# Symplektische Geometrie

Roland Gunesch

31. August 2005

## Symplektische Vektorrume

- Wiederholung: Eine (schwach) **symplektische Form** auf einem Vektorraum $V$ ist eine Bilinearform

$$\omega : V \times V \to \mathbb{R}$$

die schiefsymmetrisch ist, d.h.

$$\omega(w.v) = -\omega(v, w)$$

für alle $v, w$ (bzw.

$$\omega(v, v) = 0$$

für alle $v$) und die nicht ausgeartet ist, d.h.

$$\omega(v, w) = 0 \; \forall w \implies v = 0.$$

## Normalform

- Sei $V$ endlichdimensional und $\omega$ eine beliebige 2-Form auf $V$. Dann gilt in geeigneten Koordinaten:

$$\omega(v,w) = v^t \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w.$$

## Normalform

- Sei $V$ endlichdimensional und $\omega$ eine beliebige 2-Form auf $V$. Dann gilt in geeigneten Koordinaten:

$$\omega(v, w) = v^t \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w.$$

- Beweis: Klar für $\omega$ konstant 0. Ansonsten gibt es $v, w$ mit $\omega(v, w) \neq 0$. OBdA $\omega(v, w) = 1$. Dann ist $\omega$ auf $W$ :=span$(v, w)$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Setze $e_1 := v, \; e_{n+1} := w$. Wende dasselbe Argument induktiv an auf $W^\perp := \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \; \forall w \in W\}$ (dies hat Kodimension 2).

## gerade Dimension

- Folgerung: Ist $\dim(V)$ endlich, $\omega$ nicht ausgeartet und schief-symmetrisch, so ist $\dim(V)$ gerade.

## Normalform

## gerade Dimension

- Folgerung: Ist $\dim(V)$ endlich, $\omega$ nicht ausgeartet und schief-symmetrisch, so ist $\dim(V)$ gerade.

## Normalform

- Weiterhin gibt es eine Basis $(e_1, \ldots, e_2 n)$ von $V$ , so dass gilt:

$$\omega(v, w) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge e_{n+i}^*.$$

## Symplektische lineare Abbildung

### Definition

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen symplektischen Vektorräumen $(V, \omega)$ und $(W, \tilde{\omega})$ heißt **symplektisch**, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\tilde{\omega}(Lv, Lw) = \omega(v, w).$$

Wenn $L$ auch ein Isomorphismus ist, wird $L$ **Symplektomorphismus** genannt.

## Symplektische lineare Abbildung

### Definition

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen symplektischen Vektorräumen $(V, \omega)$ und $(W, \tilde{\omega})$ heißt **symplektisch**, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\tilde{\omega}(Lv, Lw) = \omega(v, w).$$

Wenn $L$ auch ein Isomorphismus ist, wird $L$ **Symplektomorphismus** genannt.

- Konsequenz: $L$ ist injektiv. Beweis: Übungsaufgabe.

## Symplektische lineare Abbildung

### Definition

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen symplektischen Vektorräumen $(V, \omega)$ und $(W, \tilde{\omega})$ heißt **symplektisch**, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\tilde{\omega}(Lv, Lw) = \omega(v, w).$$

Wenn $L$ auch ein Isomorphismus ist, wird $L$ **Symplektomorphismus** genannt.

- Konsequenz: $L$ ist injektiv. Beweis: Übungsaufgabe.
- Konsequenz: Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, dann ist $L$ ein Symplektomorphismus.

## Symplektische Gruppe

Nun betrachten wir die symplektischen Automorphismen von $V$ (lineare Symplektomorphismen $V \to V$):

### Definition

Die **symplektische Gruppe** von $V$ ist

$$Sp(V) := \{L : V \to V \mid V \text{ Symplektomorphismus}\}.$$

## Symplektische Gruppe

Nun betrachten wir die symplektischen Automorphismen von $V$ (lineare Symplektomorphismen $V \to V$):

### Definition

Die **symplektische Gruppe** von $V$ ist

$$Sp(V) := \{L : V \to V \mid V \text{ Symplektomorphismus}\}.$$

- Insbesondere: $V = K^n$; dann wird $Sp(V)$ auch als $Sp_n(K)$ geschrieben.

## Symplektische Gruppe

Nun betrachten wir die symplektischen Automorphismen von $V$ (lineare Symplektomorphismen $V \to V$):

### Definition

Die **symplektische Gruppe** von $V$ ist

$$Sp(V) := \{L : V \to V \mid V \text{ Symplektomorphismus}\}.$$

- Insbesondere: $V = K^n$; dann wird $Sp(V)$ auch als $Sp_n(K)$ geschrieben.

## Folgerungen:

- $A^t JA = J$,

## Folgerungen:

- $A^t J A = J$,
- $\det(A) = 1$,

## Folgerungen:

- $A^t J A = J$,
- $\det(A) = 1$,
- $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ist eine Volumenform, d.h. $c \cdot \det$ mit $c \neq 0$.

## Beispiele für Elemente der symplektischen Gruppe

## Beispiele für Elemente der symplektischen Gruppe

- $J$

## Beispiele für Elemente der symplektischen Gruppe

- $J$
- $\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & (V^t)^{-1} \end{pmatrix}$

## Beispiele für Elemente der symplektischen Gruppe

- $J$
- $\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & (V^t)^{-1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $S$ symmetrisch

## Beispiele für Elemente der symplektischen Gruppe

- $J$
- $\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & (V^t)^{-1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $S$ symmetrisch
- Obige Beispiele zusammen sind sogar ein Erzeugendensystem.

## Spektrum

- Folgerung / Satz:
  Eigenwerte einer symplektischen Matrix kommen als Quadrupel daher: Mit $a \in \mathbb{C}$ sind auch $\bar{a}$, $1/a$ und $1/\bar{a}$ Eigenwerte mit derselben Vielfachheit.

## Spektrum

- Folgerung / Satz:
  Eigenwerte einer symplektischen Matrix kommen als Quadrupel daher: Mit $a \in \mathbb{C}$ sind auch $\bar{a}$, $1/a$ und $1/\bar{a}$ Eigenwerte mit derselben Vielfachheit.
- Beweis:

$$|A - tE| = |A^t - tE| = |-J(A^t - tE)J| = |A^{-1} - tE|.$$

## Zusammenhang mit Skalarprodukten

- Sei $V$ von endlicher gerader Dimension mit **Skalarprodukt** $< ., . >$ (bilinear, positiv definit). Dann definiert

$$\omega(v, w) :=< v, Jw >$$

eine symplektische Form auf $V$.

## Zusammenhang mit Skalarprodukten

- Sei $V$ von endlicher gerader Dimension mit **Skalarprodukt** $< .,. >$ (bilinear, positiv definit). Dann definiert

  $$\omega(v,w) := < v, Jw >$$

  eine symplektische Form auf $V$.
- Sei umgekehrt $\omega$ eine symplektische Form auf $V$. Dann definiert

  $$< v, w > := \omega(Jv, w)$$

  ein Skalarprodukt auf $V$.

## Symplektische Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

- Definition: Eine Mannigfaltigkeit $M$ endlicher Dimension heißt **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn es eine nicht-ausgeartete 2-Form $\omega$ gibt, die geschlossen ist ($d\omega = 0$).

## Symplektische Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

- Definition: Eine Mannigfaltigkeit $M$ endlicher Dimension heißt **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn es eine nicht-ausgeartete 2-Form $\omega$ gibt, die geschlossen ist ($d\omega = 0$).
- $\omega$ hängt jetzt von $q \in M$ ab. Für alle $q \in M$ ist $T_qM$ isomorph zu $K^n$, und $\omega_q$ ist eine 2-Form auf $T_qM$. Die Zuordnung $q \mapsto \omega_q$ sei glatt (dies macht in Koordinaten Sinn).

## Symplektische Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

- Definition: Eine Mannigfaltigkeit $M$ endlicher Dimension heißt **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn es eine nicht-ausgeartete 2-Form $\omega$ gibt, die geschlossen ist ($d\omega = 0$).
- $\omega$ hängt jetzt von $q \in M$ ab. Für alle $q \in M$ ist $T_q M$ isomorph zu $K^n$, und $\omega_q$ ist eine 2-Form auf $T_q M$. Die Zuordnung $q \mapsto \omega_q$ sei glatt (dies macht in Koordinaten Sinn).
- Eine glatte Abbildung $f : (M, \omega) \to (N, \tilde{\omega})$ heißt **symplektisch**, wenn

  $$(f^* \tilde{\omega}) = \omega$$

  ist. Hierbei ist $(f^* \tilde{\omega})(v, w) := \omega(df \cdot v, df \cdot w)$.

## Symplektische Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

- Definition: Eine Mannigfaltigkeit $M$ endlicher Dimension heißt **symplektische Mannigfaltigkeit**, wenn es eine nicht-ausgeartete 2-Form $\omega$ gibt, die geschlossen ist ($d\omega = 0$).
- $\omega$ hängt jetzt von $q \in M$ ab. Für alle $q \in M$ ist $T_qM$ isomorph zu $K^n$, und $\omega_q$ ist eine 2-Form auf $T_qM$. Die Zuordnung $q \mapsto \omega_q$ sei glatt (dies macht in Koordinaten Sinn).
- Eine glatte Abbildung $f : (M, \omega) \to (N, \tilde{\omega})$ heißt **symplektisch**, wenn

  $$(f^*\tilde{\omega}) = \omega$$

  ist. Hierbei ist $(f^*\tilde{\omega})(v, w) := \omega(df \cdot v, df \cdot w)$.
- Wenn $f$ dazu noch Diffeomorphismus ist, heißt $f$ **Symplektomorphismus**.

## lokale Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit

- 1. Frage: Wie sieht so ein $\omega$ auf $M$ infinitesimal (an einem Punkt) aus?

## lokale Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit

- 1. Frage: Wie sieht so ein $\omega$ auf $M$ infinitesimal (an einem Punkt) aus?
- Antwort: Wir wissen bereits, dass dies eine symplektische Form auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ ist und somit die Normalform

$$\omega(v, w) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge e_{n+i}^*$$

hat.

## Satz von Darboux

- 2. (schwerere) Frage: Wie sieht $\omega$ auf $M$ lokal (in einer Umgebung von einem Punkt) aus?

## Satz von Darboux

- 2. (schwerere) Frage: Wie sieht $\omega$ auf $M$ lokal (in einer Umgebung von einem Punkt) aus?
- Antwort: Satz von Darboux: Sei $M$ endlich-dimensional. Es gibt eine Umgebung $U$ und eine glatte Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit

  $$f^*\omega_0 = \omega.$$

  Hierbei ist $\omega_0$ die Standardform auf $\mathbb{R}^{2n}$ (d.h. mit obiger Normalform).

## Satz von Darboux

- 2. (schwerere) Frage: Wie sieht $\omega$ auf $M$ lokal (in einer Umgebung von einem Punkt) aus?
- Antwort: Satz von Darboux: Sei $M$ endlich-dimensional. Es gibt eine Umgebung $U$ und eine glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{2n}$ mit
$$f^*\omega_0 = \omega.$$
Hierbei ist $\omega_0$ die Standardform auf $\mathbb{R}^{2n}$ (d.h. mit obiger Normalform).
- Anders formuliert: Seien Karten von $M$ gegeben. Dann gibt es um jeden Punkt in $M$ eine Kartenumgebung und zugehörige Karte, so dass $m \mapsto \omega_m$ konstant ist.

## Satz von Darboux

- 2. (schwerere) Frage: Wie sieht $\omega$ auf $M$ lokal (in einer Umgebung von einem Punkt) aus?
- Antwort: Satz von Darboux: Sei $M$ endlich-dimensional. Es gibt eine Umgebung $U$ und eine glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{2n}$ mit
$$f^*\omega_0 = \omega.$$
Hierbei ist $\omega_0$ die Standardform auf $\mathbb{R}^{2n}$ (d.h. mit obiger Normalform).
- Anders formuliert: Seien Karten von $M$ gegeben. Dann gibt es um jeden Punkt in $M$ eine Kartenumgebung und zugehörige Karte, so dass $m \mapsto \omega_m$ konstant ist.
- Der Satz gilt auch bei unendlicher Dimension für stark symplektische Mannigfaltigkeiten. Er gilt nicht für schwach symplektische Mannigfaltigkeiten.

## Beweis (kurz) für den Satz von Darboux

- Gegeben sin $q \in M$ und $\omega$. OBdA ist $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ (da wir $\omega$ in Karten ansehen können).
  Sei $\omega : m \mapsto \omega_m$ die gegebene (nicht konstante) 2-Form.
  Definiere $\bar{\omega}$ auf $U$ mittels $\bar{\omega}_{\bar{q}} := \omega_q$, d.h. unabhängig vom Basispunkt $\bar{q}$. Dies ist eine konstante 2-Form.

## Beweis (kurz) für den Satz von Darboux

- Gegeben sin $q \in M$ und $\omega$. OBdA ist $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ (da wir $\omega$ in Karten ansehen können).
  Sei $\omega : m \mapsto \omega_m$ die gegebene (nicht konstante) 2-Form.
  Definiere $\bar{\omega}$ auf $U$ mittels $\bar{\omega}_{\bar{q}} := \omega_q$, d.h. unabhängig vom Basispunkt $\bar{q}$. Dies ist eine konstante 2-Form.
- Definiere $\omega^{(t)} := (1-t)\omega + t\bar{\omega}$ für $t \in [0,1]$. Dann ist $\omega_q^{(t)}$ für alle $t \in [0,1]$ nicht ausgeartet. Somit gibt es eine Kugel um $q$, auf welcher $\omega^{(t)}$ für alle $t \in [0,1]$ nicht ausgeartet ist.

## Beweis (kurz) für den Satz von Darboux

- Gegeben sin $q \in M$ und $\omega$. OBdA ist $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ (da wir $\omega$ in Karten ansehen können).
  Sei $\omega : m \mapsto \omega_m$ die gegebene (nicht konstante) 2-Form.
  Definiere $\bar{\omega}$ auf $U$ mittels $\bar{\omega}_{\bar{q}} := \omega_q$, d.h. unabhängig vom Basispunkt $\bar{q}$. Dies ist eine konstante 2-Form.
- Definiere $\omega^{(t)} := (1-t)\omega + t\bar{\omega}$ für $t \in [0,1]$. Dann ist $\omega_q^{(t)}$ für alle $t \in [0,1]$ nicht ausgeartet. Somit gibt es eine Kugel um $q$, auf welcher $\omega^{(t)}$ für alle $t \in [0,1]$ nicht ausgeartet ist.
- Nach dem Poincaré-Lemma ist $\omega - \bar{\omega} = d\alpha$ für eine 1-Form $\alpha$. OBdA ist $\alpha(q) = 0$ (Addition von Konstanten). Da $\omega^{(t)}$ nicht ausgeartet ist, gibt es ein Vektorfeld $X^{(t)}$ mit

$$\omega^{(t)}(X_t, v) = -\alpha(v).$$

## Beweis für den Satz von Darboux, Fortsetzung

- Aus $\alpha_q = 0$ folgt $X_q^{(t)} = 0$. Mit dem Satz über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass die Lösungskurve zu $X$ bis Zeit 1 existiert.

## Beweis für den Satz von Darboux, Fortsetzung

- Aus $\alpha_q = 0$ folgt $X_q^{(t)} = 0$. Mit dem Satz über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass die Lösungskurve zu $X$ bis Zeit 1 existiert.
- Durch geschicktes Lie-Ableiten des Flusses $\phi$ zum Vektorfeld $X$ zeigen wir, dss $\phi_t^*\omega^{(t)}$ konstant ist.
  Somit ist $\phi_1$ die gesuchte Karte.