

Strömungsmechanik

-oder-

Gruppen von Diffeomorphismen und die Bewegung von
inkompressiblen Fluiden

Eva Bartram Benjamin Hügelmann

01. September 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Überblick	3
2	Überblick Mannigfaltigkeiten und Abbildungen	5
3	Integration von H^s-Vektorfeldern	8
4	Differenzierbare Strukturen für die Gruppe der volumenerhaltenden und symplektischen Diffeomorphismen	9
5	Die Deformation von \mathcal{D} nach \mathcal{D}_μ	11
6	Diffeomorphismen mit invarianten Untermannigfaltigkeiten	12
7	Eine schwache riemannsche Metrik für \mathcal{D}_μ^s und deren geodätische Kurven	14
8	Das Spray auf \mathcal{D}_μ^s und die Euler-Gleichungen mit Kräften	17
9	Regularität, Bemerkungen zu Vollständigkeit und Benutzung von anderen Funktionenräumen	19
10	Zusammenhang mit den klassischen Gleichungen	21
11	Zusammenfassung der Ergebnisse in klassischer Notation	24
11.1	Problem (Euler-Gleichungen)	24
11.2	Ergebnisse für die Euler-Gleichungen	24

1 Einleitung

In diesem Vortrag tragen wir die Ergebnisse von David G.Ebin und Jerrold Marsden vor. Diese befassten sich in der zugrundeliegende wissenschaftlichen Arbeit mit der Mannigfaltigkeitenstruktur von bestimmten Gruppen von Diffeomorphismen und dem Gebrauch dieser Struktur, um scharfe Existenz- und Eindeutigkeitsätze für die klassischen Euler-Gleichungen für inkompressible Fluide auf kompakten C^∞ riemannschen, orientierten n -Mannigfaltigkeit M , zu zeigen. Am Ende des Vortrags werden wir die Ergebnisse noch einmal zusammenfassen.

1.1 Überblick

Die Essenz der Methode ist der Transfer des Problems von der klassischen Euler-Gleichung auf das Problem des Auffindens einer geodätischen Kurve in der Gruppe aller volumenerhaltenden Diffeomorphismen, auf welche die Methoden globaler Analysis und unendlich dimensionaler Geometrie angewendet werden können.

Einige Ergebnisse verschärfen und erweitern bekannte Ergebnisse von Omori und Ebin. Beispielsweise hat Omori gezeigt, dass alle (orientierungserhaltenden) C^∞ -Diffeomorphismen \mathcal{D} einer kompakten Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu $\mathcal{D}_\mu \times \mathcal{V}$, wobei \mathcal{D}_μ die Gruppe der volumenerhaltenden Diffeomorphismen, μ eine geg. Volumenform auf M und \mathcal{V} die Menge aller Volumen $\nu > 0$ mit $\int_M \nu = \int_M \mu$ sind. Da \mathcal{V} zusammenziehbar ist, ist \mathcal{D}_ν ein Deformationsretrakt von \mathcal{D} . Einfachere Methoden benutzend, wird der Homöomorphismus zu einem Diffeomorphismus verschärft(Satz 5.1).

Die Tatsache, dass \mathcal{D}_μ eine ILH(inverse-limit-Hilbert) Lie-Gruppe ist wurde von Ebin für Mannigfaltigkeiten ohne Rand bewiesen. Hier werden auch Gruppen von symplektischen Diffeomorphismen behandelt(Satz 4.5).

Die Wichtigkeit der Gruppe \mathcal{D}_μ liegt darin, das sie der zugehörige Konfigurationsraum für die Hydrodynamik eines inkompressiblem Fluids ist. Es muss gezeigt werden, dass die Lie-Algebra von \mathcal{D}_μ und $T_e \mathcal{D}_\mu$ (Tangentialraum an der Identität $e \in \mathcal{D}_\mu$) aus den (C^∞) divergenzfreien Vektorfeldern auf M besteht.

Die Verbindung zwischen \mathcal{D}_μ und Hydrodynamik ist folgende: Die gegenwärtige Bewegung eines perfekten inkompressiblen Fluids ist eine geodätische Kurve $\mu_t \in \mathcal{D}_\mu$ unter Beachtung der rechts- (jedoch nicht links-) invarianten Metrik auf \mathcal{D}_μ , welche an $e \in \mathcal{D}_\mu$ gegeben ist durch

$$(X, Y) = \int_M \langle X(m), Y(m) \rangle_m \mu(m) \quad ,$$

wobei $X, Y \in T_e \mathcal{D}_\mu$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ die Metrik auf $T_m M$ und μ eine durch die Metrik induzierte Volumenform auf M ist. Das zugehörige Spray(der vektorfeldgenerierende geodätische Fluss auf $T\mathcal{D}_\mu$) wird in Satz 8.1 berechnet. Man darf geodätische Kurven nicht mit einparametrische Untergruppen verwechseln! In der Tat ist eine einparametrische Untergruppe einer Diffeomorphismengruppe nur der Fluss eines Vektorfelds auf M .

Um die Ergebnisse von Ebin und Marsden zu erhalten, ist es notwendig, \mathcal{D} zu einer Hilbert-Mannigfaltigkeit \mathcal{D}^s , den Diffeomorphismen der Sobolev-klasse H^s , zu erweitern. Dies ist eine topologische Gruppe, falls $s > \frac{n}{2} + 1$ (nach Ebin). Obwohl \mathcal{D}^s keine Lie-Gruppe ist (,da links-Multiplikation nicht glatt ist), wird in

Satz 3.1 gezeigt werden, dass \mathcal{D}^s eine Exponentialabbildung in gleicher Weise wie eine Lie-Gruppe hat. Das läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass ein H^s -Vektorfeld auf M , einen H^s -Fluss hat. Dennoch kann die zugehörige Exponentialabbildung nicht C^1 sein, da sie keine Umgebung der Identität überdeckt.

Die Beziehung zwischen geodätischen Kurven auf \mathcal{D}_μ (\mathcal{D}_μ^s) und den klassischen Euler-Gleichungen ist folgender: Seien $\eta_t \in \mathcal{D}_\mu$ eine geodätische Kurve unter Einhaltung der obigen Metrik, $v_t = \left(\frac{d}{dt}\right)\eta_t$ die Geschwindigkeit und $u_t = v_t \circ \eta_t^{-1}$, dann wird u_t ein Vektorfeld auf M sein.

Wie gezeigt werden wird, ist u_t eine Lösung der klassischen Euler-Gleichungen für ein perfektes Fluid, welche folgende sind:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_t}{\partial t} + \nabla_{u_t} u_t = \text{grad} p_t & , \\ \text{div} u_t = 0 & , \\ u_t \text{ gegeben bei } t = 0 & , \end{cases}$$

wobei der Druck $p_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls zu bestimmen ist, und ∇ die kovariante Ableitung ist.

Daher löst man das obige Problem der Existenz und Eindeutigkeit, wenn man eine geodätische Kurve auf \mathcal{D}_μ oder \mathcal{D}_μ^s finden kann. Es soll erklärt werden, wie man dies später macht.

Die nicht-lineare Natur der Euler-Gleichungen macht eine Analyse mit klassischen Methoden sehr schwer und die Ergebnisse, die man dabei erhält, sind auch nur teilweise erfolgreich. Man weiss, dass man für zwei Dimensionen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für jede Zeit hat (Wolibner und Kato). Für drei Dimensionen ist bekannt, dass Lösungen für kleine Zeitintervalle in einigen Spezialfällen existieren (Lichtenstein und Gyunter). Eine der Hauptergebnisse von Ebin und Marsden ist die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für kleine Zeitintervalle mit scharfer differentierbarkeits- und regularitäts-Ergebnissen für die Euler-Gleichungen auf kompakten Mannigfaltigkeiten M .

Überraschend an den benutzten Methoden, welche speziell an die Form der Euler-Gleichungen angepasst sind, ist, dass das zugehörige Spray $S : T\mathcal{D}_m u^s \rightarrow T^2\mathcal{D}_m u^s$ für geodätische Kurven auf \mathcal{D}_μ^s eine glatte Abbildung ist und insbesondere kein Verlust von Ableitungen auftritt. Natürlich verlieren die Gleichungen selbst sehr wohl Ableitungen (falls $u_t \in H^s$ ist, ist $\nabla_{u_t} u_t$ nur noch H^{s-1}). der Hauptgrund dafür ist, dass wenn $u_t = v_t \circ \eta_t^{-1}$ nach t differenziert wird, muss v_t in der M -Variabel differenziert werden, welches zum Verlust von Ableitungen führt. Dieser Punkt, sowie dessen Auswirkungen auf die Euler-Gleichungen, wird in Kapitel 10 eingehender erklärt.

Ein wichtiges Problem, welches bestehen bleibt ist das Folgende:

- Existenz von Lösungen für jede Zeit (vergleiche dazu auch die Kapitel 9 und 11, wo hinreichende Bedingungen angegeben sind).

Das die Euler-Gleichungen betreffende Ergebnis ist folgendes:

- Existenz, Eindeutigkeit, Regularität und stetige Abhängigkeit der Anfangsbedingungen von Lösungen der Euler-Gleichungen für generelle kompakte Mannigfaltigkeiten für kleine Zeitintervalle $-\tau \leq t \leq \tau$.

2 Überblick Mannigfaltigkeiten und Abbildungen

Bildung der Notation und Ergebnisse, die später gebraucht werden. Wir gucken uns differenzierbare Strukturen für Räume von Abbildungen von einer Mannigfaltigkeit in eine andere Mannigfaltigkeit an. Das wichtigste Beispiel ist die Gruppe der Diffeomorphismen auf einer Mannigfaltigkeit.

Sei M eine kompakte (C^∞) orientierte Mannigfaltigkeit. Und sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M , wobei E die Menge der Fasern ist. Für $s \geq 0, s \in \mathbb{Z}$, erhalten wir einen Hilbert-Raum $H^s(E)$ von Schnitten von E , und zwar alle Schnitte von E deren Ableitungen bis zu Ordnung s \mathcal{L}^2 -integrierbar sind (bzgl. Karten). Äquivalent ist dies die Kompletierung des Raumes $C^\infty(E)$ der glatten sections von E in eine Norm, die das \mathcal{L}^2 -Integral aller Ableitungen bis zur Ordnung s miteinbezieht. Sei $C^k(E)$ der Raum der C^k -Schnitten von E . Dies ist ein Banach-Raum mit einer Norm, die die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf der Menge der Ableitungen der Ordnung $\leq k$ induziert. Unter dieser Norm ist $C^k(E)$ die Kompletierung von $C^\infty(E)$.

Das Sobolev Einbettungs-Theorem besagt, daß wenn $k \geq 0$ und $s > (n/2) + k$, n Dimension von M , dann ist $H^s(E) \subset C^k(E)$ (Inklusion ist stetig). Klar: $H^s(E) \supset C^k(E)$.

Für $s > n/2$ macht es Sinn, von einer H^s -Karte von einer Mannigfaltigkeit in eine andere zu sprechen. Man prüft unter Benutzung von lokalen Koordinaten, ob die Ableitungen der Ordnung $\leq s$ \mathcal{L}^2 -integrierbar sind. Diese Überprüfung kann für jedes System von Karten, die die Mannigfaltigkeiten überdecken, gemacht werden. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, möglicherweise mit Rand und N eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist der Raum $H^s(M, N)$ aller H^s -Abbildungen $\eta : M \rightarrow N$ eine Hilbert-Mannigfaltigkeit. Allgemeiner erhält man eine Hilbert-Mannigfaltigkeit $H^s(F)$, wobei F ein Faserbündel über M (hier: $F = M \times N$). Ebenfalls hat man Banach-Mannigfaltigkeiten $C^k(M, N)$ und $C^k(F)$.

Für $s > (n/2) + k$ ist $H^s(M, N) \subset C^k(M, N)$ eine dichte stetige Inklusion (ebenso für $H^s(F) \subset C^k(F)$).

Gegeben sei eine riemannsche Metrik auf N und ihre zugehörige Exponentialabbildung $exp : TN \rightarrow N$ (exp ist definiert für alle TN , da N kompakt ohne Rand ist). Dann kann man wie folgt Karten für $H^s(M, N)$ auf natürliche Weise konstruieren. Sei $f \in H^s(M, N)$. Wir erhalten den Hilbert-Raum $T_f H^s(M, N) = \{g \in H^s(M, TN) | \pi \circ g = f\}$, wobei $\pi : TN \rightarrow N$ die kanonische Projektion ist. Also ist $TH^s(M, N) = H^s(M, TN) = \cup T_f H^s(M, N)$ eine Vereinigung linearer Räume. Definiere $\omega_{exp} : T_f H^s(M, N) \rightarrow H^s(M, N)$ durch $g \mapsto exp \circ g$. Dies ist eine Karte von einer Umgebung der Null in $T_f H^s(M, N)$ in eine Umgebung von $f \in H^s(M, N)$. Dieselbe Konstruktion funktioniert auch für $C^k(M, N)$. Und eine geringe Verfeinerung der Konstruktion funktioniert für $H^s(F)$ und $C^k(F)$. Obiges definiert Mannigfaltigkeits-Struktur, die nicht von der gewählten Metrik abhängt.

Sei $h : N \rightarrow N'$ glatt. Dann ist die Abbildung $\omega_h : H^s(M, N) \rightarrow H^s(M, N')$, $f \mapsto h \circ f$ eine C^∞ -Abbildung. Ferner ist $\omega_h : C^k(M, N) \rightarrow C^k(M, N')$ eine C^∞ -Abbildung. Wenn $h \in C^{k+l}$ ist, dann ist $\omega_h \in C^l$ ($l \geq 0$). Die Ableitung von ω_h ist ω_{Th} mit den offensichtlichen Identifikationen, wobei $Th : TN \rightarrow TN'$ die Ableitung von h ist.

Im Fall C^k kann man Rechts-Komposition wie folgt anbringen. Sei $h : M \rightarrow M' \subset C^k$. Dann ist $\alpha_h : C^k(M', N) \rightarrow C^k(M, N)$, $f \mapsto f \circ h$ eine C^∞ -Abbildung mit Ableitung α_{Th} . Für den Fall H^s ist dies nicht richtig, da es nicht immer richtig ist, daß die Komposition von H^s -Karten wieder H^s ist. Besser ist stattdessen die Bildung mit Diffeomorphismen wie unten beschrieben.

Sei nun M kompakt. Die Menge $C^1\mathcal{D}$ der C^1 -Diffeomorphismen von M ist offen in $C^1(M, M)$ und ist topologische Gruppe. Für $s > (n/2) + 1$ sei $\mathcal{D}^s = H^s(M, M) \cap C^1\mathcal{D}$. Dann ist \mathcal{D}^s offen topologische Gruppe und

$$\mathcal{D}^s = \{\eta \in H^s(M, M) \mid \eta \text{ ist bijektiv und } \eta^{-1} \in H^s(M, M)\}$$

Wie im Fall C^k ist die Rechts-Multiplikation

$$R_\eta : \mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^s$$

$$\xi \mapsto \xi \circ \eta$$

C^∞ für jedes $\eta \in \mathcal{D}^s$ und wenn $\eta \in \mathcal{D}^{s+l}$,

$$L_\eta : \mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^s$$

$$\xi \mapsto \eta \circ \xi$$

ist C^l . Also $TR_\eta : X \mapsto X \circ \eta$ und $TL_\eta : X \mapsto T\eta \circ X$. (T wegstreichen?)

Allgemeiner ist die Komposition $H^s \times \mathcal{D}^s \rightarrow H^s$ stetig, $H^{s+l} \times \mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^s$ ist eine C^l -Karte. Für $g \in \mathcal{D}^s$ ist $\alpha_g : h \mapsto h \circ g$ C^∞ von H^s nach H^s mit Ableitung α_{Tg} . Für $h \in H^{s+l}$ ist $\omega_h : g \mapsto h \circ g$ C^∞ ($0 \leq l \leq \infty$) mit Ableitung ω_{Th} . Die wichtigste Bedingung dafür, daß $h \circ g$ eine H^s -Abbildung ist, ist daß g lokaler Isomorphismus ist; zum Beispiel sollte $Tg(m) = T_m g$ an jedem Punkt bijektiv sein. Diese Ergebnisse für die Abbildungen ω und α werden als das Omega-Lemma und das Alpha-Lemma bezeichnet.

Die inverse Abbildung $\eta \mapsto \eta^{-1}$ ist stetig. Sie ist C^l , wenn sie als eine Abbildung von \mathcal{D}^{s+l} nach \mathcal{D}^s betrachtet wird und wenn $\eta(t)$ eine C^1 -Kurve in \mathcal{D}^{s+l} , $l \geq 1$, dann ist

$$\frac{d}{dt}\eta(t)^{-1} = -T(\eta(t))^{-1} \circ \left\{ \frac{d}{dt}\eta(t) \right\} \circ \eta(t)^{-1} \in T_{\eta(t)^{-1}}\mathcal{D}^s$$

(dies folgt aus der Differentiation von $\eta(t) \circ \eta(t)^{-1} = e = \text{identität}$).

Da $\mathcal{D}^s \subset H^s(M, M)$ offen ist, ist $T_e\mathcal{D}^s$ der Raum aller H^s -Vektorfelder auf M ;

$$T_e\mathcal{D}^s = H^s(TM).$$

Wenn die Rechts-Multiplikation glatt ist, können wir über rechts-invariante Vektorfelder auf \mathcal{D}^s sprechen. Da, für $X \in H^{s+l}(TM) = T_e\mathcal{D}^{s+l}$, $\eta \mapsto X \circ \eta$ eine C^l -Abbildung von \mathcal{D}^s nach $T\mathcal{D}^s$ ($l \geq 0$), der Raum der rechts-invarianten C^l -Vektorfelder auf \mathcal{D}^s isomorph (durch Berechnung an $e \in \mathcal{D}^s$) ist zu $H^{s+l}(TM)$ (man sieht das, wenn $\tilde{X}(\eta) = X \circ \eta$ C^l ist, dann muß X H^{s+l} sein). Sei $l \geq 1$ und für $X, Y \in H^{s+l}(TM)$ sei \tilde{X}, \tilde{Y} das zugehörige rechts-invariante Vektorfeld auf \mathcal{D}^s . Dann gilt

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = [X, Y].$$

In Kap. 3 werden wir zeigen, daß der Fluß auf $H^{s+l}(TM)$ eine C^{l-1} -Kurve ($l \geq 0$) in \mathcal{D}^s ist.

Man kann eine differenzierbare Struktur für \mathcal{D} , die Gruppe der C^∞ -Diffeomorphismen von M , definieren, die die C^∞ -Topologie ausdrücken als den Limes der Topologien von \mathcal{D}^s

$$\mathcal{D} = \bigcap_{s > n/2} \mathcal{D}^s.$$

Dann heißt \mathcal{D} eine ILH (inverse limit Hilbert) Lie-Gruppe. Wenn man die C^k -Räume oder die Hölder-Räume benutzen würde, hieße \mathcal{D} eine ILB (inverse limit Banach) Lie-Gruppe. Allgemein ist für ILH oder ILB Mannigfaltigkeiten A und B mit

$$A = \bigcap A^s \text{ und } B = \bigcap B^s$$

eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ C^k genau dann, wenn für alle s gibt es ein $j(s)$, so daß f eine C^k -Erweiterung $f^s : A^{j(s)} \rightarrow B^s$ hat. Da auf \mathcal{D} Komposition und Invertierbarkeit glatt sind, ist \mathcal{D} in dem Sinne eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $T_e\mathcal{D} = H^\infty(TM) = C^\infty(TM)$.

Also ist die rechts-Lie-Algebra auf \mathcal{D} die übliche Lie-Klammer von Vektorfeldern.

Eine ILH-Lie-Untergruppe \mathcal{G} von \mathcal{D} ist eine ILH-Mannigfaltigkeit $\mathcal{G} = \cap \mathcal{G}^s$, so daß \mathcal{G}^s eine Gruppe ist und $\mathcal{G}^s \subset \mathcal{D}^s$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Dadurch hat die Gruppenmultiplikation auf \mathcal{G} dieselben Glattheitseigenschaften wie \mathcal{D} und $T_e\mathcal{G}^s \subset H^s(TM)$ ist ein geschlossener Unterraum und $T_e\mathcal{G}$ ist eine Lie-Unteralgebra von $T_e\mathcal{D}$.

Im Gegensatz zu Lie-Gruppen, braucht es nicht zu sein, daß eine geschlossene Lie-Untergruppe $\mathcal{D} \subset T_e\mathcal{D}$ aus einer ILH-Lie-Untergruppe hervorgeht.

Für eine kompakte Mannigfaltigkeit M , ohne Rand haben wir Hodge-Zerlegung: für $s \geq 0$ und Λ^k bezeichne das Bündel der k -Formen über M ,

$$H^s(\Lambda^k) = d(H^{s+1}(\Lambda^{k-1})) \oplus \partial(H^{s+1}(\Lambda^{k+1})) \oplus \ker \Delta.$$

Der Fall $s = 0$ ist vielleicht der best-gekannte, aber der allgemeine Fall $s > 0$ folgt aus der Regelmäßigkeit des Laplace-Operators.

Die Zerlegung kann auch geschrieben werden als

$$H^s(\Lambda^k) = \Delta(H^{s+2}(\Lambda^k)) \oplus \ker \Delta.$$

\oplus bedeutet immer die Orthogonalität unter Einbezug der H^0 -Metrik; $(\alpha, \beta)_0 = \int_M \alpha \wedge * \beta$ (man hat Orthogonalität in der H^s -Metrik, wenn man benutzt, daß $(\alpha, \beta)_s = (\alpha, \beta)_0 + ((d + \delta)^s \alpha, (d + \delta)^s \beta)_0$). Weiter ist $\ker \Delta$ endlich dimensional und kann mit der k -ten-Komohologie-Gruppe von M identifiziert werden.

Bemerkung 2.1 *Im Folgenden wird \mathcal{D}^s die orientierungserhaltenden H^s -Diffeomorphismen bezeichnen. Dies ist keine Einschränkung, da es eine Untergruppe vom Index 2 ist.*

3 Integration von H^s -Vektorfeldern

Wir werden nun zeigen, dass \mathcal{D}^s wie eine Lie-Gruppe eine Exponentialabbildung hat, welche jedem Tangentialvektor an die Identität eine einparametrische Untergruppe von \mathcal{D}^s zuordnet. So ein Tangentialvektor ist ein H^s -Vektorfeld auf M und die einparametrische Untergruppe ist dessen Fluss. Das Ergebnis ist das Folgende.

Satz 3.1 *Sei M eine kompakte n -Mannigfaltigkeit, $s > \frac{n}{2} + 2$ und \mathcal{D}^s die Gruppe von H^s -Diffeomorphismen.*

1. Falls V ein H^s -Vektorfeld auf M ist, ist der Fluss η_t eine einparametrische Untergruppe von \mathcal{D}^s .
2. Die Kurve $t \mapsto \eta_t$ ist C^1 .
3. Die Abbildung $\exp : T_e \mathcal{D}^s \mapsto \mathcal{D}^s$, $V \mapsto \eta_1$ ist stetig (aber nicht C^1).

Dieses Ergebnis ist wohlbekannt für C^k -Diffeomorphismen. Ebenso ist $\exp : T_e \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ eine C^∞ -ILH-Abbildung (vgl. dazu auch Omori). Man kann genauso zeitabhängige Vektorfelder integrieren wie im Folgenden zu sehen ist.

Satz 3.2 *Falls V ein zeitabhängiges H^s -Vektorfeld auf M ist (d.h. $V : \mathbb{R} \rightarrow H^s(TM)$ ist eine stetige Abbildung) und $s > \frac{n}{2} + 2$, dann ist der Fluss η_t von V mit $\eta_0 = id$ eine C^1 -Kurve in \mathcal{D}^s (natürlich ist das keine einparametrische Untergruppe).*

Man könnte ganz ähnlich auch V in stetiger Abhängigkeit von anderen Parametern haben. Im Folgenden wird ein wohlbekanntes Ergebnis auf den H^s -Fall verallgemeinert.

Satz 3.3 *Sei V ein H^s -Vektorfeld auf M , u.U. zeitabhängig, mit Fluss $\eta_t \in \mathcal{D}^s$. Sei α eine H^s - k -Form auf M . Dann ist $\frac{d}{dt}(\eta_t^* \alpha) = \eta_t^*(L_X \alpha)$, wobei $\frac{d}{dt}$ ausgeführt wird in H^{s-1} , $s > \frac{n}{2} + 2$ und L_X die Lie-Ableitung ist.*

Bemerkung 3.4 *Vom Omega-Lemma erhalten wir, dass falls V in Satz 3.1 H^{s+l} ist, der Fluss $t \mapsto \eta_t$ eine C^{l+1} -Kurve in \mathcal{D}^s ist.*

Obiges zeigt auch, dass der Fluss eines $C^{k+\alpha}$ -Vektorfeldes eine C^1 -Kurve in $C^{k+\alpha} \mathcal{D}$ ist, der Gruppe der $C^{k+\alpha}$ -Diffeomorphismen, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$. Dennoch ist der Fall $k = 1$ genauso richtig. Es ist nur natürlich, anzunehmen, dass im Obigen die Bedingung $s > \frac{n}{2} + 2$ ersetzt werden kann durch $s > \frac{n}{2} + 1$ im Sobolev-Fall, obwohl selbst der Beweis von Ebin und Marsden das nicht zeigt.

4 Differenzierbare Strukturen für die Gruppe der volumenerhaltenden und symplektischen Diffeomorphismen

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Untergruppen von \mathcal{D}^s , die eine Volumenform (bzw. eine symplektische Form), invariant lassen, geschlossene Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{D}^s , $s > (n/2) + 1$ sind. Diese Ergebnisse werden in späteren Kapiteln benutzt.

Als erstes werden ein paar Ergebnisse wiederholt, die gebraucht werden. Sei ω eine feste glatte k -Form. Definiere $\psi_\omega : \mathcal{D}^{s+1} \rightarrow H^s(\Lambda^k)$ durch $\eta \mapsto \eta^*(\omega)$, wobei $\Lambda^k = \Lambda^k(M)$ das Bündel der k -Formen über M ist. Dann ist ψ_ω für $s > n/2$ eine glatte Abbildung und

$$T_\eta \psi_\omega : T_\eta(\mathcal{D}^{s+1}) \rightarrow H^s(\Lambda^k)$$

ist gegeben durch $T_\eta \psi_\omega(V) = \eta^*(L_{V \circ \eta^{-1}} \omega)$, $L_{V \circ \eta^{-1}}$ ist die LIE-ABLEITUNG.

Sei nun ω eine Volumenform oder eine symplektische 2-Form, sei

$$\mathcal{D}_\omega^{s+1} = \{\eta \in \mathcal{D}^{s+1} \mid \eta^*(\omega) = \omega\},$$

und sei

$$[\omega]_s = \omega + dH^{s+1}(\Lambda^{k-1}) \subset H^s(\Lambda^k)$$

($k = n$ oder 2 , abhängig davon, ob ω ein Volumenelement oder eine symplektische Form ist).

Die Hodge-Zerlegung

$$H^s(\Lambda^k) = d(H^{s+1}(\Lambda^{k-1})) \oplus \partial(H^{s+1}(\Lambda^{k+1})) \oplus \ker \Delta$$

impliziert, daß die Kohomologieklass $[\omega]_s$ ein geschlossener affiner Unterraum von $H^s(\Lambda^k)$.

Sei $\mathcal{G}^{s+1} = \{\eta \in \mathcal{D}^{s+1} \mid \eta^*(\omega) \in [\omega]_s\}$. Jetzt hängt die Kohomologieklass von $\eta^*(\omega)$ nur noch von der Homotopieklass von $\eta : M \rightarrow M$ und die Homotopieklass von η hängt nur von seiner Komponente in \mathcal{D}^{s+1} ab.

Also besteht \mathcal{G}^{s+1} aus einer Kollektion von Komponenten von \mathcal{D}^{s+1} und so ist es also eine offene Untermannigfaltigkeit von \mathcal{D}^{s+1} . (Im Fall, daß ω eine Volumenform, $\mathcal{G}^{s+1} = \mathcal{D}^{s+1}$ die (volumenerhaltenden) H^s -Diffeomorphismen, weil $\eta^*(\omega) - \omega = h + d\alpha$, dann ist $\int_M h = 0$ nach de Rham's Theorem und h ist exakt.)

Lemma 4.1 *Die Abbildung $\psi_\omega : \mathcal{G}^{s+1} \rightarrow [\omega]_s$ ist eine Submersion; d.h. für jedes $\eta \in \mathcal{G}^{s+1}$ ist $T_\eta \psi_\omega$ eine surjektive lineare Abbildung.*

Das Hauptresultat ist das folgende.

Satz 4.2 *Sei M kompakte Mannigfaltigkeit und sei ω eine Volumenform oder eine symplektische 2-Form. Dann ist für $s > n/2$*

$$\mathcal{D}_\omega^{s+1} = \{\eta \in \mathcal{D}^{s+1} \mid \eta^*(\omega) = \omega\}$$

eine geschlossene Untermannigfaltigkeit von \mathcal{D}^{s+1} . Es ist also eine Untergruppe, also ist es eine topologische Gruppe und die Gruppenoperationen besitzen dieselben Glattheitseigenschaften wie die von \mathcal{D}^{s+1} . Darum ist \mathcal{D}_ω eine geschlossene ILH-Untergruppe von \mathcal{D} . Die Lie-Algebra von \mathcal{D}_ω besteht aus dem divergenzfreien, entsprechend lokal hamiltonischen, Vektorfeld auf M .

Bemerkung 4.3 *Ein Vektorfeld X ist divergenzfrei genau dann, wenn $L_X \omega = 0$ im Fall, daß ω ein Volumenelement, und es ist lokal hamiltonsch genau dann, wenn $L_X \omega = 0$ genau dann, wenn X lokal ein symplektischer Gradient ist, wenn ω eine symplektische Form ist.*

Bemerkung 4.4 *Es folgt hieraus, daß $T_e\mathcal{D}_\omega$ eine Lie-Unteralgebra von $T_e\mathcal{D} = C^\infty(TM)$, und man kann dieses direkt durch die Formel*

$$L_{[X,Y]}\omega = L_X L_Y \omega - L_Y L_X \omega$$

überprüfen.

Satz 4.5 *Angenommen M aus 4.2 zusammenhängend und $s > n/2$. Dann ist $\mathcal{D}_\omega^{s+1} \subset H^{s+1}(M, M)$ abgeschlossen (und ist eine Untermannigfaltigkeit).*

Bemerkung 4.6 *Im Folgenden ist M stets zusammenhängend.*

5 Die Deformation von \mathcal{D} nach \mathcal{D}_μ

Moser beweist, dass \mathcal{D} transitiv auf der Menge \mathcal{V} der Volumenformen von M mit einem festen Gesamtvolumen operiert. Seine Methoden benutzend zeigen Ebin und Marsden, dass falls μ eine gegebene Volumenform auf M ist, \mathcal{D}_μ ein Deformationsretrakt von \mathcal{D} ist und dass \mathcal{D} im Sinne von ILH diffeomorph zu $\mathcal{D}_\mu \times \mathcal{V}$ ist. Genauer ausgedrückt haben wir

Satz 5.1 *Sei M kompakt mit einer glatten Volumenform μ . Sei*

$$\mathcal{V} = \left\{ \nu \in C^\infty(\Lambda^n) \mid \nu > 0, \int_M \nu = \int_M \mu \right\} .$$

Dann ist \mathcal{D} diffeomorph zu $\mathcal{D}_\mu \times \mathcal{V}$. Insbesondere ist \mathcal{D}_μ ein Deformationsretrakt von \mathcal{D} , sofern \mathcal{V} konvex ist.

Vergleiche auch Omori für eine alternative (schwächere) Form von Satz 5.1, welche Gebrauch von der Wärmeleichung auf M macht.

6 Diffeomorphismen mit invarianten Untermannigfaltigkeiten

Das Hauptergebnis aus diesem Kapitel ist das folgende.

Satz 6.1 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine geschlossene Untermannigfaltigkeit (möglicherweise Nulldimensional). Sei \mathcal{D} die Gruppe der Diffeomorphismen von M und sei*

$$\mathcal{D}_N = \{\eta \in \mathcal{D} \mid \eta(N) \subset N\}$$

und

$$\mathcal{D}_{N,p} = \{\eta \in \mathcal{D} \mid \eta(x) = x \text{ für alle } x \in N\}.$$

Dann sind \mathcal{D}_N und $\mathcal{D}_{N,p}$ ILH-Lie-Untergruppen von \mathcal{D} , die Lie-Algebra von \mathcal{D}_N besteht aus den Vektorfeldern auf M tangential zu N und die Lie-Algebra von $\mathcal{D}_{N,p}$ besteht aus den Vektorfeldern auf M tangential zu N und Null an Punkten von N ($\mathcal{D}_{N,p}$ ist eine ILH-Lie-Untergruppe von \mathcal{D}_N).

Lemma 6.2 *Sei M und N wie in 6.1. Dann gibt es eine riemannsche Metrik g auf M , so da N total geodetisch ist. Es gibt ein $\epsilon > 0$ so, daß wenn $v \in T_n M$ und $\|v\| < \epsilon$, dann ist $v \in T_n N \iff \exp_n v \in N$.*

Sei $\mathcal{X}^s = H^s(TM)$ der Hilbertraum der H^s -Vektorfelder auf M und

$$\mathcal{X}_H^s = \{X \in \mathcal{X}^s \mid X(n) \in T_n N \text{ für alle } n \in N\}$$

$$\mathcal{X}_p^s = \{X \in \mathcal{X}^s \mid X(n) = 0 \text{ für alle } n \in N\}.$$

Für $s \geq 1$ sind dies abgeschlossene Unterräume von \mathcal{X}^s durch das Retraktionstheorem. Für den Rest der Ausdrücke $s > (n/2 + 1)$.

Lemma 6.3 *$e \in \mathcal{D}^s$ (die Identität), $\mathcal{D}_N^s \subset \mathcal{D}^s$ ist eine Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Karte*

$$\Phi : U \subset \mathcal{D}^s \longrightarrow \mathcal{X}^s,$$

so daß

$$\Phi(U) = V_1 \times V_2,$$

wobei V_1 und V_2 offene Untermengen von Hilberträumen sind, $V_1 \subset \mathcal{X}^s$, und so da

$$\Phi(U \cap \mathcal{D}_N^s) = V_1.$$

Eine analoge Aussage gilt für $\mathcal{D}_{N,p}^s$.

Natürlich definieren \mathcal{D}_N^s und $\mathcal{D}_{N,p}^s$ ILH-Strukturen für \mathcal{D}_N und $\mathcal{D}_{N,p}$ und die Gruppenoperationen haben dieselben Differenzierungseigenschaften wie die von \mathcal{D}^s .

Sei \tilde{M} die Vedopplung von M . Wir wenden uns nun Gruppen von Diffeomorphismen η mit Träger in M zu. Das meint das folgende:

$\eta \in \mathcal{D}_0^s(M)$, oder man sagt η hat einen Träger IN M genau dann, wenn η auf \tilde{M} zu $\tilde{\eta} \in \mathcal{D}^s(\tilde{M})$ durch Gleichsetzung der Identität auf \tilde{M}/M erweitert werden kann.

Man definiert $\mathcal{X}_0^s(M)$ gleichfalls. Allgemein kann man für ein Vektorbündel $\pi : E \longrightarrow \tilde{M}$ $H_0^s(\pi|_M)$ definieren als den H^s Abschluß der glatten Schnitte von π mit kompaktem Träger in M (diese sind Null außerhalb einer kompakten Untergruppe von $\text{int}(M)$) oder alternativ als solche $\alpha \in H^s(\pi|_M)$, was erweitert werden kann zu $H^s(\pi)$, indem man $\alpha = 0$ außerhalb von M setzt. Bemerke, daß man automatisch eine kanonische Erweiterungsabbildung in diesem Fall erhält.

Satz 6.4 *Seien M, \tilde{M} wie oben. Bette $\mathcal{D}_0^s(M) \subset \mathcal{D}^s(\tilde{M})$ ein durch $\eta \mapsto \tilde{\eta}$ wie oben. Dann ist $\mathcal{D}_0^s(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{D}^s(\tilde{M})$, $\mathcal{D}_0^s(M)$ definiert eine ILH-Lie-Gruppe $\mathcal{D}_0(M)$ und hat die Lie-Algebra $\mathcal{X}_0(M)$.*

7 Eine schwache riemannsche Metrik für \mathcal{D}_μ^s und deren geodätische Kurven

Wir wollen nun \mathcal{D}^s und \mathcal{D}_μ^s (und konsequenterweise \mathcal{D} und \mathcal{D}_μ) mit einer (schwachen) riemannschen Struktur ausstatten und zeigen, dass diese Strukturen geodätische Kurven definieren. Auf \mathcal{D}_μ^s beschreiben diese geodätischen Kurven die Bewegung eines perfekten Fluids wie in Kapitel 10 beschrieben werden wird.

Sei X eine auf einem Banachraum E befindliche Mannigfaltigkeit. Eine schwache riemannsche Struktur γ auf X ist eine Abbildung, welche jedem $x \in X$ eine stetige positiv definite symmetrische Bilinearform $\gamma(x) \in L^2(T_x X; \mathbb{R})$ (die stetigen Bilinearformen auf $T_x X$ mit der gewöhnlichen Norm-Topologie), welche sich mit $x \in X$ stetig ändert, zuordnet; deutlicher gesagt bedeutet "stetig ändert", dass wenn eine Koordinatenkarte U an x_0 und deren induzierte Karte $U \times T_{x_0}(X)$ für $T(X)$ eingeschränkt auf U gegeben sind, ist γ eine glatte Abbildung $\gamma : U \rightarrow L^2(T_{x_0}(X), \mathbb{R})$.

Schwach deshalb, weil $\gamma(x)$ nicht notwendigerweise die Topologie auf $T_x(X)$ definiert, aber möglicherweise eine schwächeren Topologie. Als erstes sollten wir eine solche Struktur auf \mathcal{D}^s definieren.

Satz 7.1 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit einer gegebenen Metrik \langle, \rangle_m . Erinnerung, dass für $\eta \in \mathcal{D}^s$, $s > \frac{n}{2} + 1$,*

$$T_\eta \mathcal{D}^s = \{V \in H^s(M, TM) \mid \pi \circ V = \eta\} \quad \text{ist,}$$

definieren wir eine Bilinearform auf $T_\eta \mathcal{D}^s$ durch

$$(V, W) = \int_M \langle V(m), W(m) \rangle_{\eta(m)} \mu(m) \quad ,$$

wobei μ die Volumenform ist, welche durch die Metrik auf M induziert wird. Dann gilt:

1. $(,)$ definiert eine schwache riemannsche Struktur auf \mathcal{D}^s ,
2. $(,)$ hat einen zugehörigen (eindeutigen) torsionsfreien affinen Zusammenhang $\bar{\nabla}$; wir haben für glatte Vektorfelder X, Y, Z auf \mathcal{D}^s

$$(a) \quad x(Y, Z) = (\bar{\nabla}_X Y, Z) + (Y, \bar{\nabla}_X Z) \quad \text{und}$$

$$(b) \quad \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y].$$

3. Sei $\exp : TM \rightarrow M$ die zum Zusammenhang $\bar{\nabla}$ auf M gehörende Exponentialabbildung. Dann ist $E : T\mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^s$ definiert durch $E(V) = \exp \circ V$, der Exponentialabbildung von $\bar{\nabla}$; E ist nur auf einer Umgebung des Nullschnittes von $T\mathcal{D}^s$ definiert und ist eine surjektive C^∞ -Abbildung auf einer Umgebung von $e \in \mathcal{D}^s$.

Bemerkung 7.2 $(,)$ induziert die H^0 -Topologie auf $T_\eta \mathcal{D}^s$, welche strikt schwächer ist als die H^s -Topologie. Allgemein haben schwache Metriken keine Zusammenhänge oder Exponentialabbildungen, so impliziert 1. nicht 2. oder 3..

Beachte, dass eingeschränkt auf $T_\eta \mathcal{D}^s$, E nur die Kartenabbildung für $\eta \in \mathcal{D}^s$ ist wie in Kapitel 2 beschrieben.

Bemerkung 7.3 Man kann eine (schwache) riemannsche Struktur wie oben auf ganz $H^s(M, M)$ definieren, wobei E durch dieselbe Formel gegeben ist. In diesem Fall ist E definiert auf jeder Faser von $TH^s(M, M)$, so dass $H^s(M, M)$ eine komplette (schwache) riemannsche Mannigfaltigkeit wird. Natürlich sind geodätische Kurven für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Das $E(V) = \exp \circ V$ die richtige Exponentialabbildung für (\cdot, \cdot) ist, kann wie folgt eingesehen werden. Lokal minimiert $\gamma_m(t) = \exp tV(m)$ die Energie

$$\int_0^t \langle \gamma'_m(s), \gamma'_m(s) \rangle ds \quad .$$

Die Energie auf \mathcal{D}^s ist

$$\int_0^t \int_M \langle \gamma'_m(s), \gamma'_m(s) \rangle d\mu(m) ds = \int_M \left(\int_0^t \langle \gamma'_m(s), \gamma'_m(s) \rangle ds \right) d\mu(m),$$

daher wird die Energie ebenfalls minimiert.

Korollar 7.4 In Satz 7.1 ist das zur Metrik gehörende Spray $\bar{Z} : T\mathcal{D}^s \rightarrow T^2\mathcal{D}^s$ gegeben durch $\bar{Z}(X) = Z \circ X$, wobei $Z : TM \rightarrow T^2M$ das Spray von \langle, \rangle ist.

Beachte, dass wie erwartet \bar{Z} eine glatte Abbildung ist, wenn $Z \in C^\infty$ ist.

Satz 7.5 Die Operation von \mathcal{D}_μ^s auf \mathcal{D}^s bewahrt durch Rechtsmultiplikation die riemannsche Struktur (\cdot, \cdot) . Weiterhin bewahrt \mathcal{D}^s , auf sich selbst durch Rechtsmultiplikation operierend, $\bar{\nabla}$ und $E \circ TR_\eta = R_\eta \circ E$ für $\eta \in \mathcal{D}^s$, wobei R_η die Rechtsmultiplikation von η bezeichnet.

Diese Invarianz von (\cdot, \cdot) unter \mathcal{D}_μ^s spielt später eine entscheidende Rolle. Ebin und Marsden restringieren (\cdot, \cdot) auf \mathcal{D}_μ^s , wozu sie das folgende vorbereitende Lemma benötigen. Die darin definierte Projektion wird in Satz 8.1 benutzt.

Lemma 7.6 Definiere (\cdot, \cdot) auf \mathcal{D}_μ^s wie oben, dann wird es eine schwache riemannsche Metrik. Es ist \mathcal{D}_μ^s invariant und für jedes $\eta \in \mathcal{D}_\mu^s$ die durch (\cdot, \cdot) definierte orthogonale Projektion eine stetige surjektive Abbildung $P_\eta : T_\eta(\mathcal{D}^s) \rightarrow T_\eta(\mathcal{D}_\mu^s)$. Und zwar $P_\eta = TR_\eta \circ P_e \circ TR_{\eta^{-1}}$, wobei $P_e : T_e\mathcal{D}^s \rightarrow T_e\mathcal{D}_\mu^s$ die orthogonale (bezüglich der H^0 -Metrik) Projektion auf den ersten Summanden ist, die bestimmt ist durch die Hodge-Zerlegung

$$T_e\mathcal{D}^s = H^s(TM) = T_e(\mathcal{D}_\mu^s) \oplus \text{grad } H^{s+1}(\Lambda^0(M))$$

Nun kommen wir zu einem Hauptergebnis.

Satz 7.7 Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann ist (\cdot, \cdot) , definiert auf \mathcal{D}_μ^s , eine \mathcal{D}_μ^s -rechtsinvariante schwache Metrik. Es induziert ein glatter affiner Zusammenhang $\tilde{\nabla} = P \circ \bar{\nabla}$ und eine Exponentialabbildung \tilde{E} auf \mathcal{D}_μ^s . Beide, $\tilde{\nabla}$ und \tilde{E} sind invariant unter Rechtsmultiplikation durch \mathcal{D}_μ^s .

Arnold erläutert, dass geodätische Kurven auf \mathcal{D}_μ^s die Lösungen der Euler-Gleichungen liefern, und so liefert uns obiger Satz die Existenz solcher Lösungen. In Kapitel 10 erlangen wir explizit die Beziehung zwischen geodätischen Kurven auf \mathcal{D}_μ^s und den klassischen Gleichungen und zeigen, dass Glattheit von

P verträglich ist mit dem, was man von den klassischen Gleichungen erwarten könnte.

Wir merken an, dass \tilde{E} nur auf einer Umgebung des Nullschnitts von $T(\mathcal{D}_\mu^s)$ definiert sein kann, so dass geodätische Kurven in \mathcal{D}_μ^s nur für kurze Zeitintervalle existieren müssen.

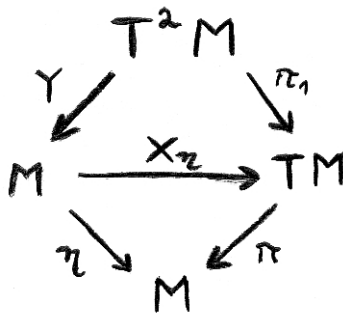
In Kapitel 8 werden wir das zur Metrik (\cdot, \cdot) auf \mathcal{D}_μ^s gehörende Spray angeben.

Bemerkung 7.8 *Für \mathcal{D}^s und \mathcal{D}_μ^s überdecken die zugehörigen Exponentialabbildungen der Lie-Gruppen keine Umgebung der Identität (vgl. auch Satz 3.1). Dennoch tun dies die Exponentialabbildungen E und \tilde{E} oben, da diese glatt sind. Daher können in \mathcal{D}_μ^s local zwei Punkte durch eine eindeutige geodätische Kurve, welche die H^0 -Bogenlänge minimiert, verbunden werden. Daher ist die Variationsrechnung in dieser Situation richtig, obwohl die Methoden von Palais und Smale keine Existenz von geodätischen Kurven erbringen.*

8 Das Spray auf \mathcal{D}_μ^s und die Euler-Gleichungen mit Kräften

Hier berechnen wir das zur geodätischen Kurve auf \mathcal{D}_μ^s gehörende Spray. Ebenso werden wir eine Gleichung auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ zweiter Ordnung konstruieren, welche wie in den Kapitel 10 und 11 erläutert werden wird auf die Lösungen der Euler-Gleichungen mit Kräften führen wird.

Erinnernd, dass $T^2\mathcal{D}_\mu^s$ identifiziert wird mit $X_\eta \in T_\eta\mathcal{D}_\mu^s$ überdeckenden H^s -Abbildungen $Y : M \rightarrow T^2M$; Zumindest kommutiert das folgende Diagramm für $Y \in T_{X_\eta}(T\mathcal{D}_\mu^s)$:



Satz 8.1 Seien M kompakt und Z das zur Metrik auf M gehörende Spray; $Z : TM \rightarrow T^2M$. Sei

$$P : H^s(M, TM)|_{\mathcal{D}_\mu^s} \rightarrow T\mathcal{D}_\mu^s$$

die in Kapitel 7 beschriebene Projektion. Dann ist das zur Metrik (\cdot, \cdot) auf \mathcal{D}_μ^s gehörende Spray gegeben durch die stetige Abbildung

$$S : T\mathcal{D}_\mu^s \rightarrow T(T\mathcal{D}_\mu^s); \quad X \mapsto TP(Z \circ X).$$

Bemerkung 8.2 • Wir werden TP in Kapitel 10 genauer bestimmen.

- Satz 8.1 kann bewiesen werden unter Benutzung der Formel, die sich auf ∇ und $\tilde{\nabla}$ bezieht (vgl. Kapitel 7), sowie der Formel $\tilde{\nabla} = P \circ \tilde{\nabla}$ und der Standard-Formel für Sprays und Zusammenhänge

$$S(X) = TX \circ X - \left(\tilde{\nabla}_X X \right)^l,$$

wobei l den vertikalen Lift auf $T^2(\mathcal{D}_\mu^s)$ beschreibt.

Nun betrachten wir das Euler-Spray S oben mit der Addition eines "Kraftterms" f .

Satz 8.3 Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Spray S auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ definiert wie in Satz 8.1. Sei $f \in T_e\mathcal{D}_\mu$ und $f_\eta = f \circ \eta$. Definiere $F : T\mathcal{D}_\mu^s \rightarrow T\mathcal{D}_\mu^s$ durch

$$F(v) = v + f_\eta \quad \text{für } v \in T_\eta\mathcal{D}_\mu^s.$$

Dann ist die natürliche Einbettung $T\mathcal{D}_\mu$ im vertikalen Teil von $TT\mathcal{D}_\mu^s$ und F wird ein glattes Vektorfeld auf $T\mathcal{D}_\mu^s$. (Allgemein ist $F \in C^k$, falls $f \in T_e\mathcal{D}_\mu^{s+k}$.) Insbesondere ist $S+F$ ein glattes Vektorfeld auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ und eine Gleichung zweiter Ordnung, womit es einen eindeutigen lokalen C^∞ -Fluss hat.¹

Natürlich ist $S + F$ kein Spray, während S ein Spray ist. Bedenke auch, dass $f \in T_e\mathcal{D}_\mu$ bedeutet, dass f ein glattes divergenzfreies Vektorfeld auf M ist.

Korollar 8.4 In Satz 8.3 sei $c_f(t)$ eine Integralkurve für $S + F$ in $T\mathcal{D}_\mu^s$. Falls gilt $f \rightarrow 0$ in der H^s -Topologie, dann gilt in H^s $c_f(t) \rightarrow c(t)$, einer Integralkurve für s (alle Integralkurven mit denselben Anfangswerten).

Dies folgt, da der Fluss eines glatten Vektorfeldes stetig vom Vektorfeld abhängt.

Bemerkung 8.5 Natürlich könnte man in Satz 8.3 erlauben, dass f zeitabhängig ist, womit $S + F$ ein glattes zeitabhängiges Vektorfeld auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ würde.

¹Man kann zeigen, dass $S + F$ Integralkurven hat, sogar für $k = 0$.

9 Regularität, Bemerkungen zu Vollständigkeit und Benutzung von anderen Funktionenräumen

Das Hauptresultat aus diesem Kapitel ist, daß geodetische Kurven in \mathcal{D}_μ^s in gleiem Maße differenzierbar sind wie ihre Anfangswerte. Dies hat die wichtige Konsequenz, daß die Zeit der Existenz einer geodetischen Kurve nicht von s abhängt, so daß eine geodetische Kurve mit C^∞ -Anfangszuständen eine Kurve in \mathcal{D}_μ ist. In anderen Worten: Der geodetische Fluß auf \mathcal{D}_μ^s grenzt ein, wie man einen Fluß auf \mathcal{D}_μ definiert.

Satz 9.1 *Sei M kompakt, $s > (n/2) + 1$ und $\eta(t) \in \mathcal{D}_\mu^s$ eine geodätische Kurve für die Metrik \langle, \rangle . Wenn $\eta(0) \in \mathcal{D}_\mu^{s+k}$ und $\eta'(0) \in T_{\eta(0)}\mathcal{D}_\mu^{s+k}$, dann ist $\eta(t) \in H^{s+k}$ auf M für alle t für die $\eta(t)$ in \mathcal{D}_μ^s definiert wurde. Hier: $0 \leq k \leq \infty$.*

Dasselbe gilt für jede rechtsinvariante glatte Gleichung zweiter Ordnung, die auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ (für alle s) definiert ist. Wenn $\partial M = \emptyset$, dann gilt $\eta(t) \in \mathcal{D}_\mu^{s+k}$.

Man bemerkt an dieser Stelle, daß es nicht notwendig ist, überall H^s -Räume zu benutzen. Wenn man stattdessen Hölder-Räume $C^{k+\alpha}$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ betrachtet (oder die $\Lambda^{k+\alpha}$ -Räume, der Abschluß von C^∞ in $C^{k+\alpha}$) erhält man eine Gruppe von Diffeomorphismen $C^{k+\alpha}\mathcal{D}$, eine Untermannigfaltigkeit $C^{k+\alpha}\mathcal{D}_\mu$ und eine Exponentialabbildung.

Es folgen ein paar Bereiche, in denen es möglicherweise nicht klar ist, wie man die Hölder-Räume anstatt von H^s benutzt. Diese beziehen Situationen mit ein, in denen wir die Hilbert-Raum-Struktur von H^s brauchen.

Bemerkung 9.2 *(i) Satz 6.1 bleibt erhalten für die C^k -Räume, $k \geq 1$, und die Hölder-Räume $C^{k+\alpha}$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, anstelle der Sobolev-Räume. Man muß einzig zeigen, daß $C^{k+\alpha}\mathcal{X}_N$ und $C^{k+\alpha}\mathcal{X}_p$, $k \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$, geschlossene Komplemente in $C^{k+\alpha}$ haben.*

(ii) Die Theoreme in Kap. 7 und 8 kann man übertragen zu dem Hölder-Raum-Fall $C^{k+\alpha}$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, (aber nicht die C^k -Räume!).

Man kann zeigen (siehe auch Kap. 10,11), daß wenn M eine berandeter Definitionsbereich im \mathbb{R}^2 ist, und $X \in C^{1+\alpha}(TM)$, ($\text{div} X = 0$, X parallel zu ∂M), dann existiert $\eta(t) = \tilde{E}(tX) \in C^{1+\alpha}\mathcal{D}_\mu$ für alle t , was bedeutet, da die Lösung der Euler-Gleichungen für alle Zeiten existiert. Mit dem obigen Regularittstheorem (9.1) wissen wir, da wenn $X \in H^s$ ist, $s \geq 3$, (bzw. $C^{k+\alpha}$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ oder C^∞), dann ist $\eta(t) \in H^s$ (bzw. $C^{k+\alpha}$ oder C^∞) für alle t , auf $\text{int}(M)$. (Dieselben Methoden funktionieren für jede 2-Mannigfaltigkeit.)

Nun ist \tilde{E} die Exponentialabbildung einer homogenen schwachen riemannschen Mannigfaltigkeit, (\mathcal{D}_μ^s abgebildet auf sich selbst mit Rechtsmultiplikation, Metrikerhaltend) und es ist ein Standardergebnis in Riemannscher Geometrie, daß die Exponentialabbildung für eine homogene Mannigfaltigkeit überall definiert ist (hat einen vollständigen zugehörigen Fluß). Leider ist dieses Ergebnis nicht auf schwache Metiken verallgemeinert.

Es ist möglich, eine glatte rechtsinvariante starke Metrik \langle, \rangle^s auf \mathcal{D}_μ^s zu konstruieren. Für $X, Y \in T_e(\mathcal{D}_\mu^s)$ definiere $\langle X, Y \rangle^s = \langle X, Y \rangle + \langle \nabla^s X, Y \rangle$, und erweitere diese Metrik auf $T(\mathcal{D}_\mu^s)$ durch Rechtsinvarianz. Diese Metrik ist glatt.

Bemerke, da Vollständigkeit des Flusses in einem H^s -Raum(oder $C^{k+\alpha}$) mit $s > (n/2) + 1$ (oder $k \geq 1, 0 < \alpha < 1$) Vollständigkeit in allen impliziert, eingeschlossen C^∞ .

10 Zusammenhang mit den klassischen Gleichungen

Wir zeigen nun, wie die Lösungen für Vektorfelder, die wir in den vorigen Kapiteln erhalten haben, mit den klassischen Gleichungen in Beziehung stehen. Wir werden zeigen, warum die klassischen Euler-Gleichungen Ableitungen verlieren, das Vektorfeld $S : T\mathcal{D}_\mu^s \rightarrow T^2\mathcal{D}_\mu^s$ jedoch nicht.

Sei M kompakte Mannigfaltigkeit. Sei $Z : TM \rightarrow T^2M$ das zu der Metrik von M gehörende Spray und

$$\begin{aligned} S : T\mathcal{D}_\mu^s &\rightarrow T^2\mathcal{D}_\mu^s \\ X &\mapsto TP(Z \circ X) \end{aligned}$$

sei das zu der schwachen riemannschen Metrik \langle, \rangle auf \mathcal{D}_μ^s gehörende Spray. Um S in einer klareren Form auszurechnen, müssen wir TP berechnen. Dazu benutzen wir die folgende Notation.

Sei $\pi : TM \rightarrow M$ die Projektion, so daß $T\pi : T^2M \rightarrow TM$. Ein Element $w \in T^2M$ ist *senkrecht* genau dann, wenn $T\pi(w) = 0$ (in Koordinaten: die dritte Komponente ist Null). Sei $v, w \in T_mM$. Definiere den *LIFT VON w relativ zu v* durch

$$(w)_v^l = \left. \frac{d}{dt}(v + tw) \right|_{t=0} \in T_v^2M.$$

Für $v = 0$ definiert dies eine Abbildung $T_mM \rightarrow T^2M$, den *kanonischen senkrechten Lift*. Klar ist $(w)_v^l$ senkrecht, $\pi_1(w)_v^l = v$, $\pi_1 : T^2M \rightarrow TM$ die Projektion; in Koordinaten:

$$(w)_v^l = (m, v, 0, w) \in T^2M.$$

Wenn v klar aus dem Kontext ist, schreiben wir es nicht. Man kann einfach nachprüfen, daß es eine Abbildung $f : M \rightarrow T^2M$ gibt, die senkrecht ist genau dann, wenn $f = \sigma^l$ für ein $\sigma : M \rightarrow TM$ (der Lift unter Berücksichtigung von $\pi_1 \circ f$).

Satz 10.1 (i) Sei $X : M \rightarrow T^2M$ eine H^s -Abbildung, die $\eta \in \mathcal{D}^s$ überdeckt. Dann können wir schreiben

$X = \sigma_v^l + T(g \circ \eta^{-1}) \circ g$ wobei $g : M \rightarrow TM, \sigma : M \rightarrow TM$, und $v = \pi_1(X)$. σ^l und $T(g \circ \eta^{-1}) \circ g$ sind H^{s-1} -Abbildungen.

(ii) Sei P die Projektionsabbildung, die in 7.1 definiert ist. dann gilt für $\sigma : M \rightarrow TM$ und $v : M \rightarrow TM, (\eta \in \mathcal{D}_\mu^s$ überdeckend),

$$TP[(\sigma)_v^l] = (P(\sigma))_{P(v)}^l.$$

(iii) Für $g : M \rightarrow TM, \eta \in \mathcal{D}_\mu^s$ überdeckend,

$$TP(T(g \circ \eta^{-1}) \circ g) = \{T(P_e[g \circ \eta^{-1}])\} \circ g$$

wobei P_e die übliche Projektion auf den divergenzfreien Teil (parallel zu ∂M).

Bemerkung 10.2 Wenn X H^s ist, sind die zwei Summanden in (i) nur H^{s-1} . Dies hängt davon ab, wie sich X zusammensetzt. In (ii) und (iii) erhält TP die differenzierbarkeit seiner argumente. daher, wenn wir TP in (i) verwenden, verlieren wir die Ableitungen in jedem Ausdruck einzeln, aber nicht in der Summe. Weiter unten werden wir ausführlicher auf diesen Punkt eingehen.

Satz 10.3 Das Spray $S(X) = TP(Z \circ X)$ auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ ist wie folgt gegeben: Sei $X \in T_\eta\mathcal{D}_\mu^s$. Dann gilt

$$TP[(\sigma)_v^l] = (P(\sigma))_{P(v)}^l.$$

Es folgen nun mehrere Bemerkungen, die helfen sollten, den Verlust der Ableitungen zu erklären. Sei X ein Element von $T_e\mathcal{D}_\mu^s$, so daß X ein H^s -divergenzfreies Vektorfeld ist. Da $Z \in C^\infty$ ist, ist klar, daß

$Z \circ X = TX \circ X - \nabla_X X \cdot H^s$ ist (obwohl die Ausdrücke einzeln nicht H^s sind). Da $TP(Z \circ X) \cdot H^s$ ist, finden wir, $Z \circ X$ verglichen mit 10.2, daß das erhaltene gilt. Wenn $X \in H^s$ ist, $\partial X = 0$ und

$$\nabla_x X = Y + dp$$

ist die Hodge-Komposition von $\nabla_X X$, dann ist $dp \in H^s$, obwohl $\nabla_X X$ und Y nur H^{s-1} sind. Dies wollen wir erklären. Sei nun

$$\partial dp = \Delta p = \partial \nabla_X X.$$

Berechnen wir $\partial \nabla_X X$ im euklidischen Raum (der allgemeine Fall ist analog).

Wenn X Koordinaten X^i hat, haben wir

$$(\nabla_X X)^i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

so daß

$$\partial \nabla_X X = \text{div} \nabla_X X = \sum_j j, i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

die zweite Ableitung von X ist weggefallen, da $\text{div} X = 0$. Da $X \in H^s$ ist, ist $\partial \nabla_X X \in H^{s-1}$. Daher ist $\Delta p \in H^{s-1}$. Bei Regularität des Laplace-Operators ist $p \in H^{s+1}$ an inneren Punkten, als ist $dp \in H^s$. Jetzt kann man zeigen, daß die Normal-Komponente von $dp \in H^s$ ist ($H^{s-1/2}$ bei Beschränkung auf ∂M). Tatsächlich ist $n dp = n(\nabla_X X)$.

Wie man weiß ist $n(\nabla_X X) = S(X, X)$ die zweite Fundamentalform von ∂M und S ist ein (glatter) Tensor. Dadurch hat $n(dp) = S(X, X)$ dieselbe Differenzierbarkeit wie X . Also ist $dp \in H^s$ und nicht nur H^{s-1} .

Es ist genau die obige geometrische Natur der Euler-Gleichungen, die diese Methoden zu arbeiten richtig macht.

Jetzt sind wir bereit, die Euler-Gleichungen zu erhalten. Wir erhalten sie direkt unter Benutzung der Formel aus 10.2 für ein geodetisches Spray.

Lemma 10.4 Sei $S : T\mathcal{D}_\mu^s \rightarrow T^2\mathcal{D}_\mu^s$ eine rechtsinvariante Gleichung zweiter Ordnung mit (lokalem) Fluß F_t . Sei

$$H_t : T_e\mathcal{D}_\mu^s \rightarrow T_e\mathcal{D}_\mu^s$$

$$H_t(v) = (F, v) \circ \eta_t^{-1}; \eta_t = \tilde{\pi}(F, v),$$

$\tilde{\pi} : T\mathcal{D}_m u^s \rightarrow \mathcal{D}_m u^s$ die Projektion. Dann ist H_t ein lokaler Fluß erzeugt von Y , wobei

$$Y(v)_0^l = S(v) - Tv \cdot v$$

(der Definitionsbereich von Y ist H^{s+1}). Umgekehrt, wenn v_t eine Integral-Kurve von Y in H^s ist und v_t den Fluß $\eta_t \in \mathcal{D}_m u^s$ (siehe (8.5)), dann gilt

$$F_t(v) = v_t \circ \eta_t.$$

Für die Euler-Gleichungen benutzt man das Folgende, was die obige Arbeit zusammenfaßt.

Satz 10.5 Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $S_f = S + F$ die Gleichung zweiter Ordnung, die auf $T\mathcal{D}_\mu^s$ in 11.2 konstruiert wurde. Wenn dann v_t eine Integral-Kurve von S_f in $T\mathcal{D}_\mu^s$ ist, $s > (n/2) + 1$, und

$$\hat{v}_t = v_t \circ \eta_t^{-1}, \eta_t = \pi(v_t),$$

dann ist \hat{v}_t eine Integral-Kurve des Vektorfelds auf $T_e\mathcal{D}_\mu^s$ (Definitionsbereich $T_e\mathcal{D}_\mu^{s+1}$) gegeben durch

$$Y(u) = -P_e(\nabla_u u) + f.$$

Umgekehrt, wenn u_t eine Integral-Kurve von $Y(u)$ in H^s mit Fluß η ist, dann ist $u_t \circ \eta_t$ eine Integral-Kurve in $T\mathcal{D}_\mu^s$ von S_f .

Bemerke, daß, verglichen mit 10.2, Lemma 10.1 den Ausdruck $Tu \circ u$ verliert, so daß der verbliebene Ausdruck nur H^{s-1} ist für $u \in H^s$ (die Ursache für den Ableitungsverlust).

10.2 wird in klassischer Notation in Kap. 11 neu formuliert.

Satz 10.6 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $E + \nu\tilde{T}$ das Vektorfeld aus 13.1,*

$$E + \nu\tilde{T} : T\mathcal{D}_\mu^s \longrightarrow T^2\mathcal{D}_\mu^{s-2}$$

wobei $T = -\Delta = \nabla^2$. Wenn dann $s > (n/2) + 1 + 2 \cdot 2 = (n/2) + 5$ haben wir: eine Kurve $v_t \in T\mathcal{D}_\mu^s$ ist eine Integralkurve des Vektorfelds

$$Y : T_e\mathcal{D}_\mu^s \longrightarrow T_e\mathcal{D}_\mu^{s-2}$$

gegeben durch

$$Y(u) = \nu\nabla^2 u - P_e(\nabla_u(u)) + f.$$

11 Zusammenfassung der Ergebnisse in klassischer Notation

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorigen Kapitel in klassische Notation umgeschrieben, so dass die Natur der speziellen Ergebnisse deutlicher gesehen werden kann. Zuerst betrachten wir für die Euler-Gleichungen das folgende Anfangswertproblem. Da die Ergebnisse alle klassisch sind, kann man die Ableitungen wörtlich interpretieren. Man beachte, dass es auf dem Definitionsbereich von M keine topologischen Restriktionen gibt.

11.1 Problem (Euler-Gleichungen)

Sei M eine kompakte riemannsche orientierte n -Mannigfaltigkeit und sei f ein gegebenes divergenzfreies C^∞ -Vektorfeld auf M . Finde ein zeitabhängiges Vektorfeld u_t (und infolgedessen den zugehörigen Fluss η_t), so dass

1. u_0 ist ein gegebener Anfangswert mit $\operatorname{div} u_0 = 0$,
2. $\frac{\partial u_t}{\partial t} + \nabla_{u_t} u_t = \operatorname{grad} p_t + f$ für ein $p_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ und
3. $\operatorname{div} u_t = 0$.

Wegen 3. und der Hodge-Zerlegung, ist $\operatorname{grad} p_t$ bestimmt durch die Zerlegung $\nabla_{u_t} u_t$ für $\nabla_{u_t} u_t$. Auch hatten wir bereits die Notation $P_e(\nabla_{u_t} u_t) = \nabla_{u_t} u_t - dp_t$. Wie in Kapitel 8 erläutert, können wir zulassen, dass f zeitabhängig ist und wir hatten zur Vereinfachung $f \in C^\infty$ gewählt (generell sollte für Lösungen in H^s , f in H^s sein).

Wir merken an, dass die Euler-Gleichung unter Benutzung der Lie-Ableitung anstatt der kovarianten Ableitung umgeschrieben werden kann: $P_e(\nabla_u u) = P_e(L_u \tilde{u})$, wobei \tilde{u} die durch die Metrik zu u gehörige Form ist, während $\nabla_u u$ und $L_u \tilde{u}$ sich durch einen Gradienten unterscheiden, und zwar $\operatorname{grad} \left(\frac{\langle u, u \rangle}{2} \right)$.

Wir nennen den Fluss η_t von u_t die Struktur des Fluids. Von 10.5 sehen wir, dass η_t die geodätische Kurve ist (falls $f = 0$), die bei e in Richtung u_0 in \mathcal{D}_μ^s startet.

Die stationären Lösungen (z.B. $u_0 = u_t$, $\eta_t = \text{Fluss von } u_0$) treten genau dann auf, wenn $\nabla_{u_0} u_0 - f$ exakt ist, z.B. $P_e(\nabla_{u_0} u_0) = f$. Natürlich gibt es stationäre Lösungen.

11.2 Ergebnisse für die Euler-Gleichungen

Sei $s > \frac{n}{2} + 1$.²

1. **Existenz und Eindeutigkeit** Falls u_0 ein H^s Vektorfeld ist und $\operatorname{div} u_0 = 0$, dann gibt es eine eindeutige Lösung u_t , definiert für $-\tau < t < \tau$ für ein $\tau > 0$; u_t ist ein H^s -Vektorfeld und ist C^1 als Funktion von (x, t) für $-\tau < t < \tau$ und $x \in M$. Die Struktur η_t ist ein H^s - (insbesondere ein C^1 -) volumenerhaltender Diffeomorphismus.

²Wir haben die Eindeutigkeit nur für $s > \frac{n}{2} + 2$ gezeigt. Dennoch kann man es hier beweisen durch ein klassisches Argument oder dadurch, dass $H^s \subset C^{1+\alpha}$ für ein $\alpha > 0$, falls $s > \frac{n}{2} + 1$ und unter Benutzung der Tatsache, dass 3.2 gilt für $C^{1+\alpha}$.

- 2. Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten** Für jedes u_0 ist $\tau > 0$ in 1. einheitlich in einer ganzen H^s -Umgebung von u_0 abhängig und die Abbildung $u_0 \rightarrow u_t$ ist stetig für jedes $t \in (-\tau, \tau)$. Jedes u_t ist eine stetige Kurve in H^s und insbesondere ist $\lim_{t \rightarrow 0} u_t = u_0$ in der H^s -Topologie³.
- 3. Regularität von Lösungen** Falls $u_0 \in C^\infty$ ist, so ist u_t im Inneren von M und als Funktion von (t, x) ist $u_t \in C^\infty$ und so lange u_t definiert ist, ist u_t in H^s . Die Abbildung $u_0 \rightarrow u_t$ ist glatt in der C^∞ -Topologie³.
4. $\lim_{f \rightarrow 0} v_t^f$ Sei v_t^f die Lösung mit Kraft f . Falls $f \rightarrow 0$ in H^s , dann ist für jedes t $v_t^f \rightarrow v_t^0$ in H^s ; $\tau > 0$ ist unabhängig von $f \rightarrow 0$.
- 5. Fortsetzbarkeit von t** Sei (a, b) das maximale Existenzintervall der Lösung u_t . Dann ist $a = -\infty$ und $b = \infty$ genau dann, wenn für jedes offene Existenzintervall $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ $\sup_{a_1 < t < b_1} \|u_t\|_s < \infty$. Falls Lösungen für ein s erweiterbar sind für alle t , dann auch für alle s .
- 6. 2-dimensionaler Fall** Falls M ein beschränktes offenes Gebiet in \mathbb{R}^2 ist, existieren Lösungen in $C^{1+\alpha}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (so bleiben obige Eigenschaften gültig für alle t). (Gleiches bleibt auch für jede kompakte Mannigfaltigkeit gültig).
- 7. Überdeckungssatz** Angenommen $f = 0$. Für jedes s existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass falls $\eta \in \mathcal{D}_\mu^s$ innerhalb ε der Identität in der H^s -Norm ist, dann gibt es einen eindeutigen H^s -Anfangswert u_0 mit $\|u_0\|_s < \varepsilon$, so dass wir $\eta_1 = \eta$ haben, wenn η_t die Struktur (z.B. der Fluss) einer Lösung u_t ist.
- 8. Variationsprinzip** Angenommen $f = 0$. Es gibt für jedes s eine Umgebung U der Identität $e \in \mathcal{D}_\mu^s$, so dass die Lösungsstruktur η_t die eindeutige C^1 -Kurve ist, die e und η_δ (für $\eta_\delta \in U$, $\delta > 0$) verbindet, wobei η_δ die H^0 -Energie minimiert: $\int_0^\delta \langle u_t, u_t \rangle dt$, wobei $\langle u, v \rangle = \int_M \langle u(m), v(m) \rangle \mu(m)$ und \langle, \rangle die Metrik auf M und $u_t = \eta_t' \circ \eta_t^{-1}$ Lösung der Euler-Gleichungen ist.

³Es wurde nicht bewiesen (und es ist vermutlich auch falsch), dass die Abbildung $u_0 \rightarrow u_t$ in der H^s -Topologie glatt oder auch nur Lipschitz-stetig ist.

Literatur

- [1] V.Arnold, *Sur la geometri differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications l'hydrodynamique des fluids parfaits*, Ann. Inst. Grenoble **16** (1)(1966), 319-361.
- [2] D.Ebin, *The manifold of riemannian metrics*, in Proc. Sympos. Pure Math., vol. 15, Amer. Math. Soc. (to appear) and Bull. Ameri. Math. Soc. **74** (1968), 1001-1003.
- [3] David G. Ebin and Jerrold Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Bull Amer. Math. Soc. **75** (1969), 962.
- [4] T.Kato, *On classical solutions of the two dimensional non-stationary Euler equation*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis **25** (3) (1967), 188-200.
- [5] L.Lichtenstein, *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtz-schen Wirbelsätze*, Math. Z. **23** (1925), 89-154, 309-316; **26** (1927), 196-323; **28** (1928), 287-415, 725, **32** (1930), 608.
- [6] H.Omori, *On the group of diffeomorphisms on a compact manifold*, in Proc. Sympos. Pure Math. vol. 15, Amer. Math. Soc. (to appear)
- [7] R.Palais, *Foundations of Global Non-linear Analysis*, Benjamin, N.Y., 1968.
- [8] S.Smale, *Morse theory and non-linear generalization of Dirichlet problem*, Ann. of Math. **80** (1964), 382-396.
- [9] W.Wolibner, *Un thorme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogne, incompressible, pendant un temps infiniment longue*, Math. Z. **37** (1933), 698-726.