(1)

Mannigfaltigkeit

Eine differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist ein hausdorffscher topologischer Raum zusammen mit einer Familie von Homöomorphismen

$$\varphi_i : M \supset V_i \longrightarrow \varphi_i(V_i) \subset \mathbb{R}^n$$

mit den Eigenschaften

(1) $\bigcup_i V_i = M$ (die offenen Mengen V_i überdecken M)

(2) Die Kartenwechsel für $V_i \cap V_j = V_{ij} \neq \emptyset$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{V_{ij}} : \varphi_j(V_{ij}) \longrightarrow \varphi_i(V_{ij})$$

sind glatte Abbildungen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$.

Die φ_i heißen lokale Karten auf M und die V_i sind die zugehörigen Kartengebiete.

Koordinatensystem

Die Funktionen $u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

$$p \mapsto p_i$$

heißen die kanonischen Koordinaten des $\mathbb{R}^n$. Für jede Karte φ einer C^∞-Mannigfaltigkeit M mit Dimension n definiere auf dem Kartengebiet V von φ die Funktionen

$$x_i := u_i \circ \varphi : V \to \mathbb{R}, \quad \varphi = (x_1, \dots, x_n).$$

Die x_i heißen lokale Koordinaten auf M.

②

Tangentialraum

Sei φ eine lokale Karte von M in einer offenen Umgebung V von p.

Zwei glatte Kurven

$\gamma, \tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p \in V$

heißen äquivalent, falls

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \tilde{\gamma})(t)$$

Der Tangentenvektor $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$ definiert eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$ und der Raum aller Tangentialvektoren an p ist $T_p M = \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Kurve durch } p \}$

Differential

Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Die lokale Karte φ sei definiert auf einer Umgebung $V \subset N$ von $f(p)$, $p \in M$. Die lineare Abbildung

$$df_p : T_p M \to T_{f(p)} N$$

$$df_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}(\cancel{\varphi \circ} f \circ \gamma)(0)$$

heißt das Differential von f in p.

(3) Wenn $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ eine lokale Karte von M in einer Umgebung V von p ist, dann ist $((e_1)_p, \dots, (e_n)_p)$ die Standard-Basis von T_pM mit

$$(e_i)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi^{-1}(\varphi(p) + t e_i)\right)$$

$$= d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\varphi(p) + t e_i) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i)$$

Es gilt: $\dim T_pM = \dim M$.

Jeder Vektor $v \in T_pM$ hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i (e_i)_p \qquad \text{mit}$$

$$v_i = v(x_i)$$

Beachte, dass $(e_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

T_pM kann aufgefasst werden als $\mathbb{R}^n$, der in seinem Ursprung tangential an M im Punkt p anliegt, wobei $n = \dim M$.

④ Vektorfelder

Ein glattes Vektorfeld Y auf einer Mannigfaltigkeit M ordnet jedem $p \in M$ einen Tangentialvektor $Y_p \in T_p M$ zu.
In lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ in $V \subset M$ hat jedes Vektorfeld eine eindeutige Darstellung
$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i (e_i)_p$ mit $Y_i = Y(x_i) \in C^\infty(V)$.

Eine Integralkurve von Y ist eine glatte Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ mit
$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) = Y_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I.$$
Dies lässt sich schreiben als
$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \dot{\gamma}_i = F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \qquad i = 1, \dots, n$$
wobei $\gamma_i = x_i \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$

$F_i = Y_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Dies ist ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung.
Die F_i sind glatt und Lipschitz-stetig.

Daher folgt mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass es für ein glattes VF Y und $p \in M$ genau eine maximale Integralkurve $\gamma : I \to M$ von Y mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = p$ gibt, wobei $0 \in I \subset \mathbb{R}$.

Der Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ von Y hat folgende Eigenschaften: $(\Omega \subset \mathbb{R} \times M)$

(1) $\varphi_0 = \mathrm{Id}$

(2) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$

wobei $\varphi_t(p)$ die Integralkurve von Y mit $\varphi_0(p) = p$ ist. M ist hier die Menge der Anfangsbedingungen. φ_t ist Lösungsfluss für von Y def. DGL.

Ebenso definiert jeder Fluss φ_t auf M ein Vektorfeld Y auf M durch:

$$Y_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(p).$$

5 ~~6~~

Riemannsche Mannigfaltigkeit

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemannschen Metrik g, welche in jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt auf T_pM definiert, d.h. eine positiv definite symmetrische Bilinearform

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

die differenzierbar von p abhängt.

Also ist $g : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ eine glatte Funktion, wobei X und Y glatte Vektorfelder sind.

g ist eine Metrik im folgenden Sinne:

$$d(p,q) := \inf_{\gamma} \left\{ L(\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to M, \\ \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \end{array} \right\}$$

Dabei durchläuft γ alle Kurven, die p und q verbinden und $L(\gamma)$ ist die Länge von γ:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt = \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt$$

Die Kurve, die lokal (für nah genug beieinander liegende Punkte) die kürzeste Verbindung ist, heißt Geodäte.

Eine Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 nennt man nach der Bogenlänge parametrisiert: $L_\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \cancel{\left|\frac{d}{d\tilde{t}}\gamma(\tilde{t})\right|}\, |\dot{\gamma}(\tilde{t})|\, d\tilde{t} = t - t_0$

Für jede ~~Kurve~~ reguläre Kurve γ existiert eine solche Parametrisierung ($\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t \in I$).

Winkel kann man mittels

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w \rangle_p}{\|v\| \, \|w\|}$$

messen.

Zwei Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}$ mit $p = \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ schneiden sich im Winkel $\alpha = \angle(\dot{\gamma}(t_0), \dot{\tilde{\gamma}}(t_0))$

mit $\cos\alpha = \dfrac{\langle \dot{\gamma}(t_0), \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) \rangle_p}{|\dot{\gamma}(t_0)| \, |\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)|}$

(7) Sei (M,g) kompakte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik.

$UTM = \{(q,v) \mid q \in M, v \in T_qM, \|v\| = 1\}$

ist das Einheitstangentialbündel der Dimension $2 \cdot \dim M - 1$. Die Flüsse

$\varphi_t : UTM \to UTM$, $t \in \mathbb{R}$ heißen Tangentialflüsse und M der Konfigurationsraum vom Fluss φ_t. Mit π bezeichnen wir die natürliche Projektion von UTM auf M:

$\pi(q,v) = q$.

Bestimmte Differentialgleichungen 2. Ordnung auf M induzieren Flüsse, welche auf Tangentialflüsse reduziert werden können.

Sei $$\ddot{q} = f(q,\dot{q})$$

eine DGL 2. Ordnung auf M. Sie induziert auf TM den Fluss

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = f(q,v).$$

Falls dieser Fluss konstante Geschwindigkeit 1 hat, ist es ein Tangentialfluss auf UTM.

Die wichtigste Klasse von Tangentialflüssen sind die geodätischen Flüsse:

Sei UTM das Einheitstangentialbündel über M und $\varphi_t : UTM \to UTM$, $t \in \mathbb{R}$ der Tangentialfluss mit folgenden Eigenschaften: Sei $w = (q, v) \in UTM$, verschiebe q um die Länge t entläng der Geodäten in Richtung von v. Bezeichne diesen Punkt mit q_t und den Einheitsvektor tangential zur Geodäten an q_t mit v_t.
Definiere φ_t durch $\varphi_t(w) := (q_t, v_t)$.
Dann ist φ_t der geodätische Fluss auf M.

Es folgt aus dieser Definition, dass die Menge $\{\pi(\varphi_t(w))\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine Geodäte auf M ist.
Geodätische Flüsse bilden eine wichtige Klasse dynamischer Systeme aufgrund ihrer Anwendung in der Mechanik.
Dazu will ich folgenden Satz beweisen:

(8) SATZ: Durch geeignete Umparametrisierung der Zeitvariablen reduziert sich jedes holonome dynamische System auf einen geodätischen Fluss.

BEWEIS: In der Dynamik heißt ein dynamisches System holonom, g.d.w. der Konfigurationsraum eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit der kinetischen Energie ($= \frac{1}{2} \times$ Riemannsche Metrik)

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} g_q(\dot{q},\dot{q}),\quad q \in M,\ \dot{q} \in T_qM$$

ist und die Bewegung durch die Lagrange-Gleichungen beschrieben wird:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q},\quad L = T - V,$$

wobei $V(q)$ eine skalarwertige Funktion ist, das sogenannte Potenzial.

Der Phasenraum ist das Tangentialbündel TM.

Führe den Vektor

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial T}{\partial \dot q}$ (komponentenweise Differentiation)

ein und betrachte das System in den Koordinaten q, p. Die Komponenten p_i von p, $i = 1, \dots, n$ heißen verallgemeinerte Impulse und werden ausgedrückt durch:

$p_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(q)\, \dot q_j$. Wobei die $g_{ij}(q)$ die Komponenten der Matrix von g in q sind.

p wirkt als Funktional auf dem Raum $T_q M$: $\dot q \longmapsto p^t \dot q = 2T(q, \dot q)$.

Die Lagrange-Gleichungen transformieren in ein System von Hamilton-Gleichungen:

$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, wobei

$H(p, q) = T + V = \frac{1}{2}\, p^t g_q^{-1} p + V$

die Hamilton-Funktion des Systems ist und seine Gesamtenergie beschreibt.

(9) H ist ein erstes Integral (Erhaltungsgröße) des Systems, falls die Bewegung auf der ~~Ni~~ Niveaumenge

$M_h = \{(p,q) \mid H(p,q) = h\}$ stattfindet.

Für die meisten betrachteten Systeme gilt die Energieerhaltung und daher ist diese Annahme legitim.

Entsprechend dem Prinzip der kleinsten Wirkung sind die Lösungskurven gerade diejenigen Kurven, welche das Funktional $\int_a^b p\,dq$ extremalisieren ~~minimalisieren~~, wobei a und b gegebene Punkte auf M_h sind.

Der Raum aller glatten Kurven, die a und b auf M_h verbinden, kann als (Banachraum) aller Vektorfelder auf M_h mit einer Integralkurve, die a und b verbindet, aufgefasst werden. Für jede dieser Kurven γ ~~haben~~ hat das Funktional den Wert

$F(\gamma) = \int_\gamma p\,dq$

Dann erfolgt die Bewegung entlang der Kurven γ, welche kritische Punkte von F sind.
Für jede Kurve γ in M_h mit Parametrisierung $q(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $q(\alpha) = a$, $q(\beta) = b$, gilt:

$$F(\gamma) = \int_\alpha^\beta p^t(t)\dot{q}(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)\right)^t \dot{q}(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta 2T(q(t), \dot{q}(t))\,dt$$

$$= \sqrt{2} \int_\alpha^\beta \sqrt{h - V(q(t))}\sqrt{\dot{q}^t(t)\, g_{q(t)}\, \dot{q}(t)}\,dt,$$

woraus folgt:

$$\int_a^b p\,dq = \sqrt{2} \int_a^b \sqrt{h-V(q)}\sqrt{dq^t g_q\, dq}$$

Definiere eine neue Riemannsche Metrik auf M durch:

$$\tilde{g}_q := (h - V(q))\, g_q, \quad \text{also}$$

$$dq^t \tilde{g}_q\, dq = (h - V(q))\, dq^t g_q\, dq \quad (\tilde{g} \text{ pos. def. auf})$$

Betrachte die Menge $\{q \in M_h \mid h - V(q) \neq 0\}$ $= \{q \in M_h \mid T(q, \dot{q}) > 0\}$, also alle Punkte für die die kinetische Energie größer Null ist.
Beachte, dass die Menge $\{q \in M_h \mid h - V(q)\}$ abgeschlossen ist und jeder Schnitt mit

(10) einer Lösungskurve des Hamilton-Systems eine nirgends dichte Menge ist.
Andererseits würde es ein Zeitintervall geben, in dem $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0$, z. B. $q(t) = \text{const.}$
Mit $q(t)$ Parametrisierung der Kurve γ gilt:

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta |\dot{q}(t)|\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{q}^t_{(t)} \tilde{g}_{q(t)} \dot{q}(t)}\, dt \; .$$

Also hat das Längenelement ds in der neuen Metrik die Form

$$ds^2 = (h - V(q))\, dq^t g_q\, dq$$

Es folgt:

$$F(\gamma) = \int_a^b p\, dq$$

$$= \sqrt{2} \int_a^b \sqrt{h - V(q)} \sqrt{dq^t g_q\, dq}$$

$$= \sqrt{2} \int_a^b ds \, .$$

Dies gilt g.d.w. die Länge der Kurve γ minimal ist (vorausgesetzt a und b liegen hinreichend nah beeinander). !

Da die Lösungskurven in der neuen Metrik gerade die Geodäten sind, erfolgt die Bewegung in der Menge $\{q \in M_n \mid V(q) < h\}$ entlang der Geodäten.

Es gilt: $$h - V(q) = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^t g_q \dot{q}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt}\right)^t g_q \frac{dq}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad dt^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{h - V(q)} dq^t g_q dq$$

$$ds = \sqrt{h - V(q)} \sqrt{dq^t g_q dq}$$
$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{h - V(q)}} \sqrt{dq^t g_q dq}$$

(11) Wir erhalten:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\,(h - V(q)),$$

das bedeutet, dass die Geschwindigkeit entlang der Geodäten (in der neuen Metrik) $\sqrt{2}\,(h - V(q))$ ist.

Führe die neue Zeitvariable τ mit

$d\tau = \sqrt{2}\,(h - V(q))\,dt$ ein.

Dann ergibt sich:

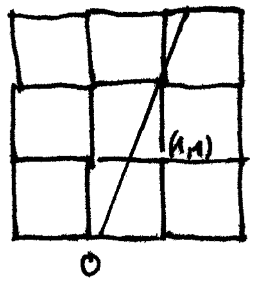
$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{2}\,(h - V(q))\,\frac{1}{\sqrt{2}\,(h - V(q))} = 1.$$

Damit hat das System die Form eines geodätischen Flusses. $\boxtimes$

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes: Jedes holonome System induziert einen geodätischen Fluss. Setzte hierzu $V \equiv 0$ (gleichförmige Bewegung).

(12) Bestimmte Mannigfaltigkeiten lassen sich als kompakter Faktor einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit M und einer diskreten Isometriegruppe Γ auf M auffassen.

Betrachte zunächste den Torus $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Wähle den Fundamentalbereich $[0,1] \times [0,1]$ für $\mathbb{R}^2$ aus:



Im $\mathbb{R}^2$ sind die Geodäten (mit der Standardmetrik) Geraden.

~~Auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$~~

Wenn wir $\mathbb{R}^2$ mit den Einheitsquadraten parkettieren, sieht man, dass die periodischen Orbits ~~auf $\mathbb{T}$~~ des geodätischen Flusses auf $T\mathbb{T}$ dicht liegen. in $\mathbb{T}$.

(Rationale Vektor $\cancel{\;} \in \mathbb{Z}$, dann

$\gamma'(0) = \cancel{p/q} \binom{p}{q}$ und $\gamma(0) = x$, dann

$\gamma($

Im Allgemeinen sieht ein Fundamentalbereich wie folgt aus $D = D_p = \{x \in M \mid d(x,p) \leq d(x,\gamma(p))\ \forall \gamma \in \Gamma\}$ und lässt sich für jeden Punkt $p \in M$ definieren.

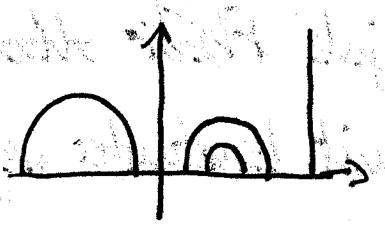
Dies ist der Dirichlet-Bereich.

(13) Dies gilt auch für Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung.

Die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$g_z = g_y = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2}$$

heißt die hyperbolische Ebene. Hier sind Geodäten



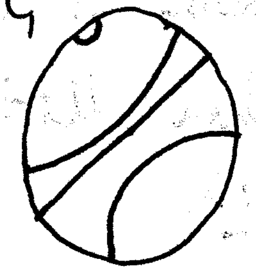
Parallelen zur Imaginärachse und Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse. Dieses Ebene wird mittels

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

auf die Einheitsscheibe abgebildet, welche von $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ berandet wird.

Dabei gilt: $f(i) = 0$ und $f(z) \in S^1$ für $z \in \mathbb{R}$.

Die Metrik wird definiert durch
$\langle v, w \rangle = \langle df^{-1}v, df^{-1}w \rangle$, womit f
eine Isometrie ist, da dies gerade die Metrik
vom Urbild ist. Da f winkelerhalten ist,
sind die Geodäten auf der Poincare-Scheibe:
Die Kreissegmente,
welche das
Bild von $\mathbb{R}$, den



Rand der Scheibe senkrecht schneiden.

Es gilt, dass jede ~~Flach~~ ~~Mannigfaltigkeit~~ Fläche
(orientierbar) mit konstanter negativer Krümmung
ist isometrisch zu einem Faktor
$\Gamma \backslash \mathbb{D}$ von $\mathbb{D}$ einer diskreten Isometrie
gruppe von $\mathbb{D}$.

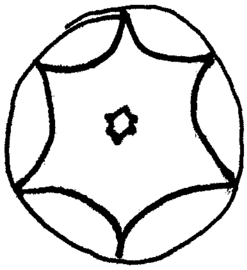
(14) Wie parkettiert man $\mathbb{D}$:

~~bs~~ Für alle regelmäßigen n-Polygone kann man eine Innenwinkelsumme Σ ~~$\Theta <$ $n\pi - 2\pi$~~

$0 < \Sigma < (n-2)\pi$ erzeugen.

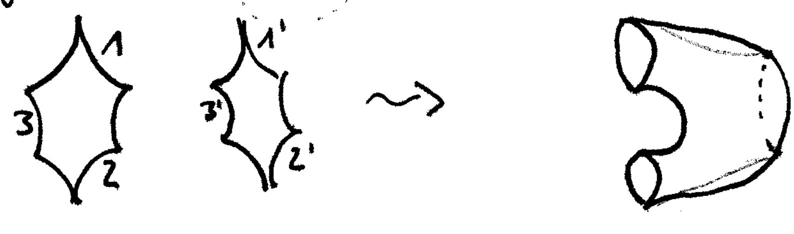
D.h. für $n > 4$ kann man Innenwinkel $\frac{\pi}{2}$ erhalten.

($(n-2)\pi$ ist die Innenwinkel-summe eines Euklidischen n-Ecks.)

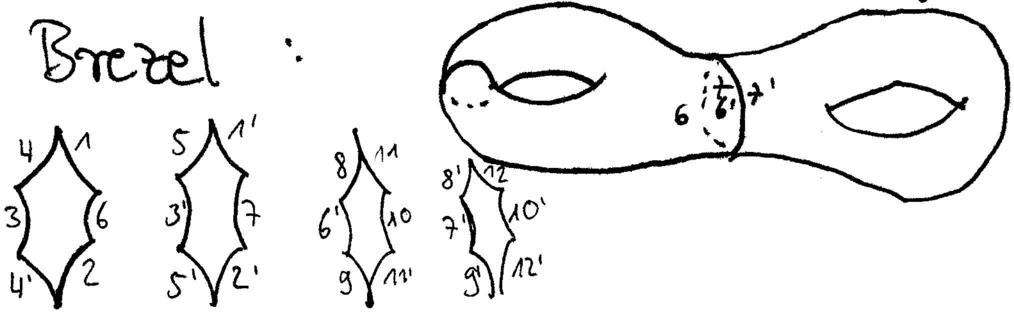


Betrachte Sechsecke:

Wir können ~~jeweils~~ ~~3~~ die Kanten von Sechsecken so verkleben, dass eine sogenannte „Hose" entsteht:



2 „Hosen" – also 4 Sechsecke – geben eine Brezel:



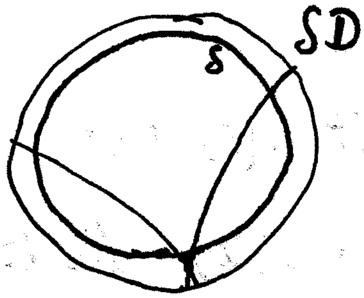
15

SATZ: Sei Γ eine fixpunktfreie diskrete Isometriegruppe von $\mathbb{D}$ mit $M = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ kompakt.
Dann liegen die periodischen Orbits des geodätischen Flusses auf TM dicht in TM.
(also Dichtheit der per. Orbits des geod. Flusses auf allen orientierbaren Flächen konst. neg. Krümmung.).

BEWEIS: Betrachte das Poincaré-Model von $\mathbb{D}$. Sei $v \in TM$ und D Fundamentalbereich von Γ sowie $w \in T\mathbb{D}$ ein Lift von v mit Fusspunkt in D.
Sei c die Geodäte in $\mathbb{D}$ mit $\dot{c}(0) = w$
und seien $x = c(-\infty)$ und $y = c(\infty)$ die Endpunkte von c auf dem Rand der Scheibe.
Wir wollen ein hyperbolisches Element $\gamma \in \Gamma$ finden, dass die Endpunkte von seiner Achse (die Geodäte, die fix bleibt unter γ) in gegebenen kleinen δ-Umgebungen U und V von x und y liegen.

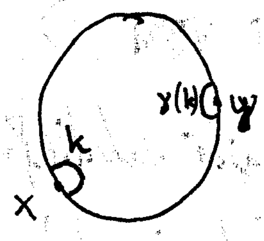
Dann kann man unter den Tangentialvektoren an der Achse von γ einen Vektor finden, der nahe an ω liegt.
Die Projektion von dieser Achse auf M liefert die gewünschte geschlossene Geodäte.
„Also, wenn die Vektoren nah genug beieinander liegen, gehen die Geodäten sehr langsam auseinander."

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass wenn $p \in \mathbb{D}$ in einer δ-Umgebung von $\partial\mathbb{D}$,



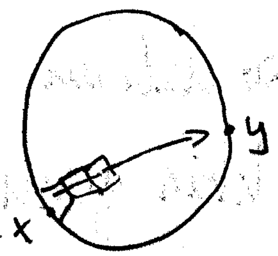
dann haben je zwei beliebige Geodäten durch p mit euklidischer Länge $> \varepsilon$ einen Schnitt-Winkel von höchstens $\frac{\pi}{4}$.

Wir wollen eine Geodäte k konstruieren, deren beiden Endpunkte nah an x liegen, und ein hyperbolisches Element γ finden, das das Bild $\gamma(k)$ eine Geodäte ist, deren Endpunkte nahe an y liegen.



Betrachte die Folge der Bilder von D unter Γ, die c schneiden.

Es existieren Bilder D_1 und D_2 in U und V und ein $\gamma \in \Gamma$ so, dass
$\gamma(D_1) = D_2$ und γ die Ordnung der Folge von Bildern erhält, da γ Isometrie.
$(D_1 = \gamma_1 D,\ D_2 = \gamma_2 D \Rightarrow \gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1})$



Wähle einen Punkt $z \in D_1$, dann gilt: $\gamma(z) \in D_2$.

Es gilt, dass die meisten Geodäten durch z vollständig in U enthalten sind (wenn D_1 von genügend kleiner euklidischer Größe gewählt ist). Da γ winkeltreu ist und das Gleiche für Geodäten durch $\gamma(z)$ gilt, können wir Geodäte k durch z finden, die in U enthalten ist, so dass γk in V enthalten ist.

Da γ die Reihenfolge der Bilder von D erhält, die c überdecken, können wir schließen, dass γ den von k berandeten Bereich in U auf einen von γk berandeten Bereich abbildet, der das Komplement von V enthält. Also hat γ zwei Fixpunkte auf $\delta \mathbb{D}$, jeweils einen in U und V. Daher ist die Achse d von γ gleichmäßig nah an c und hat im Speziellen einen Tangentenvektor so nah an $\dot{c}(0)=w$ wie wir wollen, indem wir δ klein genug wählen.