Dr. Matthias Hamann
Dr. Max Pitz

WS 2015/16
zum 8. Januar 2016

Übungen zur Graphentheorie II

Blatt 11

Aufgabe 1: Auf einer Menge A sei eine Quasiordnung $\leq$ definiert, und für Teilmengen $X \subseteq A$ sei

$$\operatorname{Forb}(X) := \{ a \in A \mid a \not\geq x \text{ für alle } x \in X \}.$$

Zeige, dass $\leq$ genau dann eine Wohlquasiordnung auf A ist, wenn jede unter $\geq$ abgeschlossene Teilmenge B (d.h. jedes $B \subseteq A$ mit $x \leq y \in B \Rightarrow x \in B$) die Form $B = \operatorname{Forb}(X)$ hat für ein endliches $X \subseteq A$.

Aufgabe 2: Beweise Proposition 10.1.1 und Korollar 10.1.2 direkt, ohne den Satz von Ramsey zu benutzen.

Aufgabe 3$^-$: Zeige, dass die endlichen Bäume durch die Teilgraphenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.

Aufgabe 4: Im letzten Schritt des Beweises vom Satz von Kruskal wird bei der topologischen Einbettung von T_m in T_n die Wurzel von T_m auf die Wurzel von T_n abgebildet. Nehmen wir induktiv an, dass auch bei der Einbettung der Bäume aus A_m in die Bäume aus A_n stets Wurzeln auf Wurzeln abgebildet werden, so erhalten wir ganz analog zum Beweis von Kruskal einen Beweis, dass die endlichen Wurzelbäume durch die Teilgraphenrelation (bei Abbildung von Wurzeln auf Wurzeln) wohlquasigeordnet sind. Wo liegt der Fehler?

Aufgabe 5: Schwäche die Minorenrelation ab durch Verzicht auf die Forderung, dass Verzweigungsmengen zusammenhängend sein müssen. Zeige, dass die endlichen Graphen durch diese Relation wohlquasigeordnet sind.

Aufgabe 6: Zeige, dass für $n \geq 3$ der K^n, der C^n, jeder Baum der Ordnung n, und das $(n \times n)$-Gitter Baumzerlegungen der Weiten $n-1$, 2, 1 und n haben. Für K^n und C^n zeige auch umgekehrt, dass dies bestmöglich ist, dh. dass $\operatorname{tw}(K^n) = n-1$ ist und $\operatorname{tw}(C^n) = 2$.

> *Hinweis:* Der C^n hat eine Baumzerlegungen der Weite 2, bei der keine Ecke in mehr als zwei Teilen liegt. Diese Zerlegung eignet sich für eine Verallgemeinerung zu einer guten Zerlegung des Gitters. Dass K^n und C^n keine Baumzerlegungen geringerer Weite haben ist nicht so trivial, wie es auf den ersten Blick aussieht. Lemma 10.3.1 hilft bei einem genauen Beweis.

******Freiwillige Ferienaufgaben******

Aufgabe 7$^+$: Zeige, dass die endlichen Graphen durch die topologische Minorenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.

Aufgabe 8$^+$: Betrachte die Graphen G, für die bei jedem Untergraphen $H \subseteq G$ jede maximale unabhängige Eckenmenge von H jeden maximalen vollständigen Teilgraphen von H trifft.

(i) Zeige, dass diese Graphen G perfekt sind.

(ii) Zeige, dass diese Graphen G genau die Graphen sind, die keinen P^3 als Untergraphen enthalten.

> *Hinweis:* Für (ii) nehmen wir an, G enthalte keinen P^3, aber in einem Untergraphen H gebe es eine maximale unabhängige Eckenmenge A und einen dazu disjunkten maximalen vollständigen Teilgraphen K. Zu jeder Ecke von K betrachte die Menge ihrer Nachbarn in A. Wie schneiden diese Nachbarmengen einander? Gibt es unter ihnen eine kleinste?

Aufgabe 9$^+$: Beweise den Satz von Roth auf eine ähnliche Weise wie in Aufgabe 9.6, aber diesmal mithilfe des Resultats aus Aufgabe 8.6 anstatt 9.5.

Aufgabe 10$^+$: Zeige: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graphen mit $|G| \geq N$ gilt: Falls $E(G)$ die Vereinigung von n induzierten Matchings ist, so gilt $|E(G)| < \epsilon n^2$.

Aufgabe 11^{++} (Offenes Problem): Beweise oder widerlege: Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Graph G hat genau dann eine Baumzerlegung, in der jeder Teil in einer zusammenhängenden Menge der Größe höchstens k liegt, wenn jedes Netz von G einen zusammenhängenden Überdecker der Größe höchstens k hat.