Notation

G	zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe
$\mathfrak{g}$	Lie-Algebra von G
V	G-Darstellung
ξ_x für $\xi \in \mathfrak{g}$, $x \in V$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\xi)x\|_{t=0}$
ω	G-invariante symplektische Form auf V
$H : V \to \mathbb{R}$	glatte Funktion (die Hamiltonfunktion)
X_H	Hamiltonsches Vektorfeld definiert durch $\mathrm{d}H(x) = \omega(\cdot, X_H(x))$
$\Phi : V \to \mathfrak{g}^*$	Impulsabbildung, mit $\Phi^\xi := \langle \Phi(\cdot), \xi\rangle$ für $\xi \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathrm{d}\Phi^\xi(x) = \omega(\cdot, \xi_x)$
$\mathrm{Ad}_g\, \xi$ für $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \exp(t\xi)g^{-1}\|_{t=0}$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ ist die *adjungierte Darstellung* auf $\mathfrak{g}$.
G_ξ	$\{g \in G \mid \mathrm{Ad}_g\, \xi = \xi\}$

Φ kann äquivariant bzgl. der zur adjungierten Darstellung dualen Darstellung auf $\mathfrak{g}^*$, der *koadjungierten Darstellung*, gewählt werden. Dann gilt also

$$\langle \Phi(gx), \xi\rangle = \langle (\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\, \Phi)(x), \xi\rangle = \langle \Phi(x), \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\, \xi\rangle.$$

Das wird im Folgenden angenommen. Φ^ξ ist dann G_ξ-invariant.

Definition 1. Ein X_H-invarianter G-Orbit heißt *relative Ruhelage.*

x ist genau dann in einer relativen Ruhelage enthalten, wenn es ein $\xi \in \mathfrak{g}$ mit $X_H(x) = \xi_x$ gibt, diese Gleichung ist äquivalent zu $\mathrm{d}(H - \Phi^\xi)(x) = 0$. ξ wird dann auch als *Geschwindigkeit* bezeichnet, wobei die Geschwindigkeit im Allgemeinen nicht eindeutig ist: Die Summe mit einem beliebigen Element aus der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_x$ von G_x ist ebenfalls eine Geschwindigkeit (an der Stelle x) und außerdem ist auch $\mathrm{Ad}_g\, \xi$ für $g \in G$ eine Geschwindikeit für die relative Ruhelage (an der Stelle gx).

Rechnung für symplektische SO(3)-Darstellungen

Wir verwenden den folgenden Satz um relative Ruhelagen nahe einer nicht hyperbolischen Ruhelage in 0 in Hamiltonsystemen mit SO(3)-Symmetrie (auf symplektischen SO(3)-Darstellungen) zu finden:

Satz 2 (Ortega, Ratiu 2004)**.** *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und (V, ω) eine G-symplektische Darstellung mit Impulsabbildung $\Phi : V \to \mathfrak{g}$. Für $\xi \in \mathfrak{g}$ gelte:*

1. $V_0 := \ker \mathrm{d}^2(H - \Phi^\xi)(0) \neq \{0\}$,
2. $\mathrm{d}^2 H(0)$ *ist auf* V_0 *positiv definit,*
3. G_ξ *wirkt transitiv auf der Einheitssphäre von* V_0 *bzgl. der Norm* $||\cdot||^2 = \pm\mathrm{d}^2 H(0)(\cdot, \cdot)$.

Dann gibt es bei 0 *einen Zweig relativer Ruhelagen mit Geschwindigkeiten nahe* ξ.

Sofern $V^G = \{0\}$ und 0 keine hyperbolische Ruhelage von X_H ist, ist der generische Fall, dass es ein Paar rein imaginärer Eigenwerte $\pm\alpha\mathrm{i}$, $\alpha > 0$ gibt, so dass der Eigenraum W zu $\pm\alpha\mathrm{i}$ (genauer: der reelle Teil der Summe der beiden Eigenräume) *G-symplektisch irreduzibel* ist, also keine nichttrivialen G-invarianten symplektischen Unterräume enthält. In diesem Fall besteht G entweder aus einer irreduziblen Darstellung vom komplexen oder quaternionischen Typ oder aus zwei isomorphen absolut irreduziblen Darstellungen. Ablsolut irreduzible Unterdarstellung sind *isotrop*, d. h. darauf gilt $\omega = 0$ ([GS87]). Wie im Vortrag angedeutet, erhält man für diesen Fall aus der Normalformentheorie für infinitesimal symplektische Abbildungen ([DM93]), dass $\mathrm{d}^2H(0)$ auf W definit ist und aus einem Argument von Montaldi über extremale relative Ruhelagen ([Mon97]) angewandt auf die Linearisierung, dass es $\xi \in \mathfrak{g}$ gibt, so dass die Einschränkung von $\mathrm{d}^2(H - \Phi^\xi)(0)$ auf W einen nicht-trivialen Kern V_0 hat. Unter der generischen Annahme, dass $V_0 = \ker \mathrm{d}^2(H - \Phi^\xi)(0)$ gilt, sind dann also die ersten beiden Bedingungen erfüllt. Interessant ist also, wann die dritte Bedingung gilt.

Falls $G = \mathrm{SU}(2)$ oder $G = \mathrm{SO}(3)$ ist, gilt $G_\xi \cong S^1$ für $\xi \neq 0$. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $\mathrm{d}^2H(0)$ keinen Eigenwert 0 hat, und schließen damit $\xi = 0$ aus.

Beispiel 3. $G = \mathrm{SO}(3)$, $W = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $O(q,p)^T = (Oq, Op)^T$ für $O \in \mathrm{SO}(3)$, $(q,p)^T \in W$, $\omega = \langle \cdot, J\cdot \rangle$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$. Da J mit der Gruppenoperation kommutiert, kann W als komplexe Darstellung aufgefasst werden durch $\mathrm{i}x := Jx$. Wählt man eine Einbettung von S^1 nach $\mathrm{SO}(3)$ und zerlegt die komplexe S^1-Darstellung W in isotypische Komponenten, so erhält man

$$W = \mathbb{C}_{-1} \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_1,$$

wobei $\mathbb{C}_k$ für $k \in \mathbb{Z}$ die S^1-Darstellung auf $\mathbb{C}$ durch $e^{i\theta} \mapsto e^{ki\theta}$ bezeichne. Die Ableitung der Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathrm{SO}(3)$ definiert eine Abbildung zwischen den Liealgebren $\theta \mapsto \theta v$ mit $v \in \mathfrak{so}(3)$. Sei $\Phi^\theta := \Phi^{\theta v}$, dann zeigt die Rechnung aus dem Vortrag, dass bzgl. einer zur Zerlegung passenden Basis gilt, dass

$$\mathrm{d}^2\Phi^\theta(0) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -\theta & \\ & & \theta \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathrm{d}^2H(0)$ kommutiert mit der S^1-Wirkung und bildet daher S^1-isotypische Komponenten in sich selbst ab. Allerdings kommutiert $\mathrm{d}^2H(0)$ im Allgemeinen nicht mit J. Als reelle Darstellungen sind die Darstellungen $\mathbb{C}_k$ und $\mathbb{C}_{-k}$ isomorph, so dass nur die Summe $\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_{-1}$ invariant unter $\mathrm{d}^2H(0)$ ist. (Hier liegt der Fehler in der Rechnung im Vortrag). Wenn $\mathrm{d}^2H(0)$ kein Vielfaches der Identität ist, hat $\mathrm{d}^2H(0)$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ, μ, deren Eigenraum jeweils eine absolut irreduzible Unterdarstellung und somit einen isotropen Unterraum bildet. Daher gibt es eine eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\mathrm{d}^2H(0)$, so dass ω auf $\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_{-1}$ durch $J^\pm$ dargestellt wird mit

$$\mathrm{d}^2H(0)|_{\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_{-1}} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \mu & \\ & & & \mu \end{pmatrix} \text{und } J^\pm = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden wird die Matrix von $\mathrm{d}\Phi^\theta|_{\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_{-1}}$ zu dieser Basis bestimmt. Da sie symmetrisch ist, ist sie von der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ mit 2×2 Blöcken A, B, und C, so dass $A^T = A$ und $C^T = C$. Da sie mit $J^\pm$ kommutiert, ergibt sich $A = C$ und $B^T = -B$. Außerdem kommutiert sie auch mit der S^1-Wirkung. Da die Eigenräume von $\mathrm{d}^2 H(0)$ zu λ und μ S^1-Darstellungen vom komplexen Typ sind, entsprechen A und B komplexen Zahlen. Aus $A^T = A$ folgt, dass A nur reelle Eigenwerte hat. Somit ist A reelles Vielfaches der Identität. Da die Spur verschwindet, folgt $A = 0$. Wegen $B^T = -B$, ist B von der Form $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Aus der Determinante $t^4 = \theta^4$ ergibt sich $t = \pm\theta$.

Damit ergibt sich als für die Einschränkung von $\mathrm{d}^2(H - \phi^\theta)(0)$ auf $\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_{-1}$ die Determinante $((\lambda\mu) - \theta^2)^2$. Falls $\mathrm{d}^2 H(0)$ definit ist, also $\lambda\mu > 0$, erhält man als Lösungen mit nichttrivalem Kern $\pm\theta$. Der Kern ist dann eine nichttriviale zweidimensionale S^1-Darstellung, also ist die Transitivitätsbedingung erfüllt. Da $\pm\theta$ im selben Orbit in der adjungierten Darstellung liegen, erhält man für beide Werte denselben Zweig. Es gibt also genau einen Zweig von relativen Ruhelagen bei 0.

Auf ähnliche Weise rechnet man für die anderen irreduziblen Darstellungen von SO(3). Die irreduziblen Darstellungen sind alle absolut irreduzibel. Es gibt genau für jede natürliche Zahl n eine solche Darstellung, die sich aus jeweils einem $\mathbb{C}_k$ für $k = -n, \ldots n$ zusammensetzt. Man erhält also n Zweige, wobei die Inversen der Geschwindigkeitsnormen sich wie $1, \ldots, n$ verhalten.

Für SU(2) entsprechen die irreduziblen Darstellungen ebenfalls den natürlichen Zahlen. Die geraden Zahlen gehören zu den SO(3)-Darstellungen (SU(2) ist eine doppelte Überlagerung von SO(3)). Für die ungeraden n sind die Darstellungen vom quaternionischen Typ und bestehen aus den $\mathbb{C}_k$ für die ungeraden Zahlen von $-n$ bis n. Man erhält also $\frac{n+1}{2}$ Zweige, wobei die Inversen der Geschwindigkeitsnormen sich wie die ungeraden Zahlen von 1 bis n verhalten.

(Für die Beschreibung der Darstellungen und Methoden zur Berechnung der enthaltenen S^1-Darstellungen siehe z. B. [BtD85].)

Literatur

[BtD85] Bröcker, T. und tom Dieck, T. [1985] *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag New York.

[DM93] Dellnitz, M. und Melbourne, I. [1993] Normal forms for linear Hamiltonian vector fields commuting with the action of a compact Lie group. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 114, 235–268.

[GS87] Golubitsky, M., Stewart, I. [1986] Generic Bifurcation of Hamiltonian Systems with Symmetry. *Physica* 24D 391 – 405.

[Mon97] Montaldi, J. [1997] Persistence and stability of relative equilibria. *Nonlinearity*, 10, 449–466.