Variationsrechnung und Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

Bezeichnung 3.1. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{U}$ einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}$ einen zu $\mathcal{U}$ affinen Unterraum.

Definition 3.2. Eine Abbildung $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heisst **Funktional** auf $\mathcal{F}$.

Ein Funktional $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heisst **differenzierbares Funktional** auf $\mathcal{F}$
$:\Longleftrightarrow$ $\exists\ F, R : \mathcal{F} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ so dass

i) $\Phi(f+h) - \Phi(f) = F(f,h) + R(f,h) \quad \forall\ f \in \mathcal{F}, h \in \mathcal{U}$.

ii) $F(f,\cdot)$ ist eine lineare Abbildung für alle $f \in \mathcal{F}$.

iii) $R(f,h) = \mathcal{O}(h^2)$ (d.h. $|h| < \varepsilon, |\frac{dh}{dx}| < \varepsilon \Rightarrow |R(f,h)| < C\varepsilon^2$)

Wir nennen die (eindeutige) Abbildung F das **Differential** des Funktionals Φ.

Definition 3.5. Sei Φ ein differenzierbares Funktional auf $\mathcal{F}$, F dessen Differential und $f \in \mathcal{F}$.

f heisst **kritischer Punkt** von Φ $:\Longleftrightarrow$ $F(f,h) = 0 \quad \forall\ h \in \mathcal{U}$

f heisst **Minimum** von Φ $:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Umgebung $\mathcal{V}$ von f mit $\Phi(f) \le \Phi(g) \quad \forall\ g \in \mathcal{V}$
f heisst **Maximum** von Φ $:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Umgebung $\mathcal{V}$ von f mit $\Phi(f) \ge \Phi(g) \quad \forall\ g \in \mathcal{V}$
f heisst **Extremum** von Φ $:\Longleftrightarrow$ f ist Minimum oder Maximum.

Definition 5.1. Im Folgenden seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und es bezeichnen
$\mathcal{U} := \{h : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid h \text{ stetig diffbar}, h(a) = 0, h(b) = 0\}$ und
$\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig diffbar}, f(a) = p, f(b) = q\}$
den für Funktionale geforderten Untervektorraum und den affinen Unterraum.
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

Wir definieren ein Funktional $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ durch $f \mapsto \int_a^b L\big(x, f(x), f'(x)\big)dx$.

Für dieses Funktional heisst L **Lagrangesche Funktion**.

Mit $\varphi : \mathcal{F} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f,h,\varepsilon) \mapsto \Phi(f + \varepsilon h)$
definieren wir die **erste und zweite Variation des Funktionals**:
$\delta\Phi(f,h) := D_3\varphi(f,h,0)$ und $\delta^2\Phi(f,h) := D_3 D_3\varphi(f,h,0)$.

Satz 5.5. *$f \in \mathcal{F}$ ist kritischer Punkt des Funktionals Φ $\Longleftrightarrow$ f erfüllt die* ***Euler-Lagrangesche DGL***
$D_2 L\big(x, f(x), f'(x)\big) - \frac{d}{dx} D_3 L\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0$

Satz 5.8. *$f \in \mathcal{F}$ ist Extremum des Funktionals Φ $\Longrightarrow$ f ist kritischer Punkt von Φ.*

Satz 10.1. *Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex im zweiten Argument, also ist für festes $q \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ die Funktion $L_{q,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto L(q,z,t)$ konvex.*

Erfüllt $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung
$D_1 L\big(q(t), \dot q(t), t\big) = \frac{d}{dt} D_2 L\big(q(t), \dot q(t), t\big)$
dann gilt:
$(p,q) : [a,b] \to \mathbb{R}^{2n}$ erfüllt das folgende Hamiltonsystem:

$$\begin{aligned} \dot p(t) &= -D_2 H\big(p(t), q(t), t\big) \\ \dot q(t) &= D_1 H\big(p(t), q(t), t\big) \end{aligned}$$

wobei $H(p,q,t) = \mathscr{L} L_{q,t}(p)$ die Legendre-Transformierte der Lagrangeschen Funktion im zweiten Argument ist
und $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto D_2 L\big(q(t), \dot q(t), t\big)$ ist.

Den vollständigen Vortrag gibt es unter **http://www.spacewi.de/gdgl/EulerLagrange.pdf**