ÜBERRASCHENDE EIGENSCHAFTEN DER SYMPLEKTISCHEN FORM UND UNTERSCHIED ZUM VOLUMEN

Wir wissen schon: Ein Hamilton-Fluss auf einer Mannigfaltigkeit läßt die symplektische Form invariant. Wir wissen auch, dass damit das Volumen invariant bleibt, denn die Volumenform ist

$$\mathrm{d}Vol = \omega \wedge \cdots \wedge \omega.$$

Es gilt allgemein: Wenn ein Diffeomorphismus f (nicht notwendigerweise von einem Hamilton-Fluss kommend) die symplektische Form ω invariant läßt, dann läßt f auch die Volumenform invariant. In Dimension 2 gilt auch die Rückrichtung, in Dimension $2n$ $n \geq 1$ nicht. Wir fragen uns:

> Welche konkreten geometrischen Größen werden von der symplektischen Form außerdem invariant gelassen?

Hierzu zwei Probleme, die Licht auf diese Frage werfen:

Problem 0.1. Sei $K_r = B_r(0)$ der (offene) Ball von Radius r im $\mathbb{R}^{2n}$. Sei

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times \mathbb{R}^{2n-2}$$

der Zylinder mit Radius 1. Gibt es einen Diffeomorphismus

$$f : K_r \to Z$$

mit der Eigenschaft $f^*\omega = \omega$? D.h. läßt sich der Ball so in den Zylinder abbilden, dass die symplektische Form dabei unverändert bleibt?

Für $r \leq 1$ ist das ganz leicht: $f =$Identität. Für $r > 1$ ist nicht offensichtlich, ob es funktioniert oder nicht. Es stellt sich überraschenderweise heraus: Das Problem ist unlösbar, d.h. so ein f existiert nicht, auch für r beliebig wenig größer als 1.

Das ist ein überraschender Kontrast zum "nur volumenerhaltenden Fall". D.h., wenn wir dasselbe Problem so umformulieren, dass wir die Bedingung $f^*\omega = \omega$ ersetzen durch $f^*dVol = dVol$, dann ist das Problem leicht lösbar. Denn wir können z.B. in jeder Koordinatenrichtung außer der letzten mit beliebigen Faktoren multiplizieren, und in der letzten Koordinate wählen wir den Faktor so, dass das Produkt 1 ist.

Problem 0.2. Sei K_r wie vorhin die Kugel von Radius r im $\mathbb{R}^{2n}$, sei

$$W = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 = 0\} \setminus B_1^{\mathbb{R}^{2n}}(0)$$

eine "Wand" mit runder Öffnung von Radius 1. Läßt sich die Kugel K_r stetig von der linken Halbebene

$$E_{\text{links}} := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 < 0\}$$

in die rechte Halbebene

$$E_{\text{rechts}} := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 > 0\}$$

fließen, so dass dabei ω unverändert bleibt? D.h. gibt es eine Familie von Diffeomorphismen $(f_t)_{t\in[0,1]}$ mit $f_t : K_r \to \mathbb{R}^{2n}$, die stetig in t ist, mit $(f_t)^*\omega = \omega \ \forall t \in [0,1]$, so dass gilt:

$$f_0(K_r) \subset E_{\text{links}}, \quad f_1(K_r) \subset E_{\text{rechts}}?$$

Hierbei muss $(f_t)_t$ nicht notwendigerweise ein Fluss sein, der für alle $t \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, sondern es reicht $t \in [0,1]$.

Dieses Problem heißt *Problem des symplektischen Kamels*, welches sich durch ein Nadelöhr zwingen will. Wobei unser Nadelöhr recht großzügig gewählt ist.

Wieder ist die Lösung für $r \leq 1$ trivial: Eine Kugel von Radius ≤ 1 läßt sich ganz einfach (durch Euklidische Translationen) durch dieses Loch in der Wand bewegen.

Wir erkennen schnell, dass dieses zweite Problem leichter ist als das erste. Eine Lösung des ersten Problems würde das zweite lösen, denn der Zylinder passt durch die Öffnung in der Wand, und im Zylinder läßt sich alles translatieren. Aber es gibt ja keine Lösung für das erste Problem. Für das zweite stellt sich letztlich heraus, dass es da auch keine Lösung gibt. Wieder ist das im Gegensatz zum nur volumenerhaltenden Fall.

Beweise dieser Unlösbarkeit sind recht schwer. Sie kommen aus einem Gebiet namens *symplektische Topologie*.