Ausarbeitung zum Thema:
Port-hamiltonsche Systeme

Von F. Schulz

WS 05/06

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Diese Ausarbeitung für das Seminar über Dynamischen Systeme und Gewöhnliche Differentialgleichungen befasst sich mit der Thematik der Port- hamiltonschen Systeme. Die Diskussion über Netzwerk- Modellierungen von physikalischen Systemen führt zu einer geometrisch definierten Klasse von Systemen, diese werden Port- hamiltonsche Systeme genannt. Dies ermöglicht dann einen einheitlichen mathematischen Rahmen für die Beschreibung von physikalischen Systemen.
Die grundlegenden Einführungen und die verschiedenen Beispiele sollen den Stoff anschaulich und verständlich darstellen, um das komplexe Thema in einem allgemeinen Überblick zu erfassen.

2 Port- hamiltonsche Systeme

2.1 Euler-Lagrange- und Hamiltonsche Gleichungen

Als Einführung sollen vorerst die Grundlegenden Definitionen gebracht werden, die nötig sind, um die Port- hamiltonschen Systeme zu verstehen.

Definition:
Die Euler-Lagrange Gleichung ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q}) = \tau \tag{1}$$

wobei $q = (q_1, ..., q_k)^T$ die generalisierten Konfigurationskoordinaten für ein System mit k Freiheitsgraden sind; der Lagrangian berechnet sich aus $L = K - P$ wobei K die kinetische Energie und P die potentielle Energie sind und $\tau = (\tau_1, ..., \tau_k)^T$ der Vektor der generalisierten Kraft ist, der auf das System wirkt. Weiterhin ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ der Spaltenvektor der partiellen Ableitungen von $L(q,\dot{q})$ zu den generalisieten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$, analog für $\frac{\partial L}{\partial q}$.

Bemerkung:
In einem standartisierten mechanischen System ist die kinetische Energie gegeben durch

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} \tag{2}$$

wobei die $k \times k$ Trägheitsmatrix M der generalisierten Masse symmetrisch und positiv definit ist für alle q. In diesem Fall ist der Vektor der generalisierten Momente $p = (p_1, ..., p_k)^T$ für alle Lagrangien L definiert als $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ also $p = M(q)\dot{q}$.

Definition:
Definiert man nun den Zustandsvektor als $(q_1, ..., q_k, p_1, ..., p_k)^T$, so ergeben sich aus den obigen Euler- Lagrange Gleichungen (1) 2k Gleichungen erster Ordnung:

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) = M^{-1}(q)p \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) + \tau
\end{aligned} \tag{3}
$$

wobei $H(q,p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + P(q)$ die Gesamtenergie des Systems ist. Diese Gleichungen (3) nennt man die Hamiltonschen Gleichungen der Bewegung, H ist die Hamilton Funktion.

Bemerkung:
Aus den Hamiltonschen Gleichungen (3) folgt das Energiegleichgewicht

$$
\frac{d}{dt}H = \frac{\partial^T H}{\partial q}(q,p)\dot{q} + \frac{\partial^T H}{\partial p}(q,p)\dot{p} = \frac{\partial^T H}{\partial p}(q,p)\tau = \dot{q}^T\tau, \tag{4}
$$

das aussagt, dass der Anstieg der Energie des Systems gleich der hineingesteckten Arbeit ist; die Energie bleibt also erhalten.

System (3) ist ein Beispiel für ein Hamiltonsches System, welches in allgemeiner Form gegeben ist wie folgt.

Definition:
Ein Hamiltonsches System ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p), \qquad (q,p) = (q_1, ..., q_k, p_1, ..., p_k), \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) + B(q)u, \qquad u \in \mathbb{R}^m, \\
y &= B^T(q)\frac{\partial H}{\partial p}(q,p) = B^T(q)\dot{q}, \qquad y \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Hierbei ist B(q) die Input- Kraft- Matrix, wobei dann B(q)u die generalisierte Kraft anzeigt, die aus dem kontrollierten Input u resultiert. Der Zustandsraum von (5) mit den lokalen Koordinaten (q,p) wird auch Phasenraum genannt. Im Falle von m = k und einer überall invertierbaren Matrix B(q) spricht man von einem Hamiltonschen System, das „völlig im Betrieb ist“.

Bemerkung:
Für das allgemeine Hamiltonsche System ergibt sich das Energiegleichgewicht aufgrund der output Gleichungen für y dann mit

$$
\frac{dH}{dt}(q(t), p(t)) = u^T(t)y(t) \tag{6}
$$

Damit sind die ersten Grundlagen eingeführt, so dass wir nun zu der eigentlichen Thematik der Port- Hamiltonschen Systeme fortschreiten können.

2.2 Die Zusammensetzung Port- hamiltonscher Systeme

Eine Verallgemeinerung der Klasse der Hamilton Systeme führt in die Richtung derjenigen Systeme, die über lokale Koordinaten beschrieben werden.

Definition:
Ein Port- hamiltonsches System ist gegeben durch die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u, \qquad x \in \chi, u \in \mathbb{R}, \\ y &= g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x), \qquad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{7}$$

wobei J(x) eine von x abhängige $n \times n$ Matrix ist, die schiefsymmetrisch ist $J(x) = -J^T(x)$, sie wird Strukturmatrix genannt. $x = (x_1, ..., x_n)$ sind die lokalen Koordinaten für eine n- dimensionale Mannigfaltigkeit χ; H ist die Hamilton Funktion.

Bemerkung
Aufgrund der Schiefsymmetrie von J(x) ergibt sich das Energiegleichgewicht

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t) \tag{8}$$

als verlustfrei, wenn $H \geq 0$.

Bemerkung
Man beachte, dass das Hamliton System (5) ein Spezialfall des Port- hamilton System (7) ist für $x = (q,p)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$, unabhängig von x, mit I_k k- dimensionale Einheitsmatrix, J offensichtlich schiefsymmetrisch. Weiterhin ist $g(q,p) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(q) \end{pmatrix}$.

Anmerkung:
Es sei angemerkt, dass die Strukturmatrix J in vielen Beispielen der folgenden Integrabilitätsbedingung genügt:

$$\sum_{l=1}^{n}[J_{lj}(x)\frac{\partial J_{ik}}{\partial x_l}(x) + J_{li}(x)\frac{\partial J_{kj}}{\partial x_l}(x) + J_{lk}(x)\frac{\partial J_{ji}}{\partial x_l}(x)] = 0, \qquad \forall i,j,k = 1,...n \tag{9}$$

In diesem Fall findet man für jede Umgebung eines Punktes x_0, für die der Rang der Matrix J(x) konstant ist lokale Koordinaten $\tilde{x} = (q,p,s) = (q_1,...,q_k,p_1,...,p_k,s_1,...,s_l)$, so dass J die Form

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

annimmt. Der Rang von J ergibt sich zu 2k und n=2k+l. Hierbei werden die Koordinaten (q,p,s) kanonische Koordinaten genannt und J, die schiefsymmetrisch ist und der Bedingung (9) genügt, heisst *Poisson- Struktur- Matrix*. Für diese kanonischen Koordinaten ergibt sich das Port- hamilton System dann zu

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,s) + g_q(q,p,s)u, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,s) + g_p(q,p,s)u, \\ \dot{s} &= g_s(q,p,s)u, \\ y &= g_q^T(q,p,s)\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,s) + g_p^T(q,p,s)\frac{\partial H}{\partial p}(q,p,s) + g_s^T(q,p,s)\frac{\partial H}{\partial s}(q,p,s) \end{aligned} \tag{11}$$

Im Gegensatz zu traditionellen Hamilton Systemen, die auf der Bewegungsgleichung von Euler- Lagrange beruhen, folgern sich die Port- hamilton Systeme aus den Netzwerkmodellen von physikalischen Systemen. Der Kernaspekt der Theroie der Port- hamilton Systeme ist die Formalisierung der Basis- Verbindungsgesetze zusammen mit den Krafterhaltungselementen durch geometrische Strukturen, um dann die Hamilton Funktion als Totalenergie des Systemes zu definieren. Für ein gegebenes Port- hamilton System können also die Strukturmatrix J(x) und die Inputmatrix g(x) direkt mit der Netzwerk Verbindungs Struktur assoziiert werden, während die Hamilton Funktion lediglich die Summe der Energien bedeutet.

2.3 Beispiele

Kommen wir in diesem Kapitel zu zwei Beispielen, um das bis hierhin Vorgestellete noch weiter zu verdeutlichen und auch, um den durchaus gegebenen praktischen Bezug aufzuzeigen.

Beispiel 1:
Wir stellen uns einen kontrollierten LC- Kreislauf vor, der aus zwei Induktoren mit magnetischer Energie $H_1(\varphi_1), H_2(\varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 die magnetischen Fluß- Verbindungen sind, und einen Kondensator mit elektrischer Energie $H_3(Q)$ besteht. Q ist hierbei die Ladung. Mit linearen Elementen sind $H_1(\varphi_1) = \frac{1}{2L_1}\varphi_1^2$, $H_2(\varphi_2) = \frac{1}{2L_2}\varphi_2^2$ und $H_3(Q) = \frac{1}{2C}Q^2$. Weiterhin sei $V = u$ die Spannungsquelle. Kirchhoffs Gesetz führt dann direkt auf die dynamischen Gleichungen

$$
\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u
$$

$$
y = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}
$$

mit $H(Q, \varphi_1, \varphi_2) := H_1(\varphi_1) + H_2(\varphi_2) + H_3(Q)$ als der gesamten Energie. J ist offensichtlich schiefsymmetrisch und genügt aufgrund der konstanten Einträge auch der Integrabilitätsbedingung (9). Jeder derartige LC- Kreislauf mit unabhängigen Elementen kann als ein Port- hamiltonsches System modelliert werden.

Beispiel 2:
Nun stelle man sich einen starren Körper vor, der sich um seinen eigenen Mittelpunkt der Masse dreht, die Erdanziehung sei aussen vor. Die Energievariablen seien die drei Komponenten des Körpers Drehmoments p entlang der drei Achsen: $p = (p_x, p_y, p_z)$. Die kinetische Energie ist

$$
H(p) = \frac{1}{2}(\frac{p_x^2}{I_x} + \frac{p_y^2}{I_y} + \frac{p_z^2}{I_z}),
$$

wobei I_x, I_y und I_z die Trägheitsmomente sind. Die Dynamik wird durch Eulers Gleichung wie folgt beschrieben:

$$
\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix}}_{J(p)} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_z} \end{pmatrix} + g(p)u
$$

Man kann zeigen, dass die schiefsymmetrische Matrix J(p) (9) erfüllt.
Für skalaren Input bedeutet der Term $g(p)u$ das Drehmoment um die Achsen mit den Koordinaten $g = (b_x, b_y, b_z)^T$ mit dem entsprechenden Output gegeben durch

$$
y = b_x \frac{p_x}{I_x} + b_y \frac{p_y}{I_y} + b_z \frac{p_z}{I_z}.
$$

Dies ist ebenso die Geschwindigkeit um die gleichen Achsen $(b_x, b_y, b_z)^T$.

3 Eigenschaften von Port- hamiltonschen Systemen

In diesem Abschnitt wollen wir uns ein wenig mit der Theorie der Port- hamiltonschen Systeme befassen. Die bis hierhin betrachteten Systeme beruhen auf der Netzwerkmodellierung von physikalischen Systemen ohne Verlustelemente. Ein Port- hamilton System ist definiert durch eine Zustandsraum- Mannigfaltigkeit, ausgestattet durch das Tripel (J, g, H). Das Paar (J(x), g(x)) bedeutet hierbei die Abhängigkeitsstruktur des Systems, wobei g(x) die einzelnen „Ports“ des Systems modelliert. Unabhängig von der Abhängigkeitsstruktur des Systems definiert die Funktion $H : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ die gesamte gespeicherte Energie. Weiterhin sind Port- hamiltonsche Systeme modulär in der Weise, dass eine Energieerhaltungs- Verbindung von **mehreren Port- hamiltonschen Systemen wieder ein Port- hamiltonsches System definiert**. Die Hamilton Funktion ergibt sich dann einfach aus der Summe der einzelnen Hamilton Funktionen.

Eine weitere Eigenschaft der Port- hamiltonschen Systeme ist durch das Energie-Gleichgewicht $\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t)$ gegeben. Physikalisch korrespondiert das mit der Tatsache, dass die interne Verbindungsstruktur energieerhaltend ist, was auf der Schiefsymmetrie von J(x) beruht. Hierbei sind die Energievariablen der „Ports“ u und y durch g(x) definiert und $u^T y$ ist die extern bereitgestellte Energie.

Die Strukturmatrix J(x) enthält oftmals nützliche Informationen über die Dynamik eines Port- hamiltonschen Systems. Und da die Strukturmatrix direkten Bezug auf die Modellierung des Systems hat, liegen hiermit auch direkte physikalische Interpretationsmöglichkeiten vor. Eine der wichtigsten Eigenschaften hierbei ist die Existenz von dynamischen, invarianten Unabhängigen von der Hamilton Funktion, so genannten **Casimir Funktionen**. Hierfür betrachten wir folgendes Verhältnis

$$\frac{\partial^T C}{\partial x}(x)J(x) = 0, \qquad x \in \chi \tag{12}$$

für eine unbekannte glatte Funktion $C : \chi \rightarrow \mathbb{R}$. Falls Gleichung (12) eine Lösung C hat, dann genügt die Ableitung nach der Zeit von C des Port- hamiltonschen Systems (7)

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\partial^T C}{\partial x}(x)J(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) + \frac{\partial^T C}{\partial x}(x)g(x)u \\ &= \frac{\partial^T C}{\partial x}(x)g(x)u \end{aligned} \tag{13}$$

Wenn also für den Input $u = 0$ oder aber für wilkürliche Inputfunktionen stattdessen $\frac{\partial^T C}{\partial x}(x)g(x) = 0$ gilt, bleibt die Funktion C(x) konstant über die ganze Kurve, unabhängig von der präzisen Form der Hamilton Funktion H. Eine Funktion $C : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man Casimir Funktion der Strukturmatrix J(x). Die Existenz von nicht- trivialen Lösungen C von (12) setzt voraus, dass $RgJ(x) < dim\chi$ ist und dass weiterhin die Integrabilitätsbedingungen (9) erfüllt sind.

Beispiel:
Im oben betrachteten Beispiel 1 ist $\phi_1 + \phi_2$ eine Casimir Funktion und im Beispiel 2 ist $\frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2$ eine Casimir Funktion.

Wir bleiben noch ein wenig bei dieser Thematik: Aus (13) folgt, dass die Niveausmengen $L_C := \{x \in \chi | C(x) = c\}, c \in \mathbb{R}$ einer Casimir Funktion C invariante Mengen für die autonomen Hamilton Systeme $\dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x)$ sind. Desweiteren ist die durch jede Niveaumenge L_C begrenzte Dynamik gegeben als so genannte **reduzierte Hamilton Dynamik** $\dot{x}_C = J_C(x_C)\frac{\partial H_C}{\partial x}(x_C)$, wobei H_C und J_C die Beschränkungen von H bzw. J bzgl. L_C sind. Allgemeiner, seien $C = (C_1, ..., C_r)$ unabhängige Casimir Funktionen, dann nimmt in jeder Menge von lokalen Koordinaten $(z_1, ..., z_l, C_1, ..., C_r)$ für χ die Hamilton Dynamik folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{J}(z, C) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial C} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Dies führt dann auf die reduzierte Hamilton Dynamik $\dot{z} = \tilde{J}(z, C = c)\frac{\partial H}{\partial z}$ für jede Menge $\{x \in \chi | C_1(x), ..., C_r(x)) = c \in \mathbb{R}^r\}$.

Die Existenz von Casimir Funktionen hat direkte Konsequenzen auf die Stabilitätsanalyse des Port- hamiltonschen Systems (7) für $u = 0$. In diesem Fall ist nicht nur $\frac{dH}{dt} = 0$, sondern auch $\frac{d}{dt}(H + H_a(C_1, ..., C_r))(x(t)) = 0$ für jede Funktion $H_a : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Daraus folgt, auch wenn H nicht positiv definit ist in einem Gleichgewicht $x^* \in \chi$, dann kann $H + H_a(C_1, ..., C_r)$ positiv definit sein bei x^* für eine passende Wahl von H_a und somit als Lyapunov Funktion dienen. Diese Methode zur Stabilitätsanalyse nennt man **Energie-Casimir Methode**.

4 Port- hamiltonsche Systeme mit Reibung

Eine Energieumwandlung ist im Rahmen des Port- hamiltoinschen Systems (7) dadurch gegeben, dass einige Ports durch die Widerstandselemente begrenzt werden. Dies ist auch in anderer Weise umsetztbar. Dafür ersetzte man in (7) den Term $g(x)u$ und die Output Gleichung für y durch

$$\begin{pmatrix} g(x) & g_R(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_R \end{pmatrix} = g(x)u + g_R(x)u_R \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ g_R^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Hierbei sind $u_R, y_R \in \mathbb{R}^{m_r}$ die Energievariablen an den Ports, welche dann durch die statischen Widerstandselemente $u_R = -F(y_R)$ begrenzt werden. Für die Widerstands-Charakteristik $F : \mathbb{R}^{m_r} \to \mathbb{R}^{m_r}$ gilt die Bedingung $y_R^T F(y_R) \geq 0$.

Wir beschränken uns hier auf Port- hamiltonsche Systeme, welche durch **lineare** Widerstandselemente beschränkt werden. Wir setzen also $u_R = -Sy_R$ für eine positiv semidefinite und symmetrische Matrix $S = S^T \geq 0$. Damit erhalten wir dann ein Modell folgender Form, dass **Port- hamiltonsches System mit Reibung** genannt wird:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (J(x) - R(x))\frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\
y &= g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x)
\end{aligned} \tag{17}
$$

Dabei ist dann $R(x) := g_R(x)Sg_R^T(x)$ eine positiv semidefinite und symmetrische Matrix, welche glatt von x abhängt.

Bemerkung
In diesem Fall ergibt sich das Energiegleichgewicht (4) dann speziell zu

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt}(x(t)) &= u^T(t)y(t) - \frac{\partial^T H}{\partial x}(x(t))R(x(t))\frac{\partial H}{\partial x}(x(t)) \\
&\leq u^T(t)y(t).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Anmerkung
Man beachte, dass in diesem Fall zwei geometrische Strukturen eine Rolle spielen: Einerseits die interne Verbindungsstruktur, die durch J(x) gegeben ist und andererseits die hinzugefügte Widerstandsstruktur, die durch R(x) gegeben ist, welche wiederum durch die "Port- Struktur" $g_R(x)$ und die lineare bestimmte Relation $u_R = -Sy_R$ der Widerstandselemente determiniert wird.

Betrachten wir nun die in Kapitel 3 eingeführten Casimir Funktionen für ein Port-hamiltonsches System mit Reibung. Hierfür interessieren uns diejenigen Funktionen $C : \chi \rightarrow \mathbb{R}$, die dem folgenden genügen:

$$
\frac{\partial^T C}{\partial x}(x)(J(x) - R(x)) = 0 \qquad x \in \chi \tag{19}
$$

Zudem muss die Ableitung nach der Zeit des Systems (17) für $u = 0$ Null sein, unabhängig der Hamilton Funktion H.

Weiter können wir strengere Casimir Funktionen betrachten, welche für beide oben angesprochenen geometrischen Strukturen Gültigkeit besitzen, dies würde dann auf

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^T C}{\partial x}(x)J(x) &= 0 \\
\frac{\partial^T C}{\partial x}(x)R(x) &= 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

führen.

Falls die unabhängigen Funktionen $C_1, ..., C_r$ (20) erfüllen, nimmt die Dynamik (17) für jede Menge von lokalen Koordinaten $(z, C) = (z_1, ..., z_l, C_1, ..., C_r)$ für $u = 0$ die folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{J}(z, C) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{R}(z, C) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Diese kann dann zu jeder Niveaumenge $\{x \in \chi \mid (C_1(x), ..., C_r(x)) = c \in \mathbb{R}^r\}$ beschränkt werden auf

$$\dot{z} = [\tilde{J}(z, C = c) - \tilde{R}(z, C = c)] \frac{\partial H}{\partial z}(z, C = c). \tag{22}$$

5 Abschluss

5.1 Schlusswort

Kommen wir zum Abschluss der Ausarbeitung. Überblickend sind anfangs die verschiedenen „Bauteile“, die für die Port- hamiltonschen Systeme benötigt werden, eingeführt worden. Zur Auseinandersetzung mit dem Thema sind vor allem die Eigenschaften und die abgewandelten Formen beschrieben worden. Natürlich konnten in diesem Abriß nur die ersten Ideen dieses umfangreichen und vor allem noch längst nicht erschöpften Bereichs behandelt werden. Trotzdem hoffe ich, es ist mir gelungen, dieses durchaus interessante Thema verständlich und anschaulich darzustellen. Unten sind nun noch die Quellen aufgeführt, die ich zur Bearbeitung dieses Aufsatzes benötigt habe; dort sind dann auch andere Aspekte und weiterreichende Literaturvorschläge zu finden.

5.2 Literaturverzeichnis

Diese Ausarbeitung beruht hauptsächlich auf folgenden drei Artikeln:

- van der Schaft, A. J. - Port- Hamiltonian systems: network modeling and control of nonliniear physical systems

- van der Schaft, A. J. - Port-controlled Hamiltonian Systems: towards a theory for control and design of nonlinear physical systems

- van der Schaft, A. J. - Implicit port-controlled Hamiltonian systems