Analytische Halbgruppen und eine Qualitative Theorie Semilinearer Partieller Differentialgleichungen

Lev Lazar
Studiengang M.Sc.Mathematik
Matrikel 5986811

Wintersemester 2010/2011

Inhaltsverzeichnis

1 Halbgruppen von Operatoren

1.1 Stark stetige Halbgruppen

Definition 1.1. Eine Familie Stetiger Operatoren $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ auf einem Banach-Raum X bezeichnen wir eine stark stetige Halbgruppe, falls gilt:

(i) $U(0) = \mathbb{I}$

(ii) $U(s)U(t) = U(s+t)$ für alle $t, s \geq 0$,

(iii) $U(t)x \to x$ für $t \to 0+$ für alle $x \in X$.

Der infinitesimale Erzeuger A einer analytischen Halbgruppe ist definiert als:

$$Ax = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \left(U(t) - \mathbb{I}\right) x.$$

Dabei ist der Definitionsraum $D(A)$: alle $x \in X$, so dass der Grenzwert existiert. Wir schreiben dann:

$$e^{-At} := U(t).$$

Lemma 1.2. *Sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X mit dem Definitionsbereich $D(A)$ dicht in X. Es gelete:*

(i) $\{\xi \in \mathbb{R} : \xi < 0\} \subset \rho(A)$,

(ii) $\|\rho(-\xi)\| = \|(A+\xi\mathbb{I})^{-1}\| \leq \frac{M}{\xi}$ *für alle* $\xi > 0$ *und ein* $M > 0$.

Dann sind die Abbildungen:

$$V_n : [0,\infty) \to \mathscr{B}(X), \quad V_n(t) := \left(\mathbb{I} + \frac{t}{n}A\right)^{-n} \tag{1.1.1}$$

gleichmäßig beschränkt, und bilden eine Cauchy-Folge.

Beweis. Aus der zweiten Annahme folgt:

$$\|\left(\mathbb{I} + \xi^{-1}A\right)^{-1}\| \leq M \quad \Rightarrow ||V_n(t)|| \leq M, \quad \forall\, t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 1.15 ist die Resolvente holomorph, also folgt aus der ersten Annahme: V_n differenzierbar für alle $t > 0$. Wir zeigen: $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Für $t > 0$ und $x \in D(A^2)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&V_n(t)x - V_m(t)x \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds} \left[V_n(s) V_m(t-s) x \right] ds \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left[V_n'(s) V_m(t-s) - V_n(s) V_m'(t-s) \right] x \, ds \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left[-A \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} V_m(t-s) + V_n(s) A \left(\mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} \right] x \, ds \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left[- \left(\mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right) A + \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right) A \right] \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left(\mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} x \, ds \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left(\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) A^2 \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left(\mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} x \, ds \\
&\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t-\varepsilon} \left(\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n} A \right)^{-n-1} \left(\mathbb{I} + \frac{t-s}{m} A \right)^{-m-1} A^2 x \, ds.
\end{aligned}
$$

Daher folgt für $t \in (0, T)$ mit $0 < T < \infty$ und $x \in D(A^2)$, $m \geq n$:

$$
\begin{aligned}
&\|V_n(t)x - V_m(t)x\| \\
&\quad \leq M^2 \|A^2 x\| \int\limits_0^t \left(\frac{s}{n} - \frac{t-s}{m} \right) ds \\
&\quad = M^2 \|A^2 x\| \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \to 0 \text{ für } m, n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Weiter ist $V_n(t) \to \mathbb{I}$ für $t \to 0+$. Also, insgesammt folgt: $\{V_n(t)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge für jedes $x \in D(A^2)$, und konvergiert gleichmäßig in t, auf jedem endlichen Interval in $[0, \infty)$.

Wegen $D(A^2) = (A + \xi)^{-1} D(A)$, und $R\left((A + \xi)^{-1}\right) = D(A)$ sowie $D(A)$ dicht in X, folgt $D(A^2)$ dicht in X. Also konvergiert $\{V_n(t)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in D(A)$ gleichmäßig in t. $\square$

Satz 1.3. *Der Operator A habe die Eigenschaften aus Lemma 1.2. Dann erzeugt $-A$ eine stark stetige Halbgruppe.*

Beweis. Für die Folge $\{V_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 1.2 gilt: $\{V_n(t)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf jedem endlichen Interval in t und für jedes $x \in D(A)$. Wir definieren:

$$U(t)x := \lim_{n\to\infty} V_n(t)x, \quad \text{für alle } t \geq 0, \text{ und alle } x \in D(A). \tag{1.1.2}$$

Da V_n stetig in t, folgt aus der gleichmäßigen konvergenz auf jedem endlichem Interval, dass auch $U(t)$ stetig in t. Weiterhin gilt:

$$U(0) = \mathbb{I}, \quad \|U(t)\| \leq M, \quad U(t)x \to x \text{ für } t \to 0+. \tag{1.1.3}$$

Wie im Beweis des Lemmas 1.2 bereits ausgerechnet haben wir:

$$\frac{d}{dt} V_n(t)x = -A\left(\mathbb{I} + \frac{t}{n}A\right)^{-n-1} x = -\left(\mathbb{I} + \frac{t}{n}A\mathbb{I}\right)^{-1} V_n(t)Ax,$$

wobei wir verwendet haben dass die Resolvente (bzw. $V_n(t)$) mit A kommutiert. Also folgt:

$$U(t)Ax = AU(t)x. \tag{1.1.4}$$

Weiter gilt:

$$V_n(t)x - x = -\int_0^t A\left(\mathbb{I} + \frac{s}{n}A\right)^{-1} V_n(s)x\,ds \quad = -\int_0^t \left(\mathbb{I} + \frac{s}{n}A\right)^{-1} V_n(s)Ax\,ds.$$

Durch Grenzübergang erhalten wir:

$$U(t)x - x = -\int_0^t U(s)Ax\,ds = -\int_0^t AU(s)x\,ds, \tag{1.1.5}$$

für alle $t \in [0,T]$ mit $0 < T < \infty$, $x \in D(A)$. Unter verwendung der stetigkeit von $U(t)$ in t rechnet man:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}|h|^{-1}\|-\int\limits_0^{t+h} U(s)Ax\,ds+\int\limits_0^{t} U(s)Ax\,ds+U(t)Axh\| \\
&=\lim_{h\to 0}|h|^{-1}\|\int\limits_t^{t+h}\left(U(t)-U(s)\right)Ax\,ds\| \\
&\leq \lim_{h\to 0}|h|^{-1}\varepsilon(h)|h|\|Ax\|=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)\|Ax\|=0.
\end{aligned}$$

Also folgt für alle $x\in D(A)$:

$$\frac{d}{dt}U(t)=-U(t)Ax=-AU(t)x,\quad \forall\, t\geq 0. \tag{1.1.6}$$

Für alle $0\leq s\leq t<T$ gilt:

$$\frac{d}{ds}U(t-s)U(s)x=AU(t-s)U(s)x-AU(t-s)U(s)=0.$$

Also folgt für alle $0\leq \tau, s\leq t<T$ und alle $x\in D(A)$:

$$U(t-s)U(s)x=U(t-\tau)U(\tau)x=U(t)x\;\Leftrightarrow\;U(t-\tau)U(\tau)=U(t).$$

Also mit $s:=t-\tau$ folgt:

$$U(\tau+s)=U(\tau)U(s). \tag{1.1.7}$$

Nach annahme ist aber $D(A)$ dicht in X, und somit ist $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe.

Es ist noch:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+}t^{-1}\left(U(t)-\mathbb{I}\right)x&=\lim_{t\to 0+}t^{-1}\left(U(t)-U(0)\right)x \\
&=\frac{d}{dt}U(t)|_{t=0}\,x=-AU(0)x=-Ax,
\end{aligned}$$

d.h. $-A$ ist der Erzeuger der Halbgruppe gemäß der Definition 1.1. $\square$

Lemma 1.4. *Der Operator $U(t):D(A)\to X$ sei definiert wie in* (1.1.2). *Dann ist:*

$$\rho(-\xi)=(A+\xi)^{-1}=\int\limits_0^{t}e^{-\xi t}U(t)\,dt,\quad \forall\,\xi\in\rho(A),\Re(\xi)>0. \tag{1.1.8}$$

Insbesondere ist für $A\neq B$: $e^{-At}\neq e^{-Bt}$.

Beweis. Es ist: $\frac{d}{dt}\, e^{-\xi t}U(t)y = -e^{-\xi t}U(t)\,(A+\xi)\,y$ also:

$$-\int_0^\infty \frac{d}{dt}\, e^{-\xi t}U(t)y\,dt = y = \int_0^\infty e^{-\xi t}U(t)\,(A+\xi)\,y\,dt.$$

Daher, mit $x := (A+\xi)\,y$ folgt die Behauptung für alle $x \in D(A) = R\left((A+\xi)^{-1}\right)$. □

Satz 1.5. *Sei $A : X \to X$ ein Abgeschlossener, dicht definierter linearer Operator auf dem Banachraum X. Es gäbe eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ mit:*

$$\{\xi \in \mathbb{R} : \xi < \beta\} \subset \rho(A),$$

und sei:

$$\|(A+\xi)^{-k}\| \le M\,(\xi-\beta)^{-k}, \quad \forall\, \xi > \beta,\, k = 1,2,3,\ldots. \tag{1.1.9}$$

Dann generiert $-A$ eine stark stetige Halbgruppe.

Beweis. Setzen wir $A_\beta := -\,(A+\beta)$, dann erfüllt A_β offensichtlich die Voraussetzungen in Lemma 1.2. Damit ist $U_\beta(t) := e^{-A_\beta t}$ definiert, und mit den selben Argumenten wie in dem Beweis von Satz 1.3 definiert eine stark stetige Halbgruppe.

Setzen wir:

$$e^{-At} := U(t) := e^{\beta t}U_\beta(t) = e^{\beta t}e^{-(A+\beta)t}, \tag{1.1.10}$$

dann erfült $U(t)$ die Eigenschaften in Definition 1.1 und erzeugt eine stark stetige Halbgruppe, die allerdings nicht mehr beschränkt ist. Es gilt nämlich:

$$\|U(t)\| \le Me^{\beta t}.$$

□

1.2 Analytische Halbgruppen

Definition 1.6. Eine Familie Stetiger Operatoren $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ auf einem Banach-Raum X bezeichnen wir eine analytische Halbgruppe, falls gilt:

(i) $U(0) = \mathbb{I}$, $U(s)U(t) = U(s+t)$ für alle $t, s \geq 0$,

(ii) $U(t)x \to x$ für $t \to 0+$ für alle $x \in X$,

(iii) $t \mapsto U(t)x$ ist reel analytisch für jedes $x \in X$ und alle $t \in (0, \infty)$.

Der infinitesimale Erzeuger A einer analytischen Halbgruppe ist definiert als:

$$Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(U(t) - \mathbb{I} \right) x.$$

Dabei ist der Definitionsraum $D(A)$: alle $x \in X$, so dass der Grenzwert existiert. Wir schreiben dann:

$$e^{-At} := U(t).$$

Definition 1.7. Sei X ein Banachraum und A ein linearer Operator auf X. Wir sagen X ist ein sektorieller Operator falls gilt:

(i) A ist abgeschlossen und $D(A)$ ist dicht,

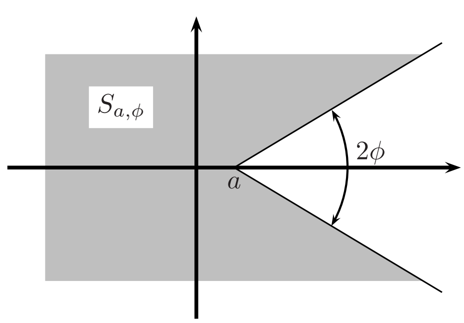
(ii) Es gibt ein $M > 0$, ein $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und ein $a \in \mathbb{R}$, so dass der Sektor:

$$S_{a,\phi} := \{\xi \in \mathbb{C} \,|\, \phi \leq |\arg(\xi - a)| \leq \pi\}$$

eine Teilmenge der Resolvente von A ist, d.h.: $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$, und es gilt:

$$||\,(A - \xi)^{-1}\,|| \leq \frac{M}{|\xi - a|},$$

für alle $\xi \in S_{a,\phi}$.



Lemma 1.8. *Sei A ein sektorieller Operator auf X mit dem Sektor $S_{a,\phi}$. Es gebe Konstanten $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $R_0, C > 0$ mit:*

$$||A(A-\xi)^{-1}|| \leq C$$

für alle $\xi \neq \sigma(A)$ mit $|\arg(\xi)| \geq \phi_0$ und $|\xi| \geq R_0$. Sei B ein linearer Operator auf X mit $D(A) \subset D(B)$ und gelte:

$$||Bx|| \leq \varepsilon ||Ax|| + K_\varepsilon ||x||$$

für alle $x \in D(A)$ und mit $\varepsilon, K_\varepsilon > 0$, so dass $\varepsilon C < 1$.
Dann ist $A + B$ sektoriell.

Beweis. Es ist:

$$||B(A-\xi)^{-1}|| \leq \varepsilon ||A(A-\xi)^{-1}|| + K_\varepsilon ||(A-\xi)^{-1}|| \leq \varepsilon C + K_\varepsilon \frac{M}{|\xi - a|}$$

Wegen:

$$||(\mathbb{I} - F)^{-1}||^{-1} \geq ||\mathbb{I} - F|| \geq 1 - ||F|| \Leftrightarrow (1 - ||F||)^{-1} \geq ||(\mathbb{I} - F)^{-1}||$$

für alle beschränkte lineare Operatoren auf X mit $||F|| < 1$, folgt:

$$\begin{aligned} ||\left((A+B) - \xi\right)^{-1}|| &\leq ||\left(\mathbb{I} - B(A-\xi)^{-1}\right)^{-1}|| \, ||(A-\xi)^{-1}|| \\ &\leq \frac{M}{|\xi - a|} \left(1 - \varepsilon C - K_\varepsilon \frac{M}{|\xi - a|}\right)^{-1} \leq \frac{\mathbf{C}}{|\xi - a|}, \end{aligned}$$

wobei wir $|\xi|$ groß genug wählen. Schließlich ist: $\sigma(A+B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$, und damit gilt die Behauptung. □

Satz 1.9. *Ist A ein sektorieller Operator, so ist $-A$ erzeuger der analytischen Semigruppe $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, mit:*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\xi + A)^{-1} e^{\xi t} d\xi. \tag{1.2.1}$$

Dabei ist Γ eine Kurve in der Resolvente $\rho(-A)$ mit $\arg \xi \to \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ für $|\xi| \to \infty$.

Weiter kann e^{-At} analytisch erweitert werden auf einen Sektor:

$$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\arg z| < \varepsilon\} \supset \mathbb{R}, \tag{1.2.2}$$

und falls $\Re(\sigma(A)) > a$*, so gillt:*

$$||e^{-At}|| \leq Ce^{-at}, ||Ae^{-At}|| \leq \frac{C}{t}e^{-at}$$

für eine Konstante C*.*

Schließlich gilt:

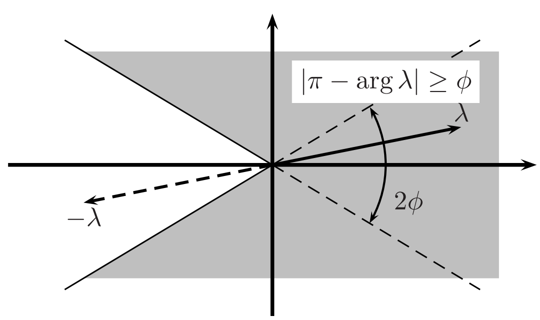
$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At},$$

für alle $t > 0$*.*

Beweis. Mit Lemma 1.8 können wir die Betrachtung auf $a = 0$ einschränken, denn mit A ist auch $A - a\mathbb{I}$ sektoriell.

Wählen wir $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|\pi - \arg \xi| \geq \phi$, dann gilt:

$$||(A + \xi)^{-1}|| \leq \frac{M}{|\xi|}.$$



Es ist dann:

$$\begin{aligned}\left\|e^{-At}\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi + A)^{-1}e^{\xi t}d\xi\right\| \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\left\|\int_\Gamma (\xi - a)^{-1}e^{\xi t}d\xi\right\| = \frac{Me^{at}}{2\pi} < \infty, \quad \forall\, t > 0.\end{aligned}$$

Verschieben wir die Kurve Γ nach Rechts um einen kleinen Abstand und bezeichnen wir diese mit Γ'. Das Integral bleibt davon unverändert, und wir erhalten für $t, s > 0$:

$$\begin{aligned} e^{-At}\, e^{-As} &= (2\pi i)^2 \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma'} e^{\xi t} e^{\mu s} (A+\xi)^{-1} (A+\mu)^{-1}\, d\xi\, d\mu \\ &= (2\pi i)^2 \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma'} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} \left((A+\xi)^{-1} - (A+\mu)^{-1} \right)\, d\xi\, d\mu, \end{aligned}$$

wobei wir die Resolventen Gleichung (1.3.1) verwendet haben. Aber es gilt:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} \, (A+\mu)^{-1}\, d\xi = 0 && \forall\, \mu \in \Gamma', \\ &\int\limits_{\Gamma'} e^{\xi t + \mu s} (\xi - \mu)^{-1} \, (A+\xi)^{-1}\, d\mu = 2\pi i\, e^{\xi(t+s)} \, (A+\xi)^{-1} && \forall\, \xi \in \Gamma. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die ursprungliche Gleichung erhalten wir:

$$e^{-At}\, e^{-As} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\xi(t+s)} \, (A+\xi)^{-1}\, d\xi = e^{-A(t+s)}.$$

Der Ausdruck (1.2.1) ist definiert sogar für $t \in \mathbb{C}$ mit $\arg t < \varepsilon$, denn wir können stets Γ so wählen dass $\arg t\xi > \frac{\pi}{2}$, d.h. $\Re t\xi < 0$ für alle $\xi \in \Gamma$. Weiterhin können wir (1.2.1) unter dem Integral differenzieren und damit ist (1.2.1) analytisch auf (1.2.2). Wie in Lemma 1.14 haben wir auch $Ae^{-At} = e^{-At}A$ und:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\, e^{-At} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \xi e^{\xi t} \, (A+\xi)^{-1}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\xi t} \left(\mathbb{I} - A(A+\xi)^{-1} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\xi t}\, d\xi - Ae^{-At} = -Ae^{-At}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\mu := t\xi$, so erhalten wir:

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\mu} \left(A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \frac{d\mu}{t}.$$

Andererseits haben wir:

$$\left\| \left(A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| \le M \frac{|t|}{|\mu|}, \qquad \text{für } t \text{ mit } |\arg t| \le \varepsilon_0 < \varepsilon.$$

Daher folgt:

$$\left\|e^{-At}\right\| \leq \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}\, d\mu = \frac{M}{2\pi}.$$

Also ist e^{-At} gleichmäßig beschränkt. Weiter haben mit:

$$\left\| A \left(A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| = \left\| \mathbb{I} - \frac{\mu}{t} \left(A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} \right\| \leq 1 + M,$$

erhalten wir auch die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}\, e^{-At} \right\| = \left\| A e^{-At} \right\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma} e^{\mu} A \left(A + \frac{\mu}{t} \right)^{-1} t^{-1}\, d\mu \right\| \\ &\leq \frac{1+M}{2\pi t} \int\limits_{\Gamma} e^{\Re(\mu)}\, d\mu = \frac{1+M}{\pi t}. \end{aligned}$$

Wir bemerken:

$$\xi(A+\xi)^{-1} = \mathbb{I} - A(A+\xi)^{-1} \;\Leftrightarrow\; (A+\xi)^{-1} - \xi^{-1} = -\xi^{-1} A (A+\xi)^{-1}.$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} \left\| e^{-At} x - x \right\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma} e^{\xi t} \left((A+\xi)^{-1} - \xi^{-1} \right) x\, d\xi \right\| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\Gamma} e^{\xi t} A \xi^{-1} (A+\xi)^{-1} x\, d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\| Ax \right\| t \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\mu}}{\mu^2}\, d\mu \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left\| Ax \right\| t \to 0, \text{ für } t \to 0+. \end{aligned}$$

Und daher folgt:

$$e^{-At} \to \mathbb{I} \qquad \text{für } t \to 0+,$$

auf $D(A)$. Aber $D(A)$ ist dicht in X und somit ist $U(t) \to \mathbb{I}$ für $t \to 0+$. $\square$

1.3 Anhang

Definition 1.10. Sei X ein linearer Raum, dann schreiben wir $\mathscr{B}(X)$ für die Menge stetiger linearer Operatoren auf X.

Definition 1.11. Sei X ein linearer Raum, und sei $A : X \to X$ ein linearer Operator. Dann definieren wir die Mengen:

$$\begin{aligned}
\text{(Definitionsbereich) } D(A) &:= \{x \in X : Ax \in X\}, \\
\text{(Bild) } R(A) &:= \{y \in X : \exists x \in X : Ax = t\}, \\
\text{(Nullraum) } N(A) &:= \{x \in X : Ax = 0\}, \\
\text{(Resolventenmenge) } \rho(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbb{I} \text{ ist invertierbar}\}, \\
\text{(Spektrum) } \sigma(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbb{I} \text{ ist singulär}\}.
\end{aligned}$$

Definition 1.12. Sei X ein linearer Raum, und sei $A : X \to X$ ein linearer Operator. Dann definieren wir die Resolvente $\rho(\lambda)$ von A durch:

$$\rho : \rho(A) \to \mathscr{B}(X), \quad \rho(\lambda) := (A - \lambda\mathbb{I})^{-1}.$$

Lemma 1.13. *Für $\xi_1, \xi_2 \in \rho(A)$ erfüllt die Resolvente die erste Resolventen-Gleichung:*

$$\rho(\xi_2) - \rho(\xi_1) = (\xi_2 - \xi_1)\,\rho(\xi_1)\rho(\xi_2). \tag{1.3.1}$$

Insbesondere kommutieren die Operatoren $\rho(\xi_1), \rho(\xi_2)$ für alle $\xi_1, \xi_2 \in \rho(A)$.

Beweis. Es gilt:

$$\rho(\xi_2) - \rho(\xi_1) = \rho(\xi_1)\,(T - \xi_1)\,\rho(\xi_2) - \rho(\xi_1)\,(T - \xi_2)\,\rho(\xi_2) = (\xi_2 - \xi_1)\,\rho(\xi_1)\rho(\xi_2).$$

□

Lemma 1.14. *Die Resolvente kommutiert mit A.*

Beweis. Es ist:

$$A\rho(\xi) = \underbrace{(A - \xi\mathbb{I} + \xi\mathbb{I})}_{D(\ldots)=D(A)}\rho(\xi) = \mathbb{I} + \xi\rho(\xi) \;\Rightarrow\; D\left(A\rho(\xi)\right) = X.$$

Daher gilt $\rho(\xi)A \subset A\rho(\xi)$. Aus einer analogen Rechnung folgt: $\rho(\xi)A = A\rho(\xi)$. □

Satz 1.15. *Die Resolvente ist holomorph auf $\rho(A)$.*

Beweis. Aus der Darstellung (1.3.1) folgt:

$$\rho(\xi_0) - \rho(\xi) = (\xi_0 - \xi)\,\rho(\xi)\rho(\xi_0) \;\Leftrightarrow\; \rho(\xi_0) = [\mathbb{I} - (\xi - \xi_0)\,\rho(\xi_0)]\,\rho(\xi).$$

Also, für $|\xi - \xi_0|\|\rho(\xi_0)\| < 1$ gilt:

$$\rho(\xi) = [\mathbb{I} - (\xi - \xi_0)\,\rho(\xi_0)]^{-1}\,\rho(\xi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \xi_0)^n\,(\rho(\xi_0))^{n+1}\,.$$

Für $\xi_0 \in \rho(A)$ hat also die Resolvente eine Potenzreihen darstellung in einer Umgebung von ξ_0. Damit ist $\rho(A)$ offen und die Resolvente stückweise holomorph. $\square$

2 Potenzen sektorieller Operatoren

2.1 Potenzen sektorieller Operatoren

Definition 2.1. Sei A ein sektorieller Operator mit $\Re(\Sigma_A) > 0$. Dann definieren wir für alle $\alpha > 0$:

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} \, dt. \tag{2.1.1}$$

Bemerkung 2.2.

(i) Sei $X = \mathbb{R}$ dann ist $A \equiv a \in \mathbb{R}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ haben wir:

$$\begin{aligned} a^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} \, dt = \underbrace{-\frac{e^{-at}\, t^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty}}_{=0} + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} a^{-1} \int_0^\infty t^{\alpha-2} e^{-at} \, dt \\ &= \frac{(\alpha-1)!}{\Gamma(\alpha)} a^{-(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-at} \, dt. \end{aligned}$$

(ii) Sei $A = \mathbb{I} + B$ mit $||B|| < 1$. Dann ist:

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= (\mathbb{I} + B)^{-\alpha} = \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n B^n \right)^\alpha \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} B^n = \sum_{n=0}^\infty \begin{pmatrix} -\alpha \\ n \end{pmatrix} B^n, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

wobei:

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ n \end{pmatrix} := (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) n!} = (-1)^n \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1)}{n!}. \tag{2.1.3}$$

(iii) Ist A beschränkt und in (2.1.4) $\alpha = 1$, so ist A^{-1} die inverse von A:

$$\begin{aligned} AA^{-1}x &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(A+\xi)^{-1} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\xi t}\, x\, dt\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \xi^{-1} A(A+\xi)^{-1}\, x\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \xi^{-1} x\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (A+\xi)^{-1}\, x\, d\xi = x, \end{aligned}$$

wobei wir $PX = \ker A$ benutzen für die Projektion P definiert durch:

$$Px := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \rho(\xi)\, x\, d\xi.$$

Lemma 2.3. *Sei A sektoriell mit $\Re(\Sigma_A) > 0$ und $\alpha > 0$, dann ist $A^{-\alpha}$ beschränkt und injektiv. Weiter gilt für alle $\alpha, \beta > 0$:*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)},$$

und für $0 < \alpha < 1$:

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \xi^{-\alpha} (\xi + A)^{-1}\, d\xi.$$

Beweis. Es ist $\Re(\Sigma_A) > \delta \geq 0$, also gilt nach Satz 1.9:

$$\left\| e^{-At} \right\| \leq Ce^{-\delta t} \quad \wedge \quad \left\| Ae^{-At} \right\| \leq \frac{Ce^{-\delta t}}{t}.$$

Daher haben wir:

$$\left\| A^{-\alpha} \right\| \leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\delta t}\, dt = C\delta^{-\alpha} < \infty,$$

und $A^{-\alpha}$ ist beschränkt für alle $\alpha > 0$.

Fur $\alpha, \beta > 0$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-A(s+t)}\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_t^\infty (u-t)^{\beta-1}e^{-Au}\,du\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha-1+\beta-1}e^{-Au} \int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^{\alpha-1} \left(1-\frac{t}{u}\right)^{\beta-1} dt\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha-1+\beta-1}e^{-Au} \int_0^u z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\,u^1\,dz\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-Au}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,du = A^{-(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Sei $x \in X$ mit $A^{-\alpha}x = 0$, dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$:

$$A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0.$$

Aber wegen $A^{-n} = (A^{-1})^n$, und da A^{-1} injektiv, folgt: $x = 0$. Also ist $A^{-\alpha}$ injektiv.

Es ist: $(A+\xi)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\xi t}\,e^{-At}\,dt$, also haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \xi^{-\alpha}\,(A+\xi)^{-1}\,d\xi &= \int_0^\infty \int_0^\infty \xi^{-\alpha}e^{-\xi t}\,d\xi\,e^{-At}\,dt = \int_0^\infty e^{-At}t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\,dt \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-At}t^{\alpha-1}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}A^{-\alpha},
\end{aligned}$$

für alle $0 < \alpha < 1$, da $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi/\sin\pi\alpha$. □

Definition 2.4. Sei A ein sektorieller Operator mit $\Re(\Sigma_A) > 0$. Dann definieren wir für alle $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
&A^\alpha := \left(A^{-\alpha}\right)^{-1}, \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ wobei: } D(A^\alpha) := R(A^{-\alpha}), \\
&A^0 := \mathbb{I}.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Lemma 2.5. *Es gilt:*

(i) Für $\alpha > 0$ der Operator A^α ist abgeschlossen und $D(A^\alpha)$ ist dicht.

(ii) Für $\alpha \geq \beta$ gilt: $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

(iii) Es gilt: $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ in $D(A^\gamma)$ mit $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

(iv) Es gilt: $A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha$ in $D(A^\alpha)$ für $t > 0$.

Beweis.

(i) Sei $y \in R(A^{-\alpha})$ und $x \in X$ mit $A^{-\alpha}x = y$. Dann gilt: $A^\alpha y = x$, und daher: $R(A^{-\alpha}) = A^{-\alpha}X \subset D(A^\alpha)$. Aber da $A^{-\alpha}$ injektiv, folgt $D(A^\alpha)$ dicht.

Wir zeigen noch: $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$. Dazu sei $x \in D(A^\alpha)$, und $y = A^\alpha x$. Dann folgt: $A^{-\alpha}y = x$, also $x \in R(A^{-\alpha})$. Zusammen mit dem Resultat vorher, erhalten wir $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$.

(ii) Seien $\alpha \geq \beta \geq 0$, und wählen wir ein $y \in R(A^{-\alpha})$. Dazu gibt es ein $x \in X$ mit $A^{-\alpha}x = y$ und es gilt:

$$y = A^{-\alpha}x = A^{-\beta-(\alpha-\beta)}x = A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}x.$$

Und da $A^{-(\alpha-\beta)}$ beschränkt, folgt:

$$A^\beta y = A^{-(\alpha-\beta)}x \in X \Rightarrow y \in D(A^\beta).$$

Mit (i), erhalten wir: $R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

(iii) Mit (ii) folgt für $x \in D(A^\gamma)$, $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$:

$$A^\alpha A^\beta x = \left(A^{-\beta}A^{-\alpha}\right)^{-1} x = A^{\alpha+\beta}x.$$

(iv) Folgt aus der Definition.

□

Satz 2.6. *Sei A sektoriell und gelte $\Re(\Sigma_A) \geq \delta > 0$. Dann gibt es für $\alpha \geq 0$ ein $C_\alpha > 0$, so dass für $t > 0$ gilt:*

$$\left\|A^\alpha e^{-At}\right\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \tag{2.1.5}$$

Ist $0 < \alpha \leq 1$ so folgt:

$$\left\|\left(e^{-At} - \mathbb{I}\right)x\right\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \left\|A^\alpha x\right\|. \tag{2.1.6}$$

Beweis. In Satz 1.9 haben wir gezeigt: $\left\|Ae^{-At}\right\| \leq \frac{C}{t}e^{-\delta t}$ für $t > 0$. Damit gilt für $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$:

$$\left\|A^m e^{-At}\right\| = \left\|\left(Ae^{-At/m}\right)^m\right\| \leq \left(\frac{Cm}{t}\right)^m e^{-\delta t}.$$

Für $0 < \alpha < 1$ und $t > 0$ folgt wiederum:

$$\begin{aligned}
\left\|A^\alpha e^{-At}\right\| = \left\|Ae^{-At}A^{-(1-\alpha)}\right\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty s^{-\alpha}Ae^{-A(t+s)}\,ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty s^{-\alpha}\left\|Ae^{-A(t+s)}\right\|\,ds \\
&\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{s+t}\,e^{-\delta s}\,ds \\
&= \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_0^t \frac{s^{-\alpha}}{s+t}\,e^{-\delta s}\,ds + \int_t^\infty \frac{s^{-\alpha}}{s+t}\,e^{-\delta s}\,ds\right] \\
&\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[t^{-1}\int_0^t s^{-\alpha}\,ds + \int_t^\infty s^{-\alpha-1}\,ds\right] \\
&\leq \frac{Ce^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{-\alpha}}{\alpha}\right] \\
&\leq \frac{C}{\alpha(1-\alpha)}\frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} =: \frac{C_\alpha}{t^\alpha}e^{-\delta t}.
\end{aligned}$$

Schließlich, wegen:

$$\left\|A^{\alpha+\beta}e^{-At}\right\| \leq \left\|A^\alpha e^{-At/2}\right\|\left\|A^\beta e^{-At/2}\right\| \leq C_\alpha C_\beta t^{-(\alpha+\beta)}e^{-\delta t}2^{\alpha+\beta},$$

folgt die Behauptung für $\alpha \geq 0$.

Schreiben wir nun:

$$\left(e^{-At} - \mathbb{I}\right)x = \int_0^t \frac{d}{ds}e^{-As}\,x\,ds = -\int_0^t Ae^{-As}\,x\,ds = -\int_0^t A^{1-\alpha}e^{-As}A^\alpha x\,ds.$$

Dann folgt für $0 < \alpha < 1$:

$$\left\| \left(e^{-At} - \mathbb{I} \right) x \right\| \leq \| A^\alpha x \| \int\limits_0^t \left\| A^{1-\alpha} e^{-As} \right\| \, ds \leq \| A^\alpha x \| \, C_{1-\alpha} \int\limits_0^t s^{\alpha-1} \, e^{-\delta s} \, ds$$

$$\leq \| A^\alpha x \| \, C_{1-\alpha} \int\limits_0^t s^{\alpha-1} \, ds \leq \| A^\alpha x \| \, C_{1-\alpha} \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

□

Satz 2.7. *Sei $x \in D(A)$, dann gilt für $0 < \alpha < 1$:*

$$\| A^\alpha x \| \leq C \, \| Ax \|^\alpha \, \| x \|^{1-\alpha} ,$$

bzw. dann:

$$\| A^\alpha x \| \leq \varepsilon \, \| Ax \| + C' \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \, \| x \| ,$$

für alle $\varepsilon > 0$, wie es aus der Young'schen[1] *Ungleichung folgt. Man beachte lediglich: $\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ ist beschränkt für $0 < \alpha < 1$.*

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\left\| \Gamma(\beta) A^{-\beta} x \right\| = \left\| \int\limits_0^\varepsilon + \int\limits_\varepsilon^\infty t^{\beta-1} e^{-At} \, x \, dt \right\|$$

$$\leq C \int\limits_0^\varepsilon t^{\beta-1} \, \| x \| \, dt + \left\| -t^{\beta-1} e^{-At} A^{-1} \Big|_{t=\varepsilon}^{t\to\infty} x \right\|$$

$$+ \left\| (\beta - 1) \int\limits_\varepsilon^\infty t^{\beta-2} \, e^{-At} A^{-1} x \, dt \right\|$$

$$\leq C \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \, \| x \| + 2C \varepsilon^{\beta-1} \left\| A^{-1} x \right\| =: y(\varepsilon).$$

[1] Wegen $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ für $1/p + 1/q = 1$, folgt $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$. Daher folgt die Behauptung für $\hat{a} := \frac{\varepsilon a}{\alpha}$, $\hat{b} := \frac{b\alpha}{\varepsilon}$ durch einsetzen.

Der minimierer von $y(\varepsilon)$ ist:

$$\underline{\varepsilon} := 2\,(1-\beta)\,\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} =: k\frac{b}{a},$$

also gilt:

$$\begin{aligned}\left\|A^{-\beta}x\right\| &\leq \frac{C}{\beta\Gamma(\beta)}(\underline{\varepsilon})^{\beta-1}\left(\underline{\varepsilon}\,\|x\| + 2\beta\left\|A^{-1}x\right\|\right)\\ &= C\frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\beta}\left(k\frac{b}{a}a + (2-k)b\right)\\ &= 2C\frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}a^{1-\beta}b^{\beta}\\ &= 2C\frac{(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)}\,\|x\|^{1-\beta}\left\|A^{-1}x\right\|^{\beta}.\end{aligned}$$

Aber wegen $(1-\beta)^{-(1-\beta)} \leq e^{e^{-1}}$ folgt die Behauptung durch einsetzen von $\alpha := \beta - 1$ und Ax für x. □

Korollar 2.8. *$C(\alpha)$ aus Satz* **??** *ist beschränkt für jedes α in einem beschränktem Interval in $(0,\infty)$, und beschränkt auch für $\alpha \to 0+$.*

Beweis. Sei $\left\|e^{-At}\right\| \leq C_0 e^{-\delta t}$ und $\left\|Ae^{-At}\right\| \leq C_1 t^{-1} e^{-\delta t}$. Dann gilt mit Satz 2.7:

$$\left\|A^{\alpha}e^{-At}\right\| \leq C\left\|Ae^{-At}\right\|^{\alpha}\left\|e^{-At}\right\|^{1-\alpha} \leq CC_1^{\alpha}t^{-\alpha}C_0^{1-\alpha}e^{-\delta t} \to CC_0e^{-\delta t},$$

für $\alpha \to 0+$. □

Korollar 2.9. *Sei A sektoriell, mit $\Re\left(\Sigma_A\right) > 0$, und sei B linear, so dass $BA^{-\alpha}$ beschränkt ist auf X für ein $\alpha \in (0,1)$. Dann ist $A+B$ sektoriell.*

Beweis. Es ist:

$$\|Bx\| = \left\|BA^{-\alpha}A^{\alpha}x\right\| \leq \left\|BA^{-\alpha}\right\|\left[\delta\,\|Ax\| + C'\delta^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\,\|x\|\right] \leq \varepsilon\,\|Ax\| + K_{\varepsilon}\,\|x\|.$$

Damit folgt aus Lemma 1.8 die Behauptung. □

2.2 Die Interpolationsräume

Satz 2.10. *Seien A,B sektoriell mit* $\Re(\Sigma_A), \Re(\Sigma_B) > 0$*, und sei* $(A-B)A^{-\alpha}$ *beschränkt für ein* $\alpha \in [0,1)$*. Dann sind für jedes* $\beta \in [0,1]$ *die Operatoren* $A^\beta B^{-\beta}$ *und* $B^\beta A^{-\beta}$ *beschränkt.*

Beweis. Wir notieren zuhächst für $\beta \in [0,1]$:

$$\left\|A^\beta (A+\lambda)^{-1}\right\| \leq \left\|A(A+\lambda)^{-1}\right\|^\beta \left\|(A+\lambda)^{-1}\right\|^{1-\beta} \leq M|\lambda|^{\beta-1}.$$

Dann auch:

$$\left\|B^{-\beta} - A^{-\beta}\right\| = \frac{\sin\beta\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} (B+\lambda)^{-1} (A-B) (A+\lambda)^{-1} \, d\lambda.$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
\left\|A^\beta B^{-\beta} x\right\| &= \left\| \left[\mathbb{I} - \frac{\sin\beta\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} B^\beta (B+\lambda)^{-1} (A-B) A^{-\alpha} A^\alpha (A+\lambda)^{-1} \right] x \, d\lambda \right\| \\
&\leq \|x\| + \left\| \frac{\sin\beta\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\beta} B^\beta (B+\lambda)^{-1} (A-B) A^{-\alpha} A^\alpha (A+\lambda)^{-1} x \, d\lambda \right\| \\
&\leq \|x\| + C \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\beta}}{(\lambda^{1-\beta})(\lambda^{1-\alpha}+\delta)} \|x\| \, d\lambda \leq \|x\| \left(1 + C \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\beta}}{\lambda^\gamma + \delta} \, d\lambda \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Dann ist noch:

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbb{I} + A^\alpha (A+\lambda)^{-1} (B-A) A^{-\alpha}\right] A^\alpha (B+\lambda)^{-1} \\
&\qquad = A^\alpha (A+\lambda)^{-1} \left[(A+\lambda) + B - A\right] A^\alpha (B+\lambda)^{-1} \\
&\qquad = A^\alpha (A+\lambda)^{-1},
\end{aligned}$$

und wegen:

$$\left\|\mathbb{I} - \left[\mathbb{I} + A^\alpha (A+\lambda)^{-1} (B-A) A^{-\alpha}\right]\right\| \leq C|\lambda|^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{für } \lambda \to \infty,$$

folgt:

$$\left\|A^\alpha (A+\lambda)^{-1}\right\| = \left\|\left[\mathbb{I} + A^\alpha (A+\lambda)^{-1} (B-A) A^{-\alpha}\right] A^\alpha (B+\lambda)^{-1}\right\| \to \left\|A^\alpha (B+\lambda)^{-1}\right\|.$$

Daher schließen wir: $\left\|A^\alpha (B+\lambda)^{-1}\right\| = O\left(\lambda^{\alpha-1}\right)$ für $\lambda \to \infty$ und vertauschen von A mit B führt die Behauptung für $B^\beta A^{-\beta}$ auf das, im wesentlichen selbe Integral zurück. $\square$

Definition 2.11. Sei A sektoriell auf einem Banach-Raum X und $\alpha \geq 0$. Setzen wir $A_1 := A + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ so gewählt dass, $\Re\left(\Sigma_A\right) > 0$ gilt. Dann definieren wir:

$$X^\alpha := D(A_1^\alpha) \tag{2.2.1}$$

$$\|x\|_\alpha := \|A_1^\alpha x\| \quad \text{für } x \in D(A_1^\alpha). \tag{2.2.2}$$

Lemma 2.12. *X^α aus Definition 2.11 ist ein Banachraum. Dieser ist unabängig von gewählten $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Es ist klar dass X^α ein Banachraum ist. Für $a, b \in \mathbb{R}$ wie in der Definition, sei $\{x_n\} \subset X^\alpha$ eine Cauchy-Folge. Es gilt: $D(A+a) = D(A+b) = D(A)$ und für alle $\alpha \geq 0$ ist $\left(A + a - (A+b)\right) A^{-\alpha} = (a-b)A^{-\alpha}$ beschränkt. Aus Satz 2.10 folgt: $(A+b)^\alpha (A+a)^{-\alpha}$ und $(A+a)^\alpha (A+b)^{-\alpha}$ beschränkt. Daher gilt:

$$\|(A+b)^\alpha x_n\| \leq \left\|(A+b)^\alpha (A+a)^{-\alpha}\right\| \|(A+a)^\alpha x_n\| \to 0, \text{für } n \to \infty.$$

$\square$

Satz 2.13. *Sei A sektoriell auf X, X^α für $\alpha \geq 0$ wie in Definition 2.11. Dann ist $X^0 = X$, $X^\beta \subset X^\alpha$ für $\beta \geq \alpha$, X^β dicht in X^α. Hat A eine kompakte Resolvente, so ist die Inklusion $X^\beta \hookrightarrow X^\alpha$ kompakt für $\beta \geq \alpha \geq 0$.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen, Sätzen, Lemmata und Übungen die bereits bewiesen wurden. $\square$

2.3 Anhang

Definition 2.14. Für $\alpha > 0$ definieren wir die Gamma Funktion durch:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.3.1}$$

Lemma 2.15. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{2.3.2}$$

Beweis. Es ist:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-t}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \alpha^{-1} \int\limits_0^\infty t^\alpha\, e^{-t}\, dt = \alpha^{-1}\Gamma(\alpha+1).$$

Also folgt wegen $\Gamma(1) = 1$ die Behauptung induktiv. □

Definition 2.16. Sei $A \in \mathscr{B}(X)$ und $B \in \mathscr{L}$. Wir sagen A kommutiert mit B, falls gilt:

$$AB \subset BA.$$

Definition 2.17. Sei X ein linearer raum und $X = U \oplus V$. Dann sagen wir: P ist ein stetiger Projektor auf U längs V, falls P ein Projektor ist, und gilt:

$$R(P) = U \ \wedge\ N(P) = V.$$

Lemma 2.18. *Sei X ein Banach-Raum und seien $U, V \subset X$ komplementäre abgeschlossene Unterräume, d.h. es gelte:*

$$X = U \oplus V \ \wedge\ U \cap V = \emptyset.$$

Dann gibt es einen stetigen Projektor P auf U längs V.

Beweis. Definieren wir: $Px := P(u+v) = u$. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente folge, so dass die Folge $\{Px_n\}$ konvergiert. Setzen wir $y_n := Px_n$, und bezeichen wir mit x, y jeweils die Grenzwerte. Setzen wir noch $z_n := x_n - Px_n$, so folgt:

$$Pz_n = Px_n - P^2 x_n = y_n - y_n = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, und da V abgeschlossen folgt: $Pz = 0$, wobei wir mit z den Grenzwert bezeichnen. Dann folgt:

$$z = x - y \Leftrightarrow 0 = Pz = Px - Py \Leftrightarrow Px = Py.$$

Aber es ist $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, und da U abgeschlossen folgt: $y \in U$, d.h. $Py = y$, und damit $Px = y$.

Dann ist P abgeschlossen und definiert auf ganz X, und mit Satz über abgeschlossenen Graphen folgt: P stetig. □

Definition 2.19. Sei A ein Operator auf einem linearem Raum. Wir sagen $D(A)$ wird durch $U, V \subset A$ zerlegt falls gilt:

(i) $X = U \oplus V$.

(ii) Für den Projektor $P : X \to U$ auf U längs V gilt:

$$PD(A) \subset D(A) \wedge AU \subset U \wedge AV \subset V.$$

Definition 2.20. Das Spektrum eines Abgeschlossenen Operators ist separiert, wenn es eine geschlossene, rektifizierbare Kurve $\Gamma \subset \rho(A)$ gibt, so dass gilt: in beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ hat Σ_A nichttriviale Anteile und es ist $\Gamma \cap \Sigma_A = \emptyset$.

Definition 2.21. Sei A ein Operator auf einem linearem Raum. Wir sagen $D(A)$ wird durch $U, V \subset A$ zerlegt falls gilt:

(i) $X = U \oplus V$.

(ii) Für den Projektor $P : X \to U$ auf U längs V gilt:

$$PD(A) \subset D(A) \wedge AU \subset U \wedge AV \subset V.$$

Lemma 2.22. *Sei A ein Operator. Genau dann wird $D(A)$ durch U, V zerlegt, wenn gilt: $AP \subset PA$.*

Beweis. Werde $D(A)$ durch U, V zerlegt. Dann gilt:

$$D(PA) = A^{-1}D(P) = A^{-1}X = D(A),$$

und:

$$D(AP) = P^{-1}D(A) = P^{-1}D(A) \cap U = D(A) \cap U \subset D(A).$$

Also vertauschen P und A.

Es gelte P ist ein stetiger Projektor von U längs V, und P und A kommutieren. Dann gilt:

$$PD(A) = PD(A) \cap U = D(A) \cap U \subset D(A)$$
$$AU = APU = PAU \subset U.$$

Und weiter:

$$\begin{aligned} AV &= A(\mathbb{I} - P)V = AV - APV \\ &= AV - PAV \Leftrightarrow \{0\} = APV = PAV \Rightarrow AV \subset V. \end{aligned}$$

□

Definition 2.23. Sei $D(A)$ zerlegt durch U, V. Wir definieren:

$$A_U : U \to U, \quad D(A_U) = D(A) \cap U,\ A_U u := Au.$$
$$A_V : V \to V, \quad D(A_V) = D(A) \cap V,\ A_V v := Av.$$

Lemma 2.24. *Ist A abgeschlossen, U, V eine Zerlegung von A, so sind auch A_U, A_V abgeschlossen.*

Beweis. $G(A_U) = G(A) \cap U \times U$. □

Satz 2.25. *Sei A abgeschlossen und Σ_A sei separiert in σ_1, σ_2 mit σ_1 in der beschränkten Zusammenhangskomponente. Dann gibt es eine Zerlegung $X = U \oplus V$ und eine Zerlegung $A = A_U + A_V$ mit $\Sigma_{A_U} = \sigma_1$ und $\Sigma_{A_V} = \sigma_2$. Dabei ist $A_U \in \mathscr{B}(U)$.*

Beweis. □

2.4 Übungen

Aufgabe 1. *Sei A sektoriell, selbstadjungiert und positiv definit. Dann hat A^α für alle α die selben Eigenschaften.*

Beweis. Zunächst bemerken wir:

$$\left(A^{-1}Ax, Ay\right) = (x, Ay) = (Ax, y) = \left(Ax, A^{-1}Ay\right),$$

für alle $x, y \in D(A)$. Aber da A^{-1} beschränkt, folgt $R(A) = X$, d.h. A^{-1} selbstadjungiert auf X.

Weiter aus:

$$\left(\left\|A^{-1}\right\| \|x\|\right)^{-2} \leq \left\|A^{-1}x\right\|^{-2},$$

und:

$$\left(A^{-1}x, x\right) = \left(AA^{-1}x, A^{-1}x\right) \geq \varepsilon \left\|A^{-1}x\right\|^2,$$

folgt:

$$\frac{(A^{-1}x, x)}{\left(\|A^{-1}\|^2 \|x\|^2\right)} \geq \varepsilon \Leftrightarrow \left(A^{-1}x, x\right) \geq \delta \|x\|^2,$$

mit $\delta = \varepsilon \left\|A^{-1}\right\|^2 > 0$.

D.h., wir haben gezeigt: A^{-1} selbstadjungiert und positiv definit.

Weiter gilt:

$$((A+\lambda)\,x, y) = (x, (A+\lambda)\,y) \;\Rightarrow\; \left((A+\lambda)^{-1}\,x, y\right) = \left(x, (A+\lambda)^{-1}\,y\right),$$

und:

$$((A+\lambda)\,x, x) \geq \varepsilon \left\|x\right\|^2 + |\lambda| \left\|x\right\|^2 \geq \max\left\{|\lambda|, \varepsilon\right\} \left\|x\right\|^2,$$

für alle $\lambda \in \rho(A)$.

Aber insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2. *Sei A sektoriell mit $\Re(\Sigma_A) > 0$. Dann ist A^{-1} genau dann kompakt, wenn $A^{-\alpha}$ für alle $\alpha > 0$, kompakt, genau dann kompakt wenn e^{-At} für alle $t > 0$ kompakt.*

Beweis. Zunächst ist für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ die Aussage trivial. Sei $0 < \alpha < 1$ und $U \subset X$ beschränkt. Dann ist:

$$\overline{A^{-1}U} = \overline{A^{-\alpha}A^{-(1-\alpha)}U}.$$

D.h. A^{-1} genau dann kompakt wenn $A^{-\alpha}$ oder $A^{-(1-\alpha)}$ kompakt. Aber da dies für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt, so folgt $A^{-\alpha}$ kompakt für alle $\alpha \in (0,1)$. Für $\alpha > 0$ folgt aber die Aussage aus $A^{-\alpha} = A^{-\beta}A^{-m}$, $\alpha = [\alpha] + \alpha - [\alpha] =: m + \beta > 0$.

Aber aus $A^{-\alpha}$ kompakt folgt das zweite Teil der Behauptung sofort. $\square$

Aufgabe 3. *Für alle $x \in X$ ist $t \mapsto tAe^{-At}x$ stetig auf $[0, \infty)$. Es gilt auch $tAe^{-At}x \to 0$ für $t \to 0+$.*

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left\|t_1Ae^{-At_1}x - t_0Ae^{-At_0}x\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(t_1e^{\lambda t_1} - t_0e^{\lambda t_0}\right) A\,(A+\lambda)^{-1}\; x\,d\lambda\right\| \\
&\leq (t_1 - t_0)\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t_1}A\,(A+\lambda)^{-1}\; x\,d\lambda\right\| \\
&= (t_1 - t_0)\left\|Ae^{-At_1}x\right\| \\
&\leq (t_1 - t_0)\,\frac{C}{t_1}e^{-\delta t_1}\left\|x\right\|,
\end{aligned}$$

für $t_1 \geq t_0 \geq 0$.

Weiter gilt:

$$\left\| tAe^{-At}x \right\| \leq t\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} te^{\lambda t} \, \|x\| \; d\lambda + t\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} |\lambda| e^{\lambda t}\left(1 + |\lambda|\frac{M}{|\lambda - \delta|}\right) \|x\| \; d\lambda$$
$$\leq \mathcal{C}t \to 0, \text{ für } t \to 0+.$$

□

Aufgabe 4. *Sei A selbstadjungiert und positiv definit auf einem Hilbertraum H. Dann gilt:*

$$\|A^\alpha x\| \leq \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Vergleiche auch mit Satz 2.7.

Beweis. Der Operator A hat die Darstellung:

$$A = \int\limits_0^\infty \lambda \, dE_\lambda,$$

mit $\{E_\lambda\}_{\lambda\in[0,\infty)}$ eine einparametrige Zerlegung der Einheit. Schreiben wir $E(\Delta) := E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}$ für $\lambda_1, \lambda_0 \in [0, \infty)$, dann ist uns bekannt:

$$E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0, \quad \text{falls } (\lambda_0^1, \lambda_1^1) \cap (\lambda_0^2, \lambda_1^2) = \emptyset.$$

Daher folgt für $x \in D(A)$:

$$\|Ax\|^2 = \int\limits_0^\infty |\lambda|^2 \, d\, \|E_\lambda x\|^2 .$$

Setzen wir $g(t) := t^{\frac{1}{\alpha}}$ für $0 \leq < \alpha < 1$. Die Funktion g ist konvex, und aus der Jensens-Ungleichung[2] folgt:

$$\left(\frac{\|A^\alpha x\|}{\|x\|}\right)^{2/\alpha} = g\left(\frac{\int\limits_0^\infty |\lambda|^{2\alpha}\, d\mu(\lambda)}{\int\limits_0^\infty \, d\mu(\lambda)}\right) \leq \frac{1}{\int\limits_0^\infty \, d\mu(\lambda)}\int\limits_0^\infty g\left(|\lambda|^{2\alpha}\right) \, d\mu(\lambda) = \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^2,$$

[2]Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$g\left(\frac{1}{\int\limits_\Omega d\omega}\int\limits_\Omega u \, d\omega\right) \leq \frac{1}{\int\limits_\Omega d\omega}\int\limits_\Omega g\left(u\right) \, d\omega.$$

mit $d\mu(\lambda) = d\left\|E_\lambda x\right\|^2$. Aber damit haben wir bereits die Behauptung. $\square$

Aufgabe 5. *Sei A sektoriell mit $\Re\left(\Sigma_A\right) > 0$, dann gilt für jedes $0 < \alpha \leq 1$:*

$$t^\alpha \left\|A^\alpha e^{-At} x\right\| \to 0 \quad \text{für } t \to 0+.$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.6 rechnen wir:

$$t^\alpha \left\|A^\alpha e^{-At} x\right\| \leq C \left\|Ax\right\| t^\alpha \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{t+s}\, ds.$$

Mit substitution $u := t^\alpha s$ erhalten wir für $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned}
t^\alpha \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{t+s}\, ds &= t^{\alpha^2+1} \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{t^{\alpha+1}+u}\, du = t^{\alpha^2+1} \left(\int_0^t + \int_t^\infty\right) \frac{u^{-\alpha}}{t^{\alpha+1}+u}\, du \\
&\leq t^{\alpha^2+1} \left[t^{-\alpha-1} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha}\right] = t^{\alpha^2+1} \left[\frac{t^{-2\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^\alpha}{\alpha}\right] \\
&= \frac{t^{(\alpha-1)^2}}{1-\alpha} + \frac{t^{\alpha^2+\alpha}}{\alpha} \to 0, \quad \text{für } t \to 0+.
\end{aligned}$$

Schließlich, mit $\alpha \to 1$ erhalten wir die Behauptung für $0 < \alpha \leq 1$. $\square$

Aufgabe 6. *Sei A sektoriell mit $\Re\left(\Sigma_A\right) > 0$ auf einem Banachraum X. Sei $B : X \to Y$ linear, Y ein Banachraum. Es gelte $D(A) \subset D(B)$ und für ein $\alpha \in [0,1)$:*

$$\left\|Bx\right\| \leq C \left\|Ax\right\|^\alpha \left\|x\right\|^{1-\alpha}$$

für eine konstante $C > 0$. Dann besitzt B eine eindeutige Erweiterung zu einem beschränkten Operator $B_\beta : X^\beta \to Y$ für alle $\beta \in (\alpha, 1]$.

Beweis. Es ist $X^\beta = R(A^{-\beta})$, d.h. B_β beschränkt genau dann wenn $BA^{-\beta}$ beschränkt. Es ist auch:

$$\left\|BA^{-1}x\right\| \leq \tilde{C} \left\|x\right\|^\alpha \left\|A^{-1}\right\|^{1-\alpha} \left\|x\right\|^{1-\alpha} \leq C \left\|x\right\|,$$

für $x \in AD(B) \cap D(A) = R(A) = X$, d.h. BA^{-1} ist beschränkt. Daher gilt für $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
\left\|BA^{-\beta}x\right\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\beta-1}Be^{-At}x\,dt\right\| \leq C'\int_0^\infty t^{\beta-1}\left\|Be^{-At}x\right\|\,dt \\
&\leq C''\int_0^\infty t^{\beta-1}\left\|Ae^{-At}x\right\|^\alpha \left\|e^{-At}x\right\|^{1-\alpha}\,dt \\
&\leq C\left\|x\right\|\int_0^\infty t^{\beta-1}\left(t^{-1}e^{-\delta t}\right)^\alpha e^{-\delta(1-\alpha)t}\,dt \\
&= C\left\|x\right\|\int_0^\infty t^{(\beta-\alpha)-1}e^{-\delta t}\,dt < \infty,
\end{aligned}$$

für alle $\beta \in (\alpha, 1]$. $\square$

3 Die Formel der Variation der Konstanten

3.1 Das Cauchy Problem

Definition 3.1. Sei X ein Banachraum, A sektoriell in X. Betrachte das lineare Cauchy-Problem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) + Ax = 0, t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Eine Lösung des Problems (3.1.1) auf $0 < t < T$ ist eine stetige Funktion $x : [0, T) \to X$, stetig differenzierbar auf $(0, T)$ für die gilt:

$$\begin{aligned} &x(t) \in D(A) \text{ für alle } t \in (0, T) \\ &x(t) \to x_0 \text{ für } t \to 0+, \\ &\frac{dx}{dt}(t) + Ax = 0, \text{ für } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Lemma 3.2. *Sei X ein Banachraum, A sektoriell in X. Dann ist:*

$$x : [0, T) \to X, \quad x(t) := e^{-At}x_0,$$

eine eindeutige Lösung von (3.1.1).

Beweis. Wegen Satz 1.9 ist klar: $x(t) = e^{-At}x_0$ ist eine Lösung. Wir zeigen x eindeutig. Sei $z(t)$ eine Lösung auf $[0, T)$ und setzen wir $y(t, s) := e^{-A(t-s)}z(s)$ für $0 < s \leq t < T$. Dann gilt:

$$\partial_s y(t, s) = Ae^{-A(t-s)}z(s) - Ae^{-A(t-s)}z(s) = 0,$$

für alle $0 < s \leq t < T$. Daher folgt:

$$z(t) = y(t, t) = y(t, 0) = e^{-At}x_0 = x(t),$$

auf $(0, T)$. □

Definition 3.3. Sei X ein Banachraum, A sektoriell in X. Betrachte das inhomogene Problem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) + Ax = f(t), t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Eine Lösung des Problems (3.1.1) auf $0 < t < T$ ist eine stetige Funktion $x : [0,T) \to X$, stetig differenzierbar auf $(0,T)$ für die gilt:

$$\begin{aligned}
&x(t) \in D(A) \text{ für alle } t \in (0,T)\\
&x(t) \to x_0 \text{ für } t \to 0+,\\
&\frac{dx}{dt}(t) + Ax = f(t), \text{ für } t \in (0,T).
\end{aligned}$$

Lemma 3.4. *Sei $f : (0,T) \to X$ lokal Hölder-stetig zum exponenten $\theta \in (0,1]$ mit $\varepsilon_\tau := \int\limits_0^\tau \|f(s)\|\, ds < \infty$ für ein $\tau > 0$. Für $t \in (0,T)$ setze:*

$$x(t) := e^{-At}x_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds, \tag{3.1.3}$$

dann ist F eine Lösung des Inhomogenen Cauchy-Problems (3.1.2).

Beweis. Setzen wir:

$$x_\tau(t) := e^{-At}x_0 + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds,$$

mit $f(s) = 0$ für $s \leq 0$. Dann gilt:

$$\|x(t) - x_\tau(t)\| \leq \int\limits_{t-\tau}^t \left\|e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)\|\, ds \leq \tau \to 0 \text{ für } \tau \to 0+,$$

gleichmäßig auf $[0, t_0]$ für alle $t_0 < T$. Weiter ist x_τ ist stetig, da:

$$\begin{aligned}
\|x_\tau(t+h) - x_\tau(t)\| \leq \left\|\left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) x_0\right\| &+ \int\limits_0^{t-\tau} \left\|\left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)\|\, ds\\
&+ \int\limits_{t-\tau}^{t+h-\tau} \left\|e^{-A(t+h-s)}\right\| \|f(s)\|\, ds\\
\leq C\|Ax_0\|\, h + C' \frac{\varepsilon_\tau (t-\tau)^{\theta+1}}{\theta+1} h^\theta &+ C''\varepsilon_\tau h \to 0,
\end{aligned}$$

für $h \to 0+$ nach Satz 2.6. Daher ist auch $x(t)$ stetig auf $[0,T)$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\|x(t)-x(0)\| &\le \left\|\left(e^{-At}-\mathbb{I}\right)x_0\right\| + \int\limits_0^t \left\|e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)\|\, ds \\ &\le \|Ax_0\|\, Ct + C'\varepsilon_\tau t \to 0, \text{ für } t \to 0+,\end{aligned}$$

auch nach Satz 2.6.

Für $0 \le s < t < T$ ist $e^{-At}x_0 + e^{-A(t-s)}f(s) \in D(A)$, also gilt auch für die Riemann-Summen: $e^{-At}x_0 + \sum\limits_{\substack{j \\ t-s_j\ge\tau}} e^{-A(t-s_j)}f(s_j)\Delta_{s_j} \in D(A)$. Dann folgt:

$$A\left(e^{-At}x_0 + \lim_{\Delta s_j\to 0} \sum_{\substack{j \\ t-s_j\ge\tau}} e^{-A(t-s_j)}f(s_j)\right) = Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^{t-\tau} Ae^{-A(t-s)}f(s)\, ds,$$

da A abgeschlossen. D.h. wir haben $x_\tau(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T)$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}Ax_\tau(t) &= Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^{t-\tau} Ae^{-A(t-s)}f(s)\, ds \\ &= Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^{t-\tau} Ae^{-A(t-s)}\left(f(s)-f(t)\right)\, ds - \int\limits_0^{t-\tau} \frac{d}{dt}e^{-A(t-s)}f(t)\, ds \\ &= Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^{t-\tau} Ae^{-A(t-s)}\left(f(s)-f(t)\right)\, ds - \left(e^{-At}-e^{-A\tau}\right)f(t).\end{aligned}$$

Also gilt für alle $\tau > 0$, und alle $t \in [0,T)$:

$$\begin{aligned}\|Ax_\tau(t)-Ax_\tau(0)\| &\le \left\|A\left(e^{-At}-\mathbb{I}\right)x_0\right\| + \int\limits_0^{t-\tau} \left\|Ae^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)-f(t)\|\, ds \\ &\qquad + \left\|e^{-At}-e^{-A\tau}\right\| \|f(t)\| \\ &\le Ct^\theta \left\|A^{1+\theta}x_0\right\| + C\int\limits_0^{t-\tau} (t-s)^{\theta-1}\, ds < \infty.\end{aligned}$$

Dann aber, da A abgeschlossen, folgt:

$$\begin{aligned}
Ax_\tau(t) \to & Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)}\left(f(s)-f(t)\right)\,ds - \left(e^{-At}-\mathbb{I}\right)f(t) \\
&= Ae^{-At}x_0 + \int\limits_0^t Ae^{-A(t-s)}f(s)\,ds = Ax(t),
\end{aligned}$$

d.h. $x(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T)$.

Nun bemerken wir:

$$\begin{aligned}
\|Ax_\tau(t) - Ax(t)\| &\le \left\| \int\limits_{t-\tau}^t Ae^{-A(t-s)}\left(f(s)-f(t)\right)\,ds \right\| + \left\| \int\limits_{t-\tau}^t \frac{d}{dt}e^{-A(t-s)}f(t)\,ds \right\| \\
&\le C \int\limits_{t-\tau}^t (s-t)^{1-\theta}\,ds + \left\|\left(\mathbb{I}-e^{-A\tau}\right)f(t)\right\| \to 0 \text{ für } \tau \to 0,
\end{aligned}$$

gleichmäßig auf $[t_0,t_1] \subset (0,T)$. Wie im Beweis von Satz 2.6 für $x \in X^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(e^{-At}-\mathbb{I}+At\right)x\right\| &= \left\| \int\limits_0^t A\left(\mathbb{I}-e^{-As}\right)x\,ds \right\| = \left\| A\int\limits_0^t \int\limits_0^s Ae^{-A\nu}x\,d\nu\,ds \right\| \\
&\le \left\|A^{1+\alpha}x\right\| \int\limits_0^t \int\limits_0^s \left\|A^{1-\alpha}e^{-A\nu}\right\|\,d\nu\,ds \\
&\le \left\|A^{1+\alpha}x\right\| C \int\limits_0^t \int\limits_0^s \nu^{\alpha-1}\,d\nu\,ds = \left\|A^{1+\alpha}x\right\| \frac{C}{\alpha}\int\limits_0^t s^\alpha\,ds \\
&= \left\|A^{1+\alpha}x\right\| \frac{C}{\alpha\,(1+\alpha)} t^{\alpha+1} \to 0, \text{ für } t \to 0+.
\end{aligned}$$

Und da $X^{1+\alpha}$ dicht in X^1, gilt dies für alle $x \in D(A)$. Damit folgt für $t > \tau$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left\| \left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) \int\limits_0^{t-\tau} e^{-A(t-s)} f(s)\,ds + \int\limits_{t-\tau}^{t+h-\tau} e^{-A(t+h-s)} f(s)\,ds \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. + Ah \int\limits_0^{t-\tau} e^{-A(t-s)} f(s)\,ds - e^{-A\tau} f(t-\tau) h \right\| \\
&= \frac{1}{h}\left\| \left(e^{-Ah} - \mathbb{I} + Ah\right) \int\limits_0^{t-\tau} e^{A(t-s)} f(s)\,ds \right\| + \frac{1}{h}\left\| \int\limits_{t-\tau}^{t+h-\tau} e^{-A(t+h-s)} \left(f(s) - f(t-\tau)\right)\,ds \right\| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{h}\left\| \int\limits_{t-\tau}^{t+h-\tau} e^{-A(t+h-s)} - e^{-A\tau}\,ds\, f(t-\tau) \right\| \\
&\leq \frac{1}{h}\frac{C}{\theta(1+\theta)} h^{\theta+1} \int\limits_0^{t-\tau} (t-s)^{-(\theta+1)} \|f(s)\|\,ds + \frac{1}{h}\int\limits_{t-\tau}^{t+h-\tau} \left\|(s-t+\tau)^\theta\right\|\,ds \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{h}\frac{h^2}{2}\|f(t-\tau)\| \\
&\leq \frac{C\tau\varepsilon_\tau}{\theta(1+\theta)} h^\theta + \frac{1}{h}\frac{h^{\theta+1}}{\theta+1} + h\|f(t-\tau)\| \to 0, \text{ für } h \to 0.
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt:

$$\frac{d}{dt} x_\tau(t) = -Ax_\tau(t) + e^{-A\tau} f(t-\tau) \to -Ax(t) + f(t) = \frac{d}{dt} x(t),$$

auf $(0,T)$. □

Literatur

[Achieser] N.I. Achieser, I.M. Glasmann: Theorie Linearer Operatoren im Hilbertraum, Harri Deutsch (1981).

[Dunford & Schwartz] N. Dunford, J. T. Schwartz: Linear Operators 1,2, Willey & Sons, (1963).

[Evans] L. C. Evans: Partial Differential Equations, AMS (1998).

[Henry] D. Henry: Geometric Theory of Semilinear Partial Differential Equations, Springer (1981).

[Kato] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer (1980).

[Lauterbach] R. Lauterbach: Skript zu der Vorlesung Funktionalanalysis, WS 2003/04, Universität Hamburg.