Dirac-Mannigfaltigkeiten

Jochen Merker

2. September 2005

Überblick

1 Rückblick

Überblick

1 Rückblick

2 Zwangsbedingungen

Überblick

1 Rückblick

2 Zwangsbedingungen

3 Dirac-Strukturen

Überblick

1 Rückblick

2 Zwangsbedingungen

3 Dirac-Strukturen

4 Hamiltonsche Gleichungen

Erinnerung

Wie waren wir von der Lagrangeschen Mechanik zur Hamiltonschen Mechanik auf symplektischen oder Poisson-Mannigfaltigkeiten gelangt ?

Erinnerung

Wie waren wir von der Lagrangeschen Mechanik zur Hamiltonschen Mechanik auf symplektischen oder Poisson-Mannigfaltigkeiten gelangt ?

Lagrange I

Mechanische Systeme werden durch ihren Konfigurationsraum Q und eine Lagrange-Funktion $L : TQ \to \mathbb{R}$ auf dem Zustandsraum TQ modelliert.

Lagrange II

- Die zeitliche Entwicklung der Konfiguration wird durch eine Kurve $q(t)$ im Konfigurationsraum Q modelliert, die das Wirkungsfunktional $I(q(\cdot)) := \int L(\dot{q}(t))dt$ minimiert oder die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

löst.

Lagrange II

- Die zeitliche Entwicklung der Konfiguration wird durch eine Kurve $q(t)$ im Konfigurationsraum Q modelliert, die das Wirkungsfunktional $I(q(\cdot)) := \int L(\dot{q}(t))dt$ minimiert oder die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

  löst.
- Ist Q Riemannsch und $F = \operatorname{grad} U$ ein Potentialfeld auf Q, so sind die Newtonschen Gleichungen $F = ma = m\ddot{q}$ äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gleichungen mit $L(\dot{q}) := \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 - U(q)$.

(Hyper-)Reguläre Lagrange-Funktionen

- Ist L regulär, d.h. die geschlossene 2-Form $(\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ ist nichtdegeneriert oder $\mathcal{L}L$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, so ist die Euler-Lagrange-Gleichung eine Gleichung zweiter Ordnung auf Q und zur Hamiltonschen Gleichung $\ddot{q} = X_E(\dot{q})$ auf TQ bzgl. der symplektischen Form $\omega_L := (\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ und der Energie $E(\dot{q}) := \mathcal{L}L(\dot{q})\dot{q} - L(\dot{q})$ äquivalent.

(Hyper-)Reguläre Lagrange-Funktionen

- Ist L regulär, d.h. die geschlossene 2-Form $(\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ ist nichtdegeneriert oder $\mathcal{L}L$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, so ist die Euler-Lagrange-Gleichung eine Gleichung zweiter Ordnung auf Q und zur Hamiltonschen Gleichung $\ddot{q} = X_E(\dot{q})$ auf TQ bzgl. der symplektischen Form $\omega_L := (\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ und der Energie $E(\dot{q}) := \mathcal{L}L(\dot{q})\dot{q} - L(\dot{q})$ äquivalent.
- Ist L hyperregulär, d.h. $\mathcal{L}L$ ist ein globaler Diffeomorphismus, so liegt sogar Äquivalenz zur Hamiltonschen Gleichung $\dot{p} = X_H(p)$ auf T^*Q bzgl. der üblichen symplektischen Form ω_{T^*Q} und der Energie $H := E \circ (\mathcal{L}L)^{-1}$ vor.

(Hyper-)Reguläre Lagrange-Funktionen

- Ist L regulär, d.h. die geschlossene 2-Form $(\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ ist nichtdegeneriert oder $\mathcal{L}L$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, so ist die Euler-Lagrange-Gleichung eine Gleichung zweiter Ordnung auf Q und zur Hamiltonschen Gleichung $\ddot{q} = X_E(\dot{q})$ auf TQ bzgl. der symplektischen Form $\omega_L := (\mathcal{L}L)^*\omega_{T^*Q}$ und der Energie $E(\dot{q}) := \mathcal{L}L(\dot{q})\dot{q} - L(\dot{q})$ äquivalent.
- Ist L hyperregulär, d.h. $\mathcal{L}L$ ist ein globaler Diffeomorphismus, so liegt sogar Äquivalenz zur Hamiltonschen Gleichung $\dot{p} = X_H(p)$ auf T^*Q bzgl. der üblichen symplektischen Form ω_{T^*Q} und der Energie $H := E \circ (\mathcal{L}L)^{-1}$ vor.
- Man kann die symplektische Form als Abbildung $\omega : TM \to TM^*$ auffassen, im stark nichtdegenerierten Fall ist ω ein Isomorphismus.

Hamilton

- Mechanische Systeme werden durch eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) als Zustandsraum und eine Hamilton-Funktion $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ modelliert.

Hamilton

- Mechanische Systeme werden durch eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) als Zustandsraum und eine Hamilton-Funktion $H : M \to \mathbb{R}$ modelliert.
- Die zeitliche Entwicklung mechanischer Systeme wird durch den symplektischen Fluß zum durch $\omega(X_H, \cdot) = dH$ definierten Hamiltonschen Vektorfeld X_H modelliert.

Poisson

- Zu einer symplektischen Form ω definiere die Poisson-Klammer $\{F, G\} := \omega(X_F, X_G)$, dann übersetzen sich Schiefsymmetrie und Geschlossenheit von ω zu Schiefsymmetrie und Jacobi-Identität für $\{\cdot, \cdot\}$.

Poisson

- Zu einer symplektischen Form ω definiere die Poisson-Klammer $\{F, G\} := \omega(X_F, X_G)$, dann übersetzen sich Schiefsymmetrie und Geschlossenheit von ω zu Schiefsymmetrie und Jacobi-Identität für $\{\cdot,\cdot\}$.
- Mechanische Systeme werden durch ihren Zustandsraum, eine Poisson-Mannigfaltigkeiten $(M, \{\cdot,\cdot\})$, und eine Hamilton-Funktion $H : M \to \mathbb{R}$ auf M modelliert.

Poisson

- Zu einer symplektischen Form ω definiere die Poisson-Klammer $\{F, G\} := \omega(X_F, X_G)$, dann übersetzen sich Schiefsymmetrie und Geschlossenheit von ω zu Schiefsymmetrie und Jacobi-Identität für $\{\cdot, \cdot\}$.
- Mechanische Systeme werden durch ihren Zustandsraum, eine Poisson-Mannigfaltigkeiten $(M, \{\cdot, \cdot\})$, und eine Hamilton-Funktion $H : M \to \mathbb{R}$ auf M modelliert.
- Die zeitliche Entwicklung mechanischer Systeme wird durch den symplektischen Fluß zum durch $X_H(F) = \{F, H\}$ definierten Hamiltonschen Vektorfeld X_H modelliert.

Poisson-Tensor und Symplektische Stratifizierung

Es gibt einen antisymmetrischen und der Jacobi-Identität genügenden 2-Tensor $B : T^*M \times T^*M \to \mathbb{R}$ mit $\{F, G\} = B(dF, dG)$. Ist B als Abbildung $T^*M \to T^{**}M \cong TM$ ein Isomorphismus, so ist M symplektisch mit B als Inverser zu ω, i.a. hat man aber nur eine symplektische Blätterung von M in symplektische und injektiv immersierte Untermannigfaltigkeiten.

Poisson-Tensor und Symplektische Stratifizierung

Es gibt einen antisymmetrischen und der Jacobi-Identität genügenden 2-Tensor $B : T^*M \times T^*M \to \mathbb{R}$ mit $\{F, G\} = B(dF, dG)$. Ist B als Abbildung $T^*M \to T^{**}M \cong TM$ ein Isomorphismus, so ist M symplektisch mit B als Inverser zu ω, i.a. hat man aber nur eine symplektische Blätterung von M in symplektische und injektiv immersierte Untermannigfaltigkeiten.

Bemerke

Durch den Übergang von symplektischen zu Poisson-Mannigfaltigkeiten hat man im Prinzip darauf verzichtet, daß ω überall auf TM definiert ist.

Frage

- Kann man auch noch auf die Nichtdegeneriertheit von ω verzichten ?

Frage

- Kann man auch noch auf die Nichtdegeneriertheit von ω verzichten ?
- Beispielsweise: Kann man die Hamiltonsche Mechanik auch auf den Fall nichtregulärer Lagrange-Funktionen verallgemeinern, wo ja ω_L degeneriert war ?

Frage

- Kann man auch noch auf die Nichtdegeneriertheit von ω verzichten ?
- Beispielsweise: Kann man die Hamiltonsche Mechanik auch auf den Fall nichtregulärer Lagrange-Funktionen verallgemeinern, wo ja ω_L degeneriert war ?
- Nocheinmal mit anderen Worten: Kann man die Hamiltonsche Mechanik auch auf den Fall nichtholonomer Zwangsbedingungen verallgemeinern ? (Die Begründung, daß solche Zwangsbedingungen gerade bei Degeneriertheit vorliegen, folgt sofort.)

Frage

- Kann man auch noch auf die Nichtdegeneriertheit von ω verzichten ?
- Beispielsweise: Kann man die Hamiltonsche Mechanik auch auf den Fall nichtregulärer Lagrange-Funktionen verallgemeinern, wo ja ω_L degeneriert war ?
- Nocheinmal mit anderen Worten: Kann man die Hamiltonsche Mechanik auch auf den Fall nichtholonomer Zwangsbedingungen verallgemeinern ? (Die Begründung, daß solche Zwangsbedingungen gerade bei Degeneriertheit vorliegen, folgt sofort.)

Antwort

Ja, mittels Dirac-Mannigfaltigkeiten als Zustandsräumen kann man Mechanik auch bei degeneriertem ω formulieren.

Definition

Ist L eine Lagrange-Funktion auf dem Konfigurationsraum Q und R eine Untermannigfaltigkeit von Q, so spricht man von holonomen Zwangsbedingungen, wenn man das mechanische System zwingt, nur Zustände in R anzunehmen.

Example

Bewegung in einem Potentialfeld unter holonomen Zwangsbedingugen:

- Sei $L : TQ \to \mathbb{R}$ eine reguläre Lagrange-Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Q von der Form kinetische Energie + potentielle Energie: $L(\dot{q}) = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 - U(q)$.

Example

Bewegung in einem Potentialfeld unter holonomen Zwangsbedingugen:

- Sei $L : TQ \to \mathbb{R}$ eine reguläre Lagrange-Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Q von der Form kinetische Energie + potentielle Energie: $L(\dot{q}) = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 - U(q)$.
- Betrachte eine Untermannigfaltigkeit $R \subset Q$ und die darauf eingeschränkte Lagrangefunktion, so ist $X_{E_R} = S_R(R) - \mathrm{ver}(\mathrm{grad}\, U_R)$ das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld auf TQ mit dem Spray S_R bzgl. der auf R induzierten Riemannschen Metrik, der Einschränkung U_R des Potentials auf R und dem vertikalen Lift ver.

Example

- Konkreter gelten mit der orthogonalen Projektion $P : TQ \to TR$ die Gleichungen $\operatorname{grad} U_R = P \circ \operatorname{grad} U$ und $S_R = TP \circ S$.

Example

- Konkreter gelten mit der orthogonalen Projektion $P : TQ \to TR$ die Gleichungen $\operatorname{grad} U_R = P \circ \operatorname{grad} U$ und $S_R = TP \circ S$.
- Noch konkreter ist $(S - S_R)(v) = \operatorname{ver}(Z(v))$ mit dem Vektor $Z(v) = P(\nabla_v v) - \nabla_v v$ (damit diese Gleichung Sinn macht, muß man den Vektor $v \in TR$ zu einem Vektorfeld auf Q erweitern, daß zu R tangential ist).

Example

- Konkreter gelten mit der orthogonalen Projektion $P : TQ \to TR$ die Gleichungen $\operatorname{grad} U_R = P \circ \operatorname{grad} U$ und $S_R = TP \circ S$.
- Noch konkreter ist $(S - S_R)(v) = \operatorname{ver}(Z(v))$ mit dem Vektor $Z(v) = P(\nabla_v v) - \nabla_v v$ (damit diese Gleichung Sinn macht, muß man den Vektor $v \in TR$ zu einem Vektorfeld auf Q erweitern, daß zu R tangential ist).
- Es gilt also $X_{E_R} = S - \operatorname{ver}(P \circ \operatorname{grad} U - Z)$, d.h. durch die Einschränkung der möglichen Konfigurationen von Q auf R entsteht eine Zwangskraft Z, die auf das mechanische System wirkt.

Definition

Allgemeiner spricht man von holonomen Zwangsbedingungen, wenn man ein mechanisches System mit einer symplektischen Mannigfaltigkeit M als Zustandsraum dazu zwingt, nur Zustände in einer symplektischen Untermannigfaltigkeit N anzunehmen, d.h. mit der inklusion $\iota : N \longrightarrow M$ ist $\omega_N = \iota^* \omega_M$ nichtdegeneriert und somit symplektisch.

Definition

Allgemeiner spricht man von holonomen Zwangsbedingungen, wenn man ein mechanisches System mit einer symplektischen Mannigfaltigkeit M als Zustandsraum dazu zwingt, nur Zustände in einer symplektischen Untermannigfaltigkeit N anzunehmen, d.h. mit der inklusion $\iota : N \to M$ ist $\omega_N = \iota^* \omega_M$ nichtdegeneriert und somit symplektisch.

Example

Ist $R \subset Q$ und L reguläre Lagrangefunktion, so ist $TR \subset (TQ, \omega|_L)$ symplektische Untermannigfaltigkeit.

Definition

Zwingt man ein mechanisches System, nur Zustände in einer nichtsymplektischen Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ anzunehmen, so spricht man von nichtholonomen Zwangsbedingungen. Dann ist also $\omega_N = \iota^* \omega_M$ degeneriert, man benötigt also wieder die Dirac-Strukturen.

Definition

Eine Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Unterbündel D von $TM \times TM^*$, das

Definition

Eine Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Unterbündel D von $TM \times TM^*$, das

- maximal isotrop ist, d.h. $D = D^\perp$ gilt mit $D^\perp = \{(X, \alpha) | \forall (Y, \beta) \in D :< (X, \alpha), (Y, \beta) >= 0\}$ und $< (X, \alpha), (Y, \beta) >= \frac{1}{2} (\alpha(Y) + \beta(X))$,

Definition

Eine Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Unterbündel D von $TM \times TM^*$, das

- maximal isotrop ist, d.h. $D = D^\perp$ gilt mit $D^\perp = \{(X,\alpha) | \forall (Y,\beta) \in D :< (X,\alpha),(Y,\beta) >= 0\}$ und $< (X,\alpha),(Y,\beta) >= \frac{1}{2}(\alpha(Y) + \beta(X))$,
- integrabel ist, d.h. $[\Gamma(D),\Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$ gilt für die Menge der Schnitte $\Gamma(D)$ von D, wobei $[\cdot,\cdot]$ die Courant-Klammer ist, die schiefsymetrisch die Form $[(X,\alpha),(Y,\beta)] := ([X,Y], L_X\beta - L_Y\alpha - \frac{1}{2}d(i_X\beta - i_Y\alpha))$ hat und nichtschiefsymmetrisch die Form $[(X,\alpha),(Y,\beta)] := ([X,Y], L_X\beta - i_Y d\alpha)$.

Example

- Der Graph graph ω einer symplektischen Form ist eine Dirac-Struktur.

Example

- Der Graph $\operatorname{graph}\omega$ einer symplektischen Form ist eine Dirac-Struktur.
- Der Cograph $\operatorname{cograph}(B)$ eines Poisson-Tensors ist eine Dirac-Struktur.

Example

- Der Graph graph ω einer symplektischen Form ist eine Dirac-Struktur.
- Der Cograph cograph(B) eines Poisson-Tensors ist eine Dirac-Struktur.

Proof.

Beweis für symplektische Formen ω:
Es gilt $D = D^{\perp}$ wegen $\omega(X)(Y) + \omega(Y)(X) = 0$ (Schiefsymmetrie). $\square$

Proof.

- Für $[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$ muß man zeigen:
  $([X, Y], L_X(\omega(Y)) - i_Y d(\omega(X))) = ([X, Y], \omega([X, Y]))$

□

Proof.

- Für $[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$ muß man zeigen:
  $([X, Y], L_X(\omega(Y)) - i_Y d(\omega(X))) = ([X, Y], \omega([X, Y]))$
- Dies folgt aus
  $i_Y d(\omega(X)) = (d i_X \omega)(Y) = (L_X \omega - i_X d\omega)(Y) = (L_X \omega)(Y)$
  (Cartan's magische Formel $L_X = d i_X + i_X d$ und $d\omega = 0$)

$\square$

Proof.

- Für $[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subset \Gamma(D)$ muß man zeigen: $([X, Y], L_X(\omega(Y)) - i_Y d(\omega(X))) = ([X, Y], \omega([X, Y]))$
- Dies folgt aus $i_Y d(\omega(X)) = (d i_X \omega)(Y) = (L_X \omega - i_X d\omega)(Y) = (L_X \omega)(Y)$ (Cartan's magische Formel $L_X = d i_X + i_X d$ und $d\omega = 0$)
- Es gilt nämlich

$$L_X(\omega(Y)) - (L_X \omega)(Y) = \omega([X, Y])$$

wegen der algebraischen Definition $L_X(i_Y \omega) = i_Y(L_X \omega) + i_{L_X Y} \omega$ der Lie-Klammer auf Formen höherer Ordnung und wegen $L_X Y = [X, Y]$ gilt.

$\square$

Presymplektische Blätterung

Nicht jede Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist Graph einer symplektischen Form oder Cograph eines Poisson-Tensors, jedoch ist jede Dirac-Struktur durch eine presymplektische Blätterung charakterisiert.

Presymplektische Blätterung

Nicht jede Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist Graph einer symplektischen Form oder Cograph eines Poisson-Tensors, jedoch ist jede Dirac-Struktur durch eine presymplektische Blätterung charakterisiert.

Proof.

- Sei $L := \pi_{TM}(D)$ das Bild von D unter $\pi_{TM} : TM \times TM^* \to TM$.

$\square$

Presymplektische Blätterung

Nicht jede Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist Graph einer symplektischen Form oder Cograph eines Poisson-Tensors, jedoch ist jede Dirac-Struktur durch eine presymplektische Blätterung charakterisiert.

Proof.

- Sei $L := \pi_{TM}(D)$ das Bild von D unter $\pi_{TM} : TM \times TM^* \to TM$.
- Wegen der Integrabilität von D ist L involutiv, d.h. $[X, Y] \in L$ gilt für alle Schnitte X, Y von L.

$\square$

Presymplektische Blätterung

Nicht jede Dirac-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist Graph einer symplektischen Form oder Cograph eines Poisson-Tensors, jedoch ist jede Dirac-Struktur durch eine presymplektische Blätterung charakterisiert.

Proof.

- Sei $L := \pi_{TM}(D)$ das Bild von D unter $\pi_{TM} : TM \times TM^* \to TM$.
- Wegen der Integrabilität von D ist L involutiv, d.h. $[X, Y] \in L$ gilt für alle Schnitte X, Y von L.
- In der Tat, es gilt $[\pi_{TM}(\Gamma(D)), \pi_{TM}(\Gamma(D))] \subset \pi_{TM}(\Gamma(D))$.

$\square$

Theorem

Frobenius: Jede involutive Distribution L (von konstantem Rang) ist integrabel, d.h. für jedes $m \in M$ gibt es eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ durch m mit $T_n N = L_n$ für jedes $n \in N$.

Theorem

Frobenius: Jede involutive Distribution L (von konstantem Rang) ist integrabel, d.h. für jedes $m \in M$ gibt es eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ durch m mit $T_n N = L_n$ für jedes $n \in N$.

Proof.

- Daher induziert L eine (singuläre) Blätterung von M.

Theorem

Frobenius: Jede involutive Distribution L (von konstantem Rang) ist integrabel, d.h. für jedes $m \in M$ gibt es eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ durch m mit $T_n N = L_n$ für jedes $n \in N$.

Proof.

- Daher induziert L eine (singuläre) Blätterung von M.
- Auf dieser singulären Blätterung ist $\omega(X, Y) := \alpha(Y)$ mit α so, daß $(X, \alpha) \in D$, eine presymplektische Form.

Theorem

Frobenius: Jede involutive Distribution L (von konstantem Rang) ist integrabel, d.h. für jedes $m \in M$ gibt es eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ durch m mit $T_n N = L_n$ für jedes $n \in N$.

Proof.

- Daher induziert L eine (singuläre) Blätterung von M.
- Auf dieser singulären Blätterung ist $\omega(X, Y) := \alpha(Y)$ mit α so, daß $(X, \alpha) \in D$, eine presymplektische Form.
- In der Tat, $\omega : L \oplus L \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn einerseits folgt aus $X \in L = \pi_{TM}(D)$ die Existenz von α mit $(X, \alpha) \in D$

Theorem

Frobenius: Jede involutive Distribution L (von konstantem Rang) ist integrabel, d.h. für jedes $m \in M$ gibt es eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ durch m mit $T_n N = L_n$ für jedes $n \in N$.

Proof.

- Daher induziert L eine (singuläre) Blätterung von M.
- Auf dieser singulären Blätterung ist $\omega(X, Y) := \alpha(Y)$ mit α so, daß $(X, \alpha) \in D$, eine presymplektische Form.
- In der Tat, $\omega : L \oplus L \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn einerseits folgt aus $X \in L = \pi_{TM}(D)$ die Existenz von α mit $(X, \alpha) \in D$
- Andererseits impliziert $(X, \alpha), (X, \alpha') \in D$ auch $\alpha'(Y) = \alpha'(Y) + \beta(X) + \alpha(Y) = \alpha(Y)$ für jedes $(Y, \beta) \in D$ wegen der Isotropie $\alpha(Y) + \beta(X) = 0 = \alpha'(Y) + \beta(X)$.

Proof.

- ω ist schiefsymmetrisch wegen
  $\alpha(Y) = \alpha(Y) - (\alpha(Y) + \beta(X)) = -\beta(X).$

$\square$

Proof.

- ω ist schiefsymmetrisch wegen
  $\alpha(Y) = \alpha(Y) - (\alpha(Y) + \beta(X)) = -\beta(X)$.
- Außerdem gilt $d\omega = -T|_L$ mit der Torsion T von D, und da Integrabilität äquivalent zu $T = 0$ ist, ist ω auch geschlossen, also eine presymplektische Form.

$\square$

Proof.

- ω ist schiefsymmetrisch wegen $\alpha(Y) = \alpha(Y) - (\alpha(Y) + \beta(X)) = -\beta(X)$.
- Außerdem gilt $d\omega = -T|_L$ mit der Torsion T von D, und da Integrabilität äquivalent zu $T = 0$ ist, ist ω auch geschlossen, also eine presymplektische Form.

$\square$

Lemma

Degeneriertheit: Der Kern $K := \pi_{TM}(D \cap (TM \oplus 0))$ *von* $\omega : L \to L^*$ *ist gerade der Annihilator von* $\pi_{TM^*}(D)$.

Proof.

Sei $(X,\alpha) \in D$, dann gilt $\alpha|_L = \omega(X) = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $Y \in L$, oder äquivalenterweise $\beta(X) = 0$ für alle $\beta \in \pi_{TM^*}(D)$ gilt, d.h. wenn $X \in (\pi_{TM^*}(D))^0$ gilt. $\square$

Proof.

Sei $(X, \alpha) \in D$, dann gilt $\alpha|_L = \omega(X) = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $Y \in L$, oder äquivalenterweise $\beta(X) = 0$ für alle $\beta \in \pi_{TM^*}(D)$ gilt, d.h. wenn $X \in (\pi_{TM^*}(D))^0$ gilt. $\square$

Bemerke

K ist trivial, d.h. ω ist eine symplektische Form, genau dann wenn D der Cograph eines Poisson-Tensors ist.

Poisson-Blätterung

- Dual zur symplektischen Blätterung kann man Dirac-Mannigfaltigkeiten (M, D) auch durch cosymplektische Blätterungen charakterisieren:

Poisson-Blätterung

- Dual zur symplektischen Blätterung kann man Dirac-Mannigfaltigkeiten (M, D) auch durch cosymplektische Blätterungen charakterisieren:
- Die Projektion $\pi_{TM^*}(D)$ von D auf TM^* kann mit dem Dual von TM/K und somit mit $K^0 = \{\alpha \in TM | \alpha|_K = 0\}$ identifiziert werden,

Poisson-Blätterung

- Dual zur symplektischen Blätterung kann man Dirac-Mannigfaltigkeiten (M, D) auch durch cosymplektische Blätterungen charakterisieren:
- Die Projektion $\pi_{TM^*}(D)$ von D auf TM^* kann mit dem Dual von TM/K und somit mit $K^0 = \{\alpha \in TM|\alpha|_K = 0\}$ identifiziert werden,
- Die Dirac-Struktur induziert einen Poisson-Tensor $B : (TM/K)^* \oplus (TM/K)^* \to \mathbb{R}$.

Erinnerung

Auf einer Poisson-Mannigfaltigkeit (M, B) haben die Hamiltonschen Gleichungen die Form $\dot{m} = \pi(dH)(m)$.

Erinnerung

Auf einer Poisson-Mannigfaltigkeit (M, B) haben die Hamiltonschen Gleichungen die Form $\dot{m} = \pi(dH)(m)$.

Problem

Auf einer Dirac-Mannigfaltigkeit mit $K \neq 0$ müssen wir diese Gleichungen modifizieren, da B nur auf $(TM/K)^* = K^0$ definiert ist.

Lagrange-Multiplikatoren

- Sei H die Hamilton-Funktion auf M. Durch Subtraktion eines eindeutigen $\lambda_{out} \in K^*$ kann man $dH - \lambda_{out} \in K^0$ erreichen.

Lagrange-Multiplikatoren

- Sei H die Hamilton-Funktion auf M. Durch Subtraktion eines eindeutigen $\lambda_{out} \in K^*$ kann man $dH - \lambda_{out} \in K^0$ erreichen.
- Die Hamiltonsche Gleichung $[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})$ macht nun Sinn.

Lagrange-Multiplikatoren

- Sei H die Hamilton-Funktion auf M. Durch Subtraktion eines eindeutigen $\lambda_{out} \in K^*$ kann man $dH - \lambda_{out} \in K^0$ erreichen.
- Die Hamiltonsche Gleichung $[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})$ macht nun Sinn.
- Verlangt man auch noch $\dot{m} - \lambda_{in} \in (K^*)^0$, so gibt es höchstens eine Kurve, die diese beiden Gleichungen löst.

Lagrange-Multiplikatoren

- Sei H die Hamilton-Funktion auf M. Durch Subtraktion eines eindeutigen $\lambda_{out} \in K^*$ kann man $dH - \lambda_{out} \in K^0$ erreichen.
- Die Hamiltonsche Gleichung $[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})$ macht nun Sinn.
- Verlangt man auch noch $\dot{m} - \lambda_{in} \in (K^*)^0$, so gibt es höchstens eine Kurve, die diese beiden Gleichungen löst.
- Die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_{in} \in K$, $\lambda_{out} \in K^*$ beschreiben, wieviel Energie ins bzw. aus dem System gepumpt wird.

Energibilanz

Für die Änderung der Energie H entlang des Flusses gilt
$dH(\dot{m}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$

Energibilanz

Für die Änderung der Energie H entlang des Flusses gilt
$dH(\dot{m}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$

Proof.

- Es gilt $(dH - \lambda_{out})(\dot{m} - \lambda_{in}) = (dH - \lambda_{out})(\dot{m}) = 0$ wegen $dH - \lambda_{out} \in K^0$ und $\lambda_{in} \in K$, sowie wegen $[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})$ und $B(dH - \lambda_{out}, dH - \lambda_{out}) = 0$.

□

Energibilanz

Für die Änderung der Energie H entlang des Flusses gilt
$dH(\dot{m}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$

Proof.

- Es gilt $(dH - \lambda_{out})(\dot{m} - \lambda_{in}) = (dH - \lambda_{out})(\dot{m}) = 0$ wegen $dH - \lambda_{out} \in K^0$ und $\lambda_{in} \in K$, sowie wegen $[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})$ und $B(dH - \lambda_{out}, dH - \lambda_{out}) = 0$.
- Daher gilt

$$dH(\dot{m}) = -\lambda_{out}(\lambda_{in}) + dH(\lambda_{in}) + \lambda_{out}(\dot{m}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$$

wegen $\lambda_{out}(\dot{m}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$ aufgrund von $\dot{m} - \lambda_{in} \in (K^*)^0$, und wegen $dH(\lambda_{in}) = \lambda_{out}(\lambda_{in})$ aufgrund von $dH - \lambda_{out} \in K^0$.

$\square$

Hamiltonsche Gleichung

Sei H Hamilton-Funktion. Die Hamiltonschen Gleichungen für eine Kurve $(\lambda_{in}, \lambda_{out}) \in K \oplus K^*$ mit m als Fußpunkt lauten

$$[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})(m)$$
$$dH(m) - \lambda_{out} \in K^0$$
$$\dot{m} - \lambda_{in} \in (K^*)^0$$

Hamiltonsche Gleichung

Sei H Hamilton-Funktion. Die Hamiltonschen Gleichungen für eine Kurve $(\lambda_{in}, \lambda_{out}) \in K \oplus K^*$ mit m als Fußpunkt lauten

$$[\dot{m}]_{TM/K} = B(dH - \lambda_{out})(m)$$

$$dH(m) - \lambda_{out} \in K^0$$

$$\dot{m} - \lambda_{in} \in (K^*)^0$$

Alternativ

$(\dot{m} - \lambda_{in}, dH(m) - \lambda_{out}) \in D \cap (K \oplus K^*)^0$

Anwendungen

- Endlichdimensional: z.B. Kirchhoffsche Gesetze in Schaltkreisen (Zwangsbedingungen)

Anwendungen

- Endlichdimensional: z.B. Kirchhoffsche Gesetze in Schaltkreisen (Zwangsbedingungen)
- Unendlichdimensional: Austausch von Energie über Ränder von Gebieten hinweg (z.B. in der Strömungsmechanik)

Anwendungen

- Endlichdimensional: z.B. Kirchhoffsche Gesetze in Schaltkreisen (Zwangsbedingungen)
- Unendlichdimensional: Austausch von Energie über Ränder von Gebieten hinweg (z.B. in der Strömungsmechanik)
- Modellierung des Zusammenfügens von mechanischen Systemen: Stecke die Energie, die aus System A herauskommt, in System B hinein, und umgekehrt.

Anwendungen

- Endlichdimensional: z.B. Kirchhoffsche Gesetze in Schaltkreisen (Zwangsbedingungen)
- Unendlichdimensional: Austausch von Energie über Ränder von Gebieten hinweg (z.B. in der Strömungsmechanik)
- Modellierung des Zusammenfügens von mechanischen Systemen: Stecke die Energie, die aus System A herauskommt, in System B hinein, und umgekehrt.
- Modellierung von mechanischen Systemen mit nichtholonomen Zwangsbedingungen

Fazit

Dirac-Mannigfaltigkeiten sind eine sinnvolle Verallgemeinerung von symplektischen und Poisson-Mannigfaltigkeiten, die zusätzlich den Austausch von Energie beschreiben.