegung erfüllt. Zeige, dass genau dann ein Baum auf T existiert, der (T3) wahr macht, wenn T eine Aufzählung $t_1, \dots, t_n$ hat, bei der es zu jedem $k = 2, \dots, n$ ein $j < k$ gibt mit $V_{t_k} \cap \bigcup_{i<k} V_{t_i} \subseteq V_{t_j}$.

(Die angegebene Bedingung ist in der Praxis meist einfacher zu überprüfen als (T3). Sie ist daher oft nützlich bei der Konstruktion einer Baumzerlegung in eine vorgegebene Menge von Teilen.)

Aufgabe 3: Kann die Baumweite einer Unterteilung eines Graphen G kleiner sein als $\mathrm{tw}(G)$? Kann sie größer sein?

Aufgabe 4: Zeige, dass die Baumweite eines Graphen vom Umfang $k \neq 0$ höchstens $k - 1$ beträgt.

Aufgabe 5: Zeige, dass das $k \times k$-Gitter die Baumweite k hat.

Aufgabe 6*: Erweitere den Satz von Kruskal auf Bäume, deren Ecken mit Farben aus einer wohlquasigeordneten Menge gefärbt sind. Die Ordnung zwischen Bäumen ist definiert wie zuvor, außer dass die Eckeneinbettung jetzt auch die Ordnung der Farben respektieren muss.

Aufgabe 7: Auf einem Graphen G versuchen k Polizeihelikopter einen Räuber r auf einem unendlich schnellen Motorrad zu fangen.

In Runde 0 wählen die Polizisten $C_0 \in [V]^k$, und der Räuber $r_0 \in V \setminus C_0$.

In Runde $i + 1$ wählen die Polizisten $C_{i+1} \in [V]^k$, und der Räuber $r_{i+1} \in V \setminus C_{i+1}$, so dass es einen $r_i - r_{i+1}$-Weg in $G \setminus (C_i \cap C_{i+1})$ gibt. (Intuitiv: Ein Teil der Helikopter fliegt auf ihre neuen Plätze; in der Zwischenzeit kann der Räuber alle Ecken benutzen, auf denen kein Helikopter steht).

Die Polizisten gewinnen, wenn nach einer endlichen Anzahl von Runden der Räuber keine Ecke r_n auswählen kann.

Zeige unter Benutzung des Dualitätssatzes: $tw(G) \leq k$ genau dann, wenn $k + 1$ Helikopter einen Räuber immer fangen können.

Aufgabe 8$^+$: Ist die Klasse $\{\, G \mid G \not\supseteq P^k \,\}$ durch die Teilgraphenrelation wohlquasigeordnet?

> *Hinweis:* Sie ist's. Ein möglicher Beweis verwendet normale Spannbäume und folgt dem Beweis des Satzes von Kruskal.

* Diese Aufgabe ist auch eine schriftliche Aufgabe.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n) am 15. Januar 2016