

Einführung in Dynamische Systeme
Vorlesung im Sommersemester 2010
Universität Hamburg

Prof. Roland Gunesch

Kontakt-Information:

Prof. Roland Gunesch
Büro 107, Geomatikum,
Bereich Dgl. und Dynamische Systeme
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
D-20146 Hamburg
Tel. +49-40-428385988
Fax +49-40-428385117

Postanschrift:

Fachbereich Mathematik, Bereich DD
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
D-20146 Hamburg
GERMANY

Webseite von Roland Gunesch:

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/>

Die aktuelle Version dieses Skripts findet sich hier:

http://www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/Vorlesung/SoSe2010/Vorl_Einf_Dyn_Sys/Skript/Gunesch-EinfDynSys-Skript.pdf

Danke für die Mithilfe bei diesem Skript an: Micha Grüber

Skript-Version vom 18.07.2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung: Was sind dynamische Systeme? _____	1
Iteration und Differentialgleichungen _____	1
Grundbegriffe _____	3
Lösungen von Differentialgleichungen: Existenz, Eindeutigkeit, Fortsetzbarkeit _____	5
Klassifikation von eindimensionalen autonomen DGL: _____	6
Kontraktionen _____	11
Irgendwann kontrahierende Abbildungen _____	12
Lineare Systeme _____	15
Abbildungen _____	16
Verhalten von linearen DGL, linearen Flüssen: $\frac{du}{dt} = At.$ _____	17
Dynamik von Liebesaffären (Romeo und Julia) _____	19
Maßerhaltende Systeme _____	21
Dynamik auf dem Torus _____	25
Translationen auf dem Torus _____	25
Dynamik von rationalen Torus-Translation _____	25
Dynamik von irrationalen Torus-Translationen _____	26
Kriterium für Minimalität von Torus-Translationen _____	27
Hyperbolische Abbildungen auf dem Torus _____	30
Physikalische Systeme (theoretische Mechanik) _____	35
Newton-Systeme, klassische Mechanik _____	35
Lagrange-Gleichung und Variationsmethoden _____	36
Hamilton-Systeme _____	38
Mannigfaltigkeiten _____	41
Von Fluss zu Abbildung und zurück _____	45
Poincaré-Abbildungen _____	45
Suspensionen _____	46
Konjugation und Orbit-Äquivalenz _____	49
Hufeisen und Büroklammer _____	53

INHALTSVERZEICHNIS

Symbolische Dynamik	57
Fraktale und Dimension	59
Selbstähnlichkeitsdimension	59
Hausdorff-Dimension	61
Box-Dimension	62
Dimensionsberechnung per Computer	63
Hyperbolische Dynamik	65
Motivation: Strecken und Stauchen	65
Motivation: Präzise Vorhersagen aus unpräzisen Daten	65
Tangentialraum, Tangentialbündel	65
Anosov-Diffeomorphismen	66
Hyperbolische Mengen, hyperbolische Abbildungen	67
Alternative Hyperbolizitätsbedingung, Lyapunov-Norm	69
Expandierende Abbildungen	69
Eigenschaften von hyperbolischen Mengen	69
Kegelbedingungen für Hyperbolizität	70
Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten	70
ε -Pseudo-Orbits	72
Beschattung von Orbits	72
Topologische Entropie	75
Topologische Entropie von Abbildungen	75
Bowen-Metrik	75
Zählen von Überdeckungen	76
Topologische Entropie als exponentielle Wachstumsrate	76
Wieso heißt diese Entropie „topologisch“?	77
Eigenschaften der topologischen Entropie	79
Spannende und separierte Mengen	81
Topologische Entropie von Flüssen	82
Maß-theoretische Entropie	85
Motivation des Begriffes „Information“	85
Bits	86
Partitionen eines Maßraums	86
Information und Entropie einer Partition	86
Verfeinerungen und maß-theoretische Entropie	87
Attraktoren	89
Definition(en) und elementare Eigenschaften	89
Bifurkationen	91
Krisen von Attraktoren	91
Literaturverzeichnis	93
Index	95

Einleitung: Was sind dynamische Systeme?

Dynamische Systeme sind die Lehre von allen Dingen, die sich mit der Zeit ändern. Das beinhaltet das Universum, das Leben und den ganzen Rest. Folgendes sind typische Beispiele, die untersucht werden:

- Das Wetter,
- Planetensysteme,
- physikalische Pendel,
- Computersimulationen wie das „game of life“,
- Computer selbst,
- mathematische Iterationsverfahren, z.B. das Newton-Verfahren.

Iteration und Differentialgleichungen. Allgemein werden hier insbesondere folgende zwei wichtige mathematische Objekte behandelt:

(1) Lösungen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

(2) Iteration von Abbildungen

$$f : X \rightarrow X,$$

also

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Hier werden einige typische Konzepte erklärt, z.B.

- Chaos,
- Ordnung,
- Vorhersagbarkeit,
- Stabilität und
- Instabilität,
- Attraktoren,
- Schmetterlingseffekt,
- Information und
- Entropie.

Dieser Text setzt die folgenden Vorkenntnisse voraus:

EINLEITUNG: WAS SIND DYNAMISCHE SYSTEME?

- Analysis
 - Satz über implizite Funktionen
 - Differenzieren im \mathbb{R}^n
 - elementare Maßtheorie
- Lineare Algebra
 - Konjugation und Äquivalenz von Matrizen
 - Jordan-Normalform

Grundbegriffe

DEFINITION. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einer Menge X schreiben wir $f^2 := f \circ f$, $f^3 := f \circ f \circ f$,

$$f^k := f \circ \dots \circ f \quad (k\text{-malige Verkettung von } f).$$

Denn wir werden die k -malige Verkettung von Abbildungen oft brauchen, die Multiplikation von Werten dagegen selten (und für letztere kann man ohnehin problemlos $f(x)^k$ schreiben, da dies kaum mit $f(x^k)$ zu verwechseln ist).

Wir nennen f^k auch die k -fache **Iteration** von f .

DEFINITION. Das **Orbit** von $x \in X$ einer Abbildung f ist die Folge

$$(x, f(x), f^2(x), \dots) = (f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

Dabei muss f nicht invertierbar sein; ist das aber der Fall, so ist f^k für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert und wir können das **Orbit von x unter der invertierbaren Abbildung f** definieren als

$$(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}.$$

In diesem Fall heißt $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$ das **positive Semiorbit** von x unter f .

Manche Leute sagen statt „das Orbit“ auch „der Orbit“.

DEFINITION. Ein **Fixpunkt** von f ist ein Punkt $x \in X$ mit

$$f(x) = x.$$

Ein Punkt x heißt **periodisch** mit **Periode k** , wenn gilt

$$f^k(x) = x.$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn x ein Fixpunkt von f^k ist. Es ist nicht nötig, dass k den kleinsten möglichen Wert hat; wenn doch, heißt k die **minimale Periode** von x .

Es gilt also:

LEMMA. Wenn ein Punkt periodisch ist mit Periode $k \in \mathbb{N}$, dann auch mit $l \cdot k$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

DEFINITION. Ein **Fluss** φ auf einer Menge X ist eine Abbildung $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, $(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$, so dass gilt:

- $\varphi_0 = \text{id}$,
- für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Üblicherweise wird gefordert, dass φ mindestens C^1 ist (in (x, t) , also beiden Variablen); in vielen Fällen ist φ glatt. Sinn macht die Definition auch, wenn φ nur C^0 ist.

DEFINITION. Für einen Fluss φ heißt φ_t die **Zeit- t -Abbildung** von φ .

LEMMA. Wenn φ ein C^k -Fluss ist, dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Zeit- t -Abbildung φ_t ein C -Diffeomorphismus.

BEWEIS. φ_t ist invertierbar mit Umkehrabbildung φ_{-t} , da $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_{-t+t} = \varphi_0 = \text{id}$. Mit φ ist auch φ_t und φ_{-t} eine C^k -Abbildung. \square

Flüsse treten auf natürliche Weise auf, wenn wir Differentialgleichungen untersuchen:

LEMMA. Wenn φ ein C^1 -Fluss ist, dann existiert eine Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u = f(u)$, so dass jedes Orbit $(u(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von φ die eindeutig bestimmte Lösungskurve des Anfangswertproblems der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} v(t) = f(v(t)), \quad v(0) = u(0)$$

ist.

BEWEIS. Definiere $f(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x)$. Dies erfüllt per Konstruktion die Bedingung. \square

Die Umkehrung gilt mit Einschränkungen:

LEMMA. Wenn $\dot{x} = f(x)$ eine Differentialgleichung auf dem \mathbb{R}^n ist mit der Eigenschaft, dass jede Lösung $x = x(t)$ sich auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt, also für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann können wir einen Fluss definieren durch

$$\varphi_t(x_0) := x(t),$$

wobei $x = x(t)$ diejenige Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist mit $x(0) = x_0$.

Lösungen von Differentialgleichungen: Existenz, Eindeutigkeit, Fortsetzbarkeit

Wir haben schon gesehen, wie Differentialgleichungen Flüsse produzieren können. Hierzu ist es relevant, wie weit eine Lösung sich fortsetzen läßt. Eine Differentialgleichung, die globale Fortsetzbarkeit von Lösungen garantiert, produziert einen auf ganz \mathbb{R} definierten Fluss.

THEOREM. *Falls*

$$f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$$

stetig und in der ersten Variable lokal Lipschitz-stetig ist, dann gibt es für alle Anfangsdaten $(u_0, t_0) \in U \times I$ eine (lokale) Lösung

$$u : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow U$$

des Anfangswertproblems

$$\left[\frac{du(t)}{dt} = f(u(t), t), \quad u(t_0) = u_0 . \right.$$

Auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ist u eindeutig. Es gibt eine Formel für δ als Funktion der Schranke von f , der Lipschitz-Schranke von f , und dem Abstand von (u_0, t_0) zum Rand der Menge $U \times I$. Wobei

$$\delta = \frac{1}{3} \min \left(\frac{\Delta}{\max_{U \times I} f'}, \frac{1}{L'}, \frac{0.5}{\text{Breite von } I} \right) .$$

DEFINITION. Es gibt ein **maximales Existenzintervall** $J = (a, b) \subset I$, auf welchem eine Lösung u existiert, sodass kein Intervall $J' \supsetneq J, J' \subset I$, auch eine Lösung zuläßt.

LEMMA. *Am Rand des maximalen Existenzintervalls verläßt die Lösung jedes Kompaktum oder läuft auf den Rand von I . D.h. wenn $J = (a, b)$ das maximale Existenzintervall ist und $b \in I$ (b liegt also im Inneren von I) dann gibt es eine Folge*

$$(t_i)_{i \in \mathbb{N}}, t_i \in (a, b), t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b,$$

sodass

$$\|u(t_i)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty.$$

LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: EXISTENZ,
EINDEUTIGKEIT, FORTSETZBARKEIT

Analog für $a \in I$ mit $t_i \rightarrow a$, $t_i \in (a, b)$, sodass $\|u(t_i)\| \rightarrow \infty$.

BEWEIS. $\overline{U \times I}$ ist kompakt. Wenn die Aussage falsch ist, bleibt $\|u(t_i)\|$ beschränkt, also hat $u(t_i)$ eine konvergente Teilfolge. Also konvergiert $(u(t_i), t_i) \in U \times I$ ebenfalls entlang dieser Teilfolge. Wenn b im Inneren von I liegt, dann gibt es eine Umgebung $(b - \delta_1, b + \delta_1)$ von b in I , sodass auf $U' \times [b - \delta_1, b + \delta_1]$ f beschränkt ist, f eine globale Lipschitz-Schranke auf $U' \times [b - \delta_1, b + \delta_1]$ hat und der Abstand von Punkten $(v, \tau) \in U' \times [b - \delta_1, b + \delta_1]$ zum Rand von $U \times I$ mindestens eine untere Schranke $\Delta_1 > 0$ ist. Dazu sei U' eine beliebige offene Teilmenge von U , die beschränkt ist und die den Häufungspunkt u_* von $(u(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ enthält. D.h.

$$(u_*, b) \in U' \times (b - \delta_1, b + \delta_1).$$

Da

$$U' \times (b - \delta_1, b + \delta_1) \subset U \times I,$$

läßt sich das AWP

$$\dot{u} = f(u, t), \quad u(b) = u_*$$

in einer Umgebung $b - \delta, b + \delta$ lösen. Also läßt sich die Lösung des AWP

$$\dot{u} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0$$

fortsetzen. Widerspruch zur Maximalität von (a, b) . □

Klassifikation von eindimensionalen autonomen DGL:

DEFINITION. Wenn die rechte Seite von $f(u)$ einer DGL $\dot{u}(t) = f(u(t))$ nicht explizit von t abhängt, dann heißt die DGL **autonom**, ansonsten **nicht-autonom**.

BEMERKUNG. Implizit hängt f trotzdem von t ab, da u von t abhängt. D.h., wenn $t \mapsto u(t)$ eine Lösung der DGL ist, dann ist $t \mapsto f(u(t))$ im Allgemeinen nicht konstant.

Frage: Gegeben $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, was ist das typische Verhalten von Lösungen der DGL $\dot{u} = f(u)$?

BEMERKUNG. Wenn wir für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung u des AWP

$$[\dot{u} = f(u), \quad u(t_0) = u_0$$

kennen, dann kennen wir für jedes $t_1 \in \mathbb{R}$ die Lösung v des AWP

$$[\dot{u} = f(u) \quad u(t_1) = u_0 .$$

v ist eine Verschiebung von u , nämlich

$$v(t) = u(t + t_0 - t_1).$$

Denn

$$\frac{d}{dt}(u(t + t_0 - t_1)) = f(u(t + t_0 - t_1)) = f(v(t)),$$

LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: EXISTENZ,
EINDEUTIGKEIT, FORTSETZBARKEIT

also löst v die Gleichung $\frac{dv}{dt} = f(v(t))$, und v erfüllt die Anfangswertbedingung.

THEOREM. (Klassifikation des Langzeitverhaltens bei eindimensionalen autonomen DGL) Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und lokal Lipschitz-stetig. Dann gilt: Jede Lösung $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eines AWP

$$[\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0$$

der autonomen DGL $\dot{u} = f(u)$ hat die Eigenschaften:

Wenn $f(u_0) = 0$ ist, dann ist $u \equiv u_0$ eine Lösung („Ruhelage“).

Wenn $f(u_0) > 0$ ist und rechts von u_0 eine Nullstelle u_1 von f existiert, dann konvergiert jede Lösung u des AWP $[\dot{u} = f, \quad u(0) = u_0$ gegen die erste Nullstelle rechts von u_0 .

Analog für $f(u_0) < 0$: Jede Lösung konvergiert gegen die erste Nullstelle von links von u_0 .

THEOREM. Wenn $\dot{u} = f(u, t)$ oder $\dot{u} = f(u)$ eine Lipschitz-stetige und beschränkte rechte Seite f hat, dann gibt es zu allen Anfangsdaten (u_0, t_0) eine Lösung des AWP $[\dot{u} = f(u), \quad u(t_0) = u_0$ auf einem Intervall dessen Breite nicht vom Punkt abhängt.

KOROLLAR. Für (global) Lipschitz-stetiges und beschränktes $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ läßt sich jede Lösung von jedem AWP $[\dot{u} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0$ auf ganz \mathbb{R} fortsetzen.

Folgerung:

KOROLLAR. Wenn f **autonom** ist, d.h. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$, dann existiert ein Fluss auf \mathbb{R}^n (bzw. auf U), der gegeben ist durch $\varphi(u_0) := u(t)$, wobei u die (existierende, eindeutige) Lösung von

$$[\dot{u}(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0$$

ist.

BEWEIS. Überprüfen der Flusseigenschaften:

- (i) $\varphi_0(u_0) = u(0)$, wobei u Lösung von $[\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0$ ist. $\Rightarrow \varphi_0(u_0) = u_0$.
- (ii) Zu zeigen: $\varphi_{s+t}(u_0) = \varphi_s(\varphi_t(u_0))$. Wenn \tilde{u} die Lösung von $[\dot{\tilde{u}} = f(\tilde{u}), \quad \tilde{u}(0) = u_0$ ist und $\tilde{\tilde{u}}$ die Lösung von $[\dot{\tilde{\tilde{u}}} = f(\tilde{\tilde{u}}), \quad \tilde{\tilde{u}}(0) = u_0$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung des AWP $[\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0$, welches von \tilde{u} und von $\tilde{\tilde{u}}$ gelöst wird, gilt Gleichheit der Lösungen. Deswegen gilt

$$\varphi_{s+t}(u_0) = \varphi_s(\varphi_t(u_0)).$$

□

Frage: Warum ist es angenehmer, Flüsse zu studieren (statt zeitabhängiger rechter Seiten von $\dot{u} = f(u, t)$)?

Antworten: Erster Grund: Kein Divergieren „nach ∞ “ in endlicher Zeit.

BEISPIEL. Beispiel $\dot{u} = u^2$. Lösungskurven divergieren in endlicher Zeit, d.h. $\|u(t)\| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow t_0$ (wobei t_0 von den Anfangsdaten abhängt).

Zweiter Grund: Lösungen spalten sich nicht auf.

BEISPIEL. Beispiel $\dot{u} = u^{\frac{2}{3}}$. Hier können zwei verschiedene Lösungen lange Zeit übereinstimmen und sich dann trennen.

Konsequenz: Wenn wir Lösungen aufzeichnen, können wir auf die t -Koordinate verzichten, da sich Lösungen nicht kreuzen. (Bei Fixpunkten bzw. Ruhelagen gibt es scheinbare Kreuzungen. Dies sind aber in Wirklichkeit keine Kreuzungen, denn der „Kreuzungspunkt“ ist in Wirklichkeit eine Ruhelage und kann nicht überschritten werden.)

Allgemeine Frage: Wie verhalten sich Flüsse und deren Flusskurven? Welche „Grenzwertmengen“ sind möglich?

DEFINITION. Das Bild von $t \mapsto \varphi_t(u_0)$, $\mathbb{R} \rightarrow U$ heißt **Flusskurve** (durch u_0). Ein Diagramm, in dem die Menge U und alle Richtungen $f(u_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(u_0)$ zu sehen ist, heißt **Vektorfeld-Diagramm**.

Bemerkung: Flüsse werden stets im Kontext von autonomen DGL betrachtet. Das Diagramm, in dem Lösungen eingezeichnet sind, heißt **Phasenportrait**.

BEISPIEL. Beispiel eines Flusses mit periodischem Verhalten:

$$\varphi_t(x) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot x,$$

$x \in \mathbb{R}^2$ oder

$$x \in U = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} \|y\|^2 \leq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{array} \right\}.$$

Hier ist φ periodisch in t mit (von x unabhängiger) Periode 2π

DEFINITION. x heißt **periodischer Punkt** des Flusses φ mit **Periode** τ , wenn gilt $\varphi_\tau(x) = x$.

BEMERKUNG. Bemerkung: Die Periode ist nicht eindeutig. Z.B. ist auch $k \cdot \tau$ eine Periode für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

LÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN: EXISTENZ,
EINDEUTIGKEIT, FORTSETZBARKEIT

DEFINITION. Wenn es ein $\tau > 0$ gibt mit $\varphi_\tau(x) = x$ und $\varphi_t(x) \neq x \forall t \in (0, \tau)$, dann heißt τ die **minimale Periode** von x .

BEMERKUNG. Die minimale Periode ist eindeutig.

Analog für Abbildungen:

DEFINITION 3.0.1. $f : X \rightarrow X$. x heißt **periodischer Punkt** (mit **Periode** $n \in \mathbb{N}$) wenn $f^n(x) = x$. Das kleinste solche $n \in \mathbb{N}, n > 0$ heißt **minimale Periode** von x .

BEISPIEL 3.0.2. Beispiel für anziehendes periodisches Verhalten:
 $\frac{d\theta}{dt} = 1, \frac{dr}{dt} = r(1 - r)$, wobei $((r, \theta)$ Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 sind.

Kontraktionen

DEFINITION. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Daraus kann man die üblichen Folgerungen ziehen, wie z.B. $d(x, y) \geq 0$ (was oft überflüssigerweise in die Axiome geschrieben wird) usw.

DEFINITION. Sei X ein metrischer Raum. Eine **Kontraktion** auf X ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, für die es $c < 1$ gibt, so dass für alle x, y in X gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y).$$

Wie schon aus Analysis 1 bekannt, ist dies viel stärker als die Bedingung $d(f(x), f(y)) < cd(x, y)$, $c \leq 1$. Es ist auch viel stärker als „für alle x, y in X gibt es $c < 1$, so dass gilt $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ “.

Es gilt der **Kontraktionssatz** (auch Fixpunktsatz von Banach genannt):

THEOREM 4.0.3. *Sei X vollständiger metrischer Raum, f Kontraktion auf X . Dann hat f einen eindeutigen **Fixpunkt**, d.h. einen Punkt mit*

$$f(x_0) = x_0.$$

Für alle $x \in X$ gilt: $f^n(x)$ konvergiert gegen x_0 für $n \rightarrow \infty$. Es gilt die Abschätzung

$$d(f^n x, x_0) \leq c^n d(x, x_0).$$

THEOREM 4.0.4. *Wenn X eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, $f : X \rightarrow X$ differenzierbar und $\|Df\| < 1$ auf ganz X gilt, dann ist f eine Kontraktion.*

DEFINITION. Die C^1 -Norm einer differenzierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\|f\|_{C^1} := \sup_{x \in X} \|f(x)\| + \sup_{x \in X} \|Df(x)\|.$$

(Das ist endlich für X kompakt und $f \in C^1(X)$.)

THEOREM 4.0.5. Wenn $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion eines metrischen Raumes X ist, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass jede Abbildung \tilde{f} mit $\|f - \tilde{f}\|_{C^1} < \varepsilon$ auch eine Kontraktion ist.

Der Fixpunkt einer Kontraktion hängt stetig von Parametern ab:

THEOREM 4.0.6. Sei $f : X \times Y \rightarrow X$ stetig, X ein vollständiger metrischer Raum, Y ein beliebiger metrischer Raum, und für alle $y \in Y$ sei $f_y := f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y)$ eine λ -Kontraktion. Dann hängt der (existierende und eindeutige) Fixpunkt $g(y)$ der Abbildung f_y stetig von y ab.

BEWEIS. Es ist

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(f_y^i(x), f_y^{i+1}(x)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, f_y(x))$$

und daher gilt für $x = g(\tilde{y})$, dass

$$\begin{aligned} d(g(y), g(\tilde{y})) &\leq \frac{1}{1-\lambda} d(g(\tilde{y}), f_y(g(\tilde{y}))) \\ &= \frac{1}{1-\lambda} d(f_{\tilde{y}}(g(\tilde{y})), f_y(g(\tilde{y}))), \end{aligned}$$

was wegen der Stetigkeit von f beliebig klein wird für $\tilde{y} \rightarrow y$. \square

Irgendwann kontrahierende Abbildungen.

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ eines metrischen Raums X heißt **irgendwann kontrahierend**, wenn es $\lambda < 1$ und $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt:

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n d(x, y).$$

Die Eigenschaft einer Abbildung, irgendwann kontrahierend zu sein, ist robuster als die Eigenschaft, kontrahierend zu sein. Zum Beispiel bleibt sie erhalten, wenn die Metrik sich „uniform ändert“:

DEFINITION. Die Metriken d und \tilde{d} auf einer Menge X heißen **uniform äquivalent**, wenn es $c < \infty$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\frac{1}{c} d(x, y) < \tilde{d}(x, y) < c d(x, y).$$

Offensichtlich ist dies nur mit $c \geq 1$ möglich.

LEMMA 4.0.7. Wenn f irgendwann kontrahierend ist bezüglich der Metrik d , und wenn \tilde{d} eine andere Metrik ist, die zu d uniform äquivalent ist, dann ist f auch bezüglich \tilde{d} irgendwann kontrahierend.

KONTRAKTIONEN

BEWEIS. In der Notation der vorigen Definition gilt

$$\tilde{d}(f^n(x), f^n(y)) < cd(f^n(x), f^n(y)) < cC\lambda^n d(x, y) < c^2C\lambda^n \tilde{d}(x, y).$$

□

THEOREM 4.0.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine irgendwann kontrahierende Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist uniform äquivalent zu einer Kontraktion auf X . Das heißt, es gibt eine Metrik d_L auf X , die zu d uniform äquivalent ist, so dass f bezüglich d_L eine Kontraktion ist.

BEWEIS. Die Abbildung f erfüllt

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n$$

mit Konstanten $C < \infty, \lambda < 1$. Wähle $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass

$$C(\lambda/\mu)^n < 1.$$

Definiere

$$d_L(x, y) := \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_L(f(x), f(y)) &= \mu \sum_{i=1}^n \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) \\ &= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) - d(x, y) + \mu^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \right) \\ &= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) - d(x, y) + c(\lambda/\mu)^n d(x, y) \right) \\ &\leq \mu d_L(x, y). \end{aligned}$$

□

DEFINITION. Sei f eine irgendwann kontrahierende Abbildung mit $d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n$. Eine Metrik

$$d_L(x, y) := \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y))$$

mit $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass $C(\lambda/\mu)^n < 1$, heißt eine **Lyapunov-Metrik** (auch: **angepasste Metrik**).

Es gibt mehr als eine Lyapunov-Metrik, da μ und n frei wählbar sind. Oft wird auch der Fall $n = \infty$ betrachtet und ebenfalls als Lyapunov-Metrik bezeichnet.¹

¹Für Lyapunov nehmen wir als Schreibweise die Standardtranskription ins englische Alphabet. Auch zu sehen sind die Schreibweisen Ljapunov, Liapunov, Liapunow, Liapunoff, ... sowie die einzig wirklich korrekte:

Lineare Systeme

Es gilt für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned} E^s = E^s(A) = E^- &= \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^u = E^u(A) = E^+ &= \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^0 = E^0(A) = E^c &= \bigoplus_{|\lambda|=1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Für eine Matrix A ist die Einschränkung von A auf E^s irgendwann kontrahierend. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $\|\cdot\|_L$ mit

$$\|A|_{E^s}\|_L < r(A|_{E^s}) + \delta.$$

Wenn A invertierbar ist, so ist die Einschränkung von A^{-1} auf E^u irgendwann kontrahierend. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $\|\cdot\|_L$ mit

$$\|A|_{E^s}\|_L < r(A|_{E^s}) + \delta, \quad \|A^{-1}|_{E^u}\|_L < r(A^{-1}|_{E^u}) + \delta.$$

$\|\cdot\|_L$ heißt **Lyapunov-Norm**.

Analog gilt für eine lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned} E^s = E^s(A) = E^- &= \bigoplus_{\lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^u = E^u(A) = E^+ &= \bigoplus_{\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^0 = E^0(A) = E^c &= \bigoplus_{\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) = 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Für alle $x_0 \in E^s$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow \infty$.

Für alle $x_0 \in E^u$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$.

Für alle $x_0 \in E^0 \setminus \{0\}$ gilt: Es gibt $0 < C < \infty$, so dass die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, dass $1/C < \|x(t)\| < C$.

Abbildungen. Wir wissen: Orbits von $f : x \mapsto Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, A $n \times n$ Matrix über \mathbb{R} verhalten sich wie folgt: Auf Eigenräumen mit Eigenwert $\lambda \in (-1, 1)$ bzw. $|\lambda| < 1$ konvergiert jedes Orbit gegen 0 (exponentiell), bei A invertierbar divergiert der rückwärtige Orbit ($\|\cdot\| \rightarrow \infty$) (auch exponentiell). Wir nennen dieses ein „stabiles Verhalten“ auf einer Menge E^s . Umgekehrt für $|\lambda| > 1$: alle Orbits divergieren ($\|\cdot\| \rightarrow \infty$) und bei invertierbarem A konvergiert das rückwärtige Orbit gegen 0. „instabiles Verhalten“ auf einer bestimmten Menge E^u .

DEFINITION 5.0.9. Die **stabile Menge** E^s einer linearen Abbildung ist

$$E^s = \bigoplus_{\substack{|\lambda| < 1 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{|\lambda| < 1 \\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

wobei $E_\lambda =$ Eigenraum zu λ und $E_{\lambda, \bar{\lambda}} =$ Eigenraum zu λ und $\bar{\lambda}$.

DEFINITION. Die **instabile Menge** E^u einer linearen Abbildung ist

$$E^u = \bigoplus_{\substack{|\lambda| > 1 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{|\lambda| > 1 \\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

Die Matrix A heißt **hyperbolisch** für die Abbildung $f : x \mapsto Ax$, wenn A keinen Eigenwert vom Betrag 1 hat.

THEOREM 5.0.10. Wenn A hyperbolisch ist für $f : x \mapsto Ax$, dann ist $f|_{E^s}$ eine Kontraktion und

$$\forall x \in E^s : f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wenn A invertierbar ist, gilt auch

$$\|f^n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \infty$$

für alle $x \in E^s \setminus \{0\}$.

Es gilt sogar:

THEOREM 5.0.11. Wenn λ mit $|\lambda| < 1$ der maximale Eigenwert von $A|_{E^s}$ ist, dann gibt es für alle $\delta > 0$ eine Norm auf dem E^s , so dass $f|_{E^s}$ in dieser Norm eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $|\lambda| + \delta$ ist.

BEWEIS. (Skizze) Die Matrix eines Jordan-Blocks

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

lässt sich durch Konjugation mit

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \delta & \\ 0 & & \delta^2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

umwandeln in die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & \delta & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \delta \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Es gilt dann in dieser Basis

$$\|Av\| = \left\| \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} v \right\| \leq |\lambda| \|v\| + \delta.$$

□

Verhalten von linearen DGL, linearen Flüssen: $\frac{du}{dt} = At.$

BEMERKUNG 5.0.12. Die DGL $\dot{u} = \lambda u$ $u \in \mathbb{R}$, hat Lösungen $u(t) = ce^{\lambda t}$ mit $c = u(0)$. Also ist die Abbildung $u(0) \mapsto u(1)$ bzw. $u_0 \mapsto \varphi_1(u_0)$ ("Zeit-1-Abbildung von φ ") der DGL. $\dot{u} = \lambda u$ die Abbildung

$$u_0 \mapsto e^\lambda u_0.$$

BEISPIEL 5.0.13. Spezialfälle: \mathbb{R}^n mit n klein (Zeichnungen)

(1) $n=1$: (Zeichnung) $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$

(2) $n=2$: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

Fall 1: $\lambda \cdot \mu > 0$ ($\lambda \neq \mu$)

Fall 2: $\lambda \cdot \mu < 0$

Fall 3: $\lambda = \mu$ bzw. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Fall 4: $A = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ mit $|\rho| \neq 1$

Spezialfälle: $1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Zeichnung)

(3) $n=3$ z.B.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

mit $\lambda < \mu < \nu < 0$ oder

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ 0 & \rho(-\sin \theta) & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \cdot \rho < 0$ etwa $\lambda > 0, \rho < 0$. Analog für $\lambda \cdot \rho > 0$ mit $\lambda < \rho < 0$. (Zeichnung)

BEISPIEL 5.0.14. Motivation zum Studium linearer Systeme: Beispiel aus der Modellierung: **Harmonischer Oszillator** (Zeichnung). Es gilt

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x = -c \cdot x,$$

$x \in \mathbb{R}, c > 0, m > 0$. Um das System 2. Ordnung besser zu verstehen, reduzieren wir die DGL auf eine DGL 1. Ordnung: Definiere $v = \dot{x}$. Damit haben wir das System

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{c}{m}x \end{cases}.$$

Also

$$\frac{d}{dt} (xv) = \left(01 - \frac{c}{m}0\right) \cdot (xv)$$

(Zeichnung)

BEMERKUNG 5.0.15. Wenn wir eine DGL höherer Ordnung haben, nämlich

$$\frac{d^n}{dt^n} x = f\left(x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x\right),$$

dann können wir sie in eine DGL erster Ordnung verwandeln. Definiere dazu:

$$x_1 := \dot{x}, x_2 := \dot{x}_1, \dots, x_{n-1} := \dot{x}_{n-2}.$$

Dann ist jede Lösung des Systems 1. Ordnung eine des Systems n -ter Ordnung

$$x_1 := \dot{x}, x_2 := \dot{x}_1, \dots, x_{n-1} = \dot{x}_{n-2}, f(x, x_1, \dots, x_{n-1}) = \dot{x}_{n-1}.$$

Der „Preis“ besteht darin, dass wir jetzt eine n -dimensionale Gleichung statt einer eindimensionalen untersuchen müssen, was aber

oft nicht schlimm ist. Wir können uns also (zumindest bei expliziten Differentialgleichungen) immer um Gleichungen erster Ordnung kümmern.

Dynamik von Liebesaffären (Romeo und Julia). Beispiel zur Modellierung: Gegeben seien $R(t)$ und $J(t) \in \mathbb{R}$:

DEFINITION 5.0.16. $R =$ „Romeos Gefühle für Julia“, $J =$ „Julias Gefühle für Romeo“, jeweils zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$, und die Dynamik

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\substack{\text{reelle} \\ 2 \times 2\text{-Matrix}}} \cdot \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 5.0.17. Z.B. $\frac{d}{dt}R = bJ$, $b > 0$ und $\frac{d}{dt}J = cR$, $c < 0$. Die Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind rein imaginär.

(Zeichnung)

Anderer Fall: („vorsichtige Liebhaber“) $a < 0$, $b > 0$, und es gelte: $\dot{R} = aR + bJ$ und $\dot{J} = aJ + bR$. Die Matrix ist dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Deswegen sind die Eigenwerte: $a + b$, $\underbrace{a - b}_{< 0} \in \mathbb{R}$, und die Eigenvek-

toren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Zeichnungen)

Die Dynamik von Liebesaffären wird in den Übungsaufgaben noch genauer untersucht.

Maßerhaltende Systeme

Zunächst zur Wiederholung:

DEFINITION. Sei X eine Menge. Eine σ -Algebra \mathcal{A} auf X ist eine Menge von Teilmengen von X mit

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- wenn $A \in \mathcal{A}$, dann auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
- wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

DEFINITION. Sei nun X eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra darauf. Ein **Maß** auf X ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty],$$

so dass gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$,
- wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, dann gilt $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.

Es ist üblich zu sagen: „Sei X ein Maßraum“, obwohl μ und nicht X das Objekt ist, das die Information über das Maß enthält, damit auch über die zugehörige σ -Algebra (was der Definitionsbereich des Maßes ist) und damit über X (was die Vereinigung aller Elemente in der σ -Algebra ist).

BEISPIEL 6.0.18. Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n (im folgenden Volumen genannt, geschrieben vol).

DEFINITION 6.0.19. Sei μ ein Maß auf X . Dann heißt eine **bijektive** Abbildung $f : X \rightarrow X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:

$$\mu(f(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Bei dieser Definition wird erstens die σ -Algebra \mathcal{A} in den Voraussetzungen gar nicht erwähnt; das ist korrekt, denn μ enthält diese ja schon als Definitionsbereich. Zweitens wird stillschweigend vorausgesetzt, dass f die σ -Algebra wieder auf sich abbildet. Das stimmt nicht für jede Abbildung und jede σ -Algebra. Für die Abbildungen

und σ -Algebren, die wir betrachten (z.B. stetige Abbildungen im \mathbb{R}^n und Lebesgue), ist das aber immer erfüllt.

Diese Definition ist ein Spezialfall der folgenden:

DEFINITION. Sei μ ein Maß auf X . Dann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir sagen dann auch, das Maß μ sei **invariant** unter f .

Gemäß dieser Definition ist die Abbildung

$$f : [0, 1) \rightarrow [0, 1), f(x) = 2x \bmod 1$$

maßerhaltend für das Längenmaß (Lebesguemaß) auf \mathbb{R} .

DEFINITION. Die **Jacobische** bzw. **Jacobi-Determinante einer differenzierbaren Abbildung** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$Jf := \det Df.$$

THEOREM 6.0.20. Eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist volumenerhaltend genau dann, wenn

$$|\det Df| \equiv 1$$

ist.

Aus der Definition für Abbildungen erhalten wir sofort eine für Flüsse:

DEFINITION. Ein Fluss φ auf einem Maßraum heißt maßerhaltend, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t maßerhaltend ist. D.h., für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist $\mu(\varphi_t(A))$ unabhängig von t .

THEOREM 6.0.21. Ein Fluss auf \mathbb{R}^n (oder auf einer Teilmenge davon) ist volumenerhaltend genau dann, wenn das zugehörige Vektorfeld

$$f(x) := \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \Big|_{t=0}$$

überall verschwindende Divergenz hat, d.h.

$$\operatorname{div} f \left(:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial i} \right) \equiv 0.$$

THEOREM 6.0.22. (**Poincaré-Rekurrenz**) Sei μ endliches Maß auf X und invariant unter $f : X \rightarrow X$. Wenn $A \subset X$ die Bedingung $\mu(A) > 0$ erfüllt, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap f^n(A) \neq \emptyset.$$

DEFINITION. Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung (bzw. φ ein Fluss) auf X . Ein Punkt $x \in X$ heißt **positiv rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$f^{t_k}(x) \rightarrow x \text{ und } t_k \rightarrow +\infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$\text{bzw. } \varphi_{t_k}(x) \rightarrow x \text{ und } t_k \rightarrow +\infty \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

wobei $t_k \in \mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$ für einen Fluss).

Analog heißt ein Punkt $x \in X$ unter einer *invertierbaren* Abbildung oder einem Fluss **negativ rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$f^{t_k}(x) \rightarrow x \text{ und } t_k \rightarrow -\infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$\text{bzw. } \varphi_{t_k}(x) \rightarrow x \text{ und } t_k \rightarrow -\infty \text{ für } k \rightarrow \infty$$

mit $t_k \in -\mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$). Wenn ein Punkt positiv und negativ rekurrent ist, heißt er **rekurrent**.

DEFINITION. Die ω -Limesmenge eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des positiven Semiorbits $f^{\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{[0, \infty)}(x)$:

$$\omega(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \rightarrow y, t_k \rightarrow +\infty \text{ für } k \rightarrow \infty\}$$

$$\text{bzw. } \omega(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y, t_k \rightarrow +\infty \text{ für } k \rightarrow \infty\}$$

Die α -Limesmenge eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des negativen Semiorbits $f^{-\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{(-\infty, 0]}(x)$:

$$\alpha(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \rightarrow y, t_k \rightarrow -\infty \text{ für } k \rightarrow \infty\}$$

$$\text{bzw. } \alpha(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y, t_k \rightarrow -\infty \text{ für } k \rightarrow \infty\}$$

LEMMA 6.0.23. Es gilt:

- x ist positiv rekurrent $\iff x \in \omega(x)$,
- x ist negativ rekurrent $\iff x \in \alpha(x)$,
- x ist rekurrent $\iff x \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

Weiterhin gilt:

- Wenn das positive Semiorbit von x einen Limes y hat, dann ist $\omega(x) = \{y\}$.
- Wenn das negative Semiorbit von x einen Limes y hat, dann ist $\alpha(x) = \{y\}$.

THEOREM 6.0.24. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ oder \mathbb{T}^n , $\text{vol}(X) < \infty$, $f : X \rightarrow X$ volumenerhaltend. Dann gilt: Für alle $x \in X$ gibt es Folgen $y_k \rightarrow x$, $m_k \rightarrow \infty$, so dass $f^{m_k}(y_k) \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.

BEWEIS. □

THEOREM 6.0.25. Sei X eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n oder \mathbb{T}^n , $f : X \rightarrow X$ volumenerhaltend und invertierbar. Dann ist die Menge der rekurrenten Punkte dicht in X .

BEWEIS.



Dynamik auf dem Torus

Translationen auf dem Torus.

DEFINITION. Die Abbildung:

$$f_\gamma : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n :$$

$$[x] \mapsto [x + \gamma]$$

mit $[\gamma] \in \mathbb{T}^n$ oder $\gamma \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \mapsto \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \right]$$

heißt **Translation** auf dem n-Torus mit Translationsvektor γ .

Der einfachste Fall ist $n = 1$. Die Abbildung ist dann einfach $[x_1] \mapsto [x_1 + \gamma_1]$ mit reellen Zahlen x_1 und γ_1 .

DEFINITION. Wir sagen, $[\gamma]$ ist **rational**, wenn γ rational ist. Ansonsten heißt $[\gamma]$ **irrational**.

Dynamik von rationalen Torus-Translation.

LEMMA 7.0.26. Wenn $\gamma = \frac{p}{q}$, dann ist f_γ periodisch mit Periode q , d.h.:

$$f^q([x]) = [x] \quad \forall x.$$

BEWEIS.

$$f^q([x]) = \left[x + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q} \right] = [x + p] = [x].$$

□

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einem metrischen Raum X heißt **topologisch transitiv**, wenn ein Orbit von f dicht in X ist. Ein Fluss φ auf X heißt **topologisch transitiv** wenn ein Orbit von φ dicht in X ist. (Zur Wiederholung: A heißt dicht in B , wenn $\overline{A} \supset B$.)

DEFINITION. Die Abbildung: $f : X \rightarrow X$ (bzw. der Fluss φ auf X) heißt **minimal**, wenn jedes Orbit dicht ist. Es gilt: Wenn f (bzw. φ) minimal ist (und X nicht leer), dann ist f (bzw. φ) topologisch transitiv.

Dynamik von irrationalen Torus-Translationen.

THEOREM 7.0.27. Wenn γ irrational ist, dann ist die Translation f_γ auf \mathbb{T}^1 minimal.

BEWEIS. Angenommen, ein Orbit $(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ wäre nicht dicht. Sei A der Abschluss davon. Dann ist das Komplement von A offen und nicht leer. Das Komplement besteht aus offenen Intervallen. Sei I ein größtes Intervall daraus. I ist f_γ -invariant, d.h. $f_\gamma(I) = I$. Der Rand dieses Intervalls wird für kein $k \in \mathbb{Z}$ wieder auf den Rand von I abgebildet. Die beiden Randpunkte können beide nicht ins Innere abgebildet werden, denn sonst wäre $I \cup f(I)$ ein größeres Intervall, in welches kein Punkt $f^k([x])$ fällt. Wenn $J = I \cup f(I)$ ein Intervall ist, dann gilt

$$\begin{aligned} f^k([x]) &\notin I \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ f^k([x]) &\notin f(I) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wäre $f^k(I) = I$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann gelte $k, \gamma \in \mathbb{Z}$, was für γ irrational unmöglich ist. Der letzte Fall ist, dass $f^k(I)$ und $f^l(I)$ disjunkt sind für jedes $k, l \in \mathbb{Z}$. Da alle diese Intervalle dieselbe (positive Länge) haben und Teilmenge von S^1 sind (Gesamtlänge endlich), ist das ein Widerspruch. \square

BEMERKUNG 7.0.28. Bei $n > 1$ gibt es noch mehr Möglichkeiten für Orbits als „periodisch“ und „dicht“: Bsp. Zeichnung.

DEFINITION. Die n Zahlen a_1, \dots, a_n heißen **rational unabhängig**, wenn aus

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. (Äquivalent dazu: $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.)

LEMMA 7.0.29. Sei $f : X \rightarrow X$ Homöomorphismus. X kompakter metrischer Raum (also abzählbare Basis der Topologie). Dann ist f topologisch transitiv genau dann wenn gilt: $\forall U, V \subset X$ offen $\exists n \in \mathbb{Z}$ mit

$$U \cap f^n(V) \neq \emptyset.$$

BEWEIS. „ \Rightarrow “ Sei das Orbit von x dicht. Also $\exists k \in \mathbb{Z}$ mit $f^k(x) \in U$ und $\exists l \in \mathbb{Z}$ mit $f^l(x) \in V$. Deswegen ist $p = f^k(x)$ ein Punkt mit $f^{l-k}(p) \in V$. Also ist $U \cap f^{l-k}(V)$ nicht leer.

„ \Leftarrow “ Für alle Punkte $p, q \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$

$$\exists n : B_\varepsilon(p) \cap f^n(B_\varepsilon(q)) \neq \emptyset.$$

Wähle zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele p_i , die ε -dicht sind. Es gibt einen Punkt, der alle p_i bis auf ε erreicht unter der Iteration von f . Es gibt mit demselben Argument ein Orbit, welches jedem Punkt in X ε -nahe kommt $\forall \varepsilon > 0$. \square

Kriterium für Minimalität von Torus-Translationen.

LEMMA 7.0.30. *Auf jedem Raum mit unendlich vielen Punkten gilt für jede Abbildung:*

Minimalität \Rightarrow topologische Transitivität \Rightarrow Die Abbildung ist nicht periodisch.

BEWEIS. Wenn jedes Orbit dicht ist, dann existiert ein dichtes. Das zeigt die erste Implikation. Die zweite folgt daraus, dass ein dichtes Orbit nicht periodisch sein kann, also die gesamte Abbildung nicht periodisch ist. \square

THEOREM 7.0.31. *Die Translation f_γ auf \mathbb{T}^n ist minimal genau dann, wenn es keine Zahlen $k_1, \dots, k_n, K \in \mathbb{Z}$ gibt mit*

$$\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j = K$$

außer $k_1 = \dots = k_n = 0$ (d.h. die Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ sind rational unabhängig).

DEFINITION. Eine Menge U heißt f_γ -invariant wenn

$$f_\gamma(U) = U$$

gilt. Dann gilt automatisch auch $f^k(U) = U$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

LEMMA 7.0.32. *Die Abbildung f_γ ist topologisch transitiv genau dann, wenn es keine zwei Mengen $U, V \subset \mathbb{T}^n$ gibt, die nichtleer und f_γ -invariant sind, so dass $U \cap V = \emptyset$.*

BEWEIS. „ \Leftarrow “ Angenommen f_γ wäre nicht top. transitiv. Dann gäbe es offene Mengen $U, V \neq \emptyset$, sodass $U \cap f^k(V) = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Mengen

$$\tilde{U} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_\gamma^k(U)$$

und

$$\tilde{V} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_\gamma^k(V)$$

sind offen (da $f_\gamma^k(U)$ bzw. $f_\gamma^k(V)$ offen), nichtleer (da $f_\gamma^0(U)$ bzw. $f_\gamma^0(V)$ nichtleer) und f_γ -invariant.

„ \Rightarrow “ Angenommen es gäbe U, V , die beide nichtleer, offen und invariant sind, dann ist $U \cap f_\gamma^k(V) = \emptyset$ wenn $U \cap V = \emptyset$, im Widerspruch zur Aussage über top. Transitivität. \square

DEFINITION. Eine Funktion $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt f_γ -invariant, wenn $F \circ f_\gamma = F$ ist, d.h.

$$F(f_\gamma([x])) = F([x]) \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

LEMMA 7.0.33. Die Abbildung f_γ ist topologisch transitiv genau dann, wenn es keine stetige Funktion $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die nicht konstant ist und die f_γ -invariant ist.

BEWEIS. (Lemma) „ \Rightarrow “ Für $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c = \{[x] \in \mathbb{T}^n \mid F([x]) > c\}$$

und die Menge

$$V_c = \{[x] \in \mathbb{T}^n \mid F([x]) < c\}$$

offen. Wenn F nicht konstant ist, dann $\exists c \in (\min F, \max F)$. Und dann sind U_c und V_c beide nichtleer. Wenn F außerdem f_γ -invariant ist, sind auch U_c und V_c f_γ -invariant.

„ \Leftarrow “ Wenn U, V offen, nichtleer, invariant und disjunkt existieren, dann können wir eine stetige Funktion F finden mit $F|_U \equiv 0, F|_V \equiv 1$, die f_γ -invariant ist. \square

BEWEIS. (Satz) „ \Rightarrow “ Wenn die Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ nicht rational unabhängig sind, d.h. $\exists k_1, \dots, k_n, K \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j = K$$

mit $(k_1, \dots, k_n, K) \neq (0, \dots, 0)$, dann definiere die Funktion $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F([x]) = \sin \left(2\pi \sum_{j=1}^n k_j x_j \right).$$

F ist wohldefiniert: $\sin \left(2\pi \sum_{j=1}^n k_j x_j \right)$ ändert sich nicht, wenn ein x_i durch $x_i + 1$ ersetzt wird. F ist stetig und nicht konstant. Also ist f_γ nicht topologisch transitiv und somit auch nicht minimal.

„ \Leftarrow “ Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ rational unabhängig. Angenommen es gäbe eine Funktion F auf \mathbb{T}^n , die stetig, invariant und nicht konstant ist. Es gibt dann eine Fourier-Reihe für F :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} \exp(2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n))$$

Wenn F invariant ist unter f_γ , dann muss gelten

$$F(x_1 + \gamma_1, \dots, x_n + \gamma_n) = F(x_1, \dots, x_n),$$

also

$$\begin{aligned} & \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} \exp(2\pi i(k_1(x_1 + \gamma_1) + \dots + k_n(x_n + \gamma_n))) \\ = & \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} \exp(2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)) \exp(2\pi i(k_1 \gamma_1 + \dots + k_n \gamma_n)) \end{aligned}$$

und deswegen gilt für alle $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, dass

$$\exp(2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)) \exp(2\pi i(k_1 \gamma_1 + \dots + k_n \gamma_n)) = 1$$

oder

$$a_{k_1, \dots, k_n} = 0.$$

Die Bedingung

$$\exp(2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)) \exp(2\pi i(k_1 \gamma_1 + \dots + k_n \gamma_n)) = 1$$

ist nur erfüllt für

$$k_1 \gamma_1 + \dots + k_n \gamma_n \in \mathbb{Z},$$

was wegen der rationalen Unabhängigkeit von $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ unmöglich ist. Also sind a_{k_1, \dots, k_n} alle 0 für $(k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$. Deswegen ist F (als L^2 -Funktion) konstant. \square

Die Translation $f_\gamma : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, $[x] \mapsto [x + \gamma]$ ist also genau dann minimal, wenn sie topologisch transitiv ist, und zwar genau dann, wenn die Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_n, 1$ rational unabhängig sind (d.h. wenn aus $\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j = K$ mit $k_1, \dots, k_n, K \in \mathbb{Z}$ folgt, dass $k_1 = k_2 = \dots = k_n = K = 0$).

DEFINITION. Der **lineare Translationsfluss** φ^γ auf \mathbb{T}^n (mit $\gamma =$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n) \text{ ist definiert durch}$$

$$\varphi_t^\gamma([x]) = [x + t\gamma].$$

THEOREM 7.0.34. *Der lineare Translationsfluss φ^γ ist minimal genau dann, wenn die Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ rational unabhängig sind, d.h. aus*

$$\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j = 0 \text{ mit } \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n \text{ folgt } k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

BEMERKUNG 7.0.35. Wenn φ^γ nicht minimal ist, dann auch nicht topologisch transitiv.

BEWEIS. (Zeichnung) Wenn für irgendein $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\varphi_t^\gamma : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$$

minimal ist, dann auch der Fluss φ^γ . Es gilt:

$$\varphi_t^\gamma = f_{t\gamma}.$$

„ \Leftarrow “ Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ rational unabhängig. Die Bedingung

$$\sum_{j=1}^n k_j t \gamma_j = K$$

ist für jedes k_1, \dots, k_n, K (mit $\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j \neq 0$) erfüllbar nur für ein $t \in \mathbb{R}$, nämlich

$$t = \frac{K}{\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j}.$$

Also ist $f_{t\gamma}$ nur für abzählbar viele $t \in \mathbb{R}$ nicht minimal. Somit $\exists t \in \mathbb{R}$, so dass $f_{t\gamma}$ minimal ist.

„ \Rightarrow “ Sei $\sum_{j=1}^n k_j \gamma_j = 0$ mit $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$[x] \mapsto \sin 2\pi \sum k_j x_j$$

wohldefiniert, stetig, und φ^γ -invariant da

$$(T \circ \varphi_t^\gamma)([x]) = \sin 2\pi \sum k_j (x_j + t\gamma_j) = \sin 2\pi \left(\sum k_j x_j + t \underbrace{\sum k_j \gamma_j}_{=0} \right) = F([x]),$$

und F ist nicht konstant. □

Frage: Gibt es Abbildungen, die topologisch transitiv, aber nicht minimal sind? Wir werden gleich solche Abbildungen sehen.

Hyperbolische Abbildungen auf dem Torus. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

- $\det A = 1$,
- A ist invertierbar,
- A^{-1} ist ebenfalls eine ganzzahlige Matrix.
- A hat 2 verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.
- Die Eigenräume zu den Eigenwerten sind orthogonal.

A ergibt eine Abbildung auf \mathbb{T}^n wie folgt:

DEFINITION. Die **Katzenabbildung von Arnold** auf \mathbb{T}^2 ist definiert durch $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$,

$$f_A : [x] \mapsto \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \right].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, stetig, invertierbar. (Zeichnung)

THEOREM 7.0.36. (Periodische Punkte der Arnold'schen Katzenabbildung) Jeder Punkt $[x] \in \mathbb{T}^2$ mit beiden Koordinaten rational (d.h. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{Q}$) ist ein periodischer Punkt. Alle anderen Punkte in \mathbb{T}^2 sind nicht periodisch. (Folgerung: Periodische Punkte sind dicht auf \mathbb{T}^2).

BEWEIS. Seien x_1, x_2 rational, $x_1 = \frac{p}{q}$, $x_2 = \frac{\tilde{p}}{q}$ (ObdA gleicher Nenner). Das Gitter

$$G_q = \left\{ \left[\begin{pmatrix} g_1/q \\ g_2/q \end{pmatrix} \right] \mid g_1, g_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

besteht aus endlich vielen (nämlich q^2) Punkten auf \mathbb{T}^2 . Sei $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ die Katzenabbildung. Wenn $[x] \in G_q$, dann ist auch $f_A([x]) \in G_q$. Da dies auch für $f_{A^{-1}}$ gilt, ist

$$f_A \mid_{G_q}$$

invertierbar. Somit ist jeder Punkt $[x]$ in G_q **prä-periodisch**, d.h. $\exists k, l \in \mathbb{N}, k > 0$, sodass $f_A^k([y]) = ([y])$ mit $[y] = f_A^l([x])$. Da f_A invertierbar ist, gilt auch $f_A^k([x]) = [x]$.

Jeder in beiden Koordinaten rationale Punkt ist Element eines rationalen Gitters G_q für geeignetes q . Also ist jedes $[x] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$ (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$) periodisch.

Umgekehrt: Sei $[x]$ nicht in beiden Komponenten rational. Zu zeigen: $[x]$ ist nicht periodisch. Annahme: $f_A^k([x]) = [x]$. Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix, die f_A^k entspricht. Dann muss gelten:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Also gilt:

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da $A^k - id$ keinen Eigenwert 0 hat (denn A^k hat keinen Eigenwert 1). Lösen ergibt x_1, x_2 als rationale Kombination von $k_1, k_2, a, b, c, d, 1$. Deswegen ist

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Q}.$$

□

(Zeichnung)

Frage: Hat f_A periodische Punkte (schon beantwortet: alle rationalen Punkte) und wieviele?

THEOREM 7.0.37. f_A hat $P_n = \lambda_1^n + \lambda_1^{-n} - 2$ periodische Punkte der Periode n .

BEWEIS. Ein periodischer Punkt der Periode n für f_A , d.h. $f_A^n[x] = [x]$, erfüllt:

$(f_A^n - id)([x]) = [0]$. Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix zu $(f_A^n - id)$; dies ist eine invertierbare Matrix. Es gilt: Periodische Punkte (der Periode n) von f_A sind Punkte $[x]$ mit $G([x]) = [0]$ für $G = (f_A^n - id)$. Sei $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen Punkte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $H(x) \in \mathbb{Z}^2$. Wir können das Finden von periodischen Punkten zurückführen auf das Zählen von Gitterpunkten in Parallelogrammen. Wir kennen schon den Flächeninhalt des Einheitsquadrats $[0, 1]^2$ nach Abbildung mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= |(\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - 1)| \\ &= \lambda_1^n + \lambda_1^{-n} - 2. \end{aligned}$$

Zwischenlemma: Es gilt folgende im Anschluss bewiesene geometrische Aussage:

LEMMA 7.0.38. Die Zahl der Gitterpunkte aus \mathbb{Z}^2 im Bild von linearen Abbildungen $L([0, 1]^2)$ ist gegeben durch $\det L$, d.h. den Flächeninhalt nach Anwendung der Abbildung.

BEWEIS. (Zwischenlemma) Zunächst Zeichnung des Parallelogramms. Zählen der Gitterpunkte in einem Parallelogramm folgendermaßen: im Inneren: 1, auf dem Rand 0.5, Ecken: 1 (für alle vier Ecken zusammen). Idee: Wir überdecken ein großes Quadrat $[0, m]^2$ mit der Pflasterung durch Kopien des Parallelogramms. Abschätzungen in beide Richtungen: Sei l die längste Diagonale des Parallelogramms (s. Zeichnung). Dann gilt:

- (1) alle Parallelogramme, die das Quadrat $[l, m - l]^2$ berühren, liegen im Inneren von $[0, m]^2$.
- (2) alle Parallelogramme, die das Quadrat $[0, m]^2$ berühren, liegen im Inneren von $[-l, m + l]^2$

Sei N die Anzahl der Parallelogramme. Sei F der Flächeninhalt eines der Parallelogramme. Dieser ist: $N = \text{Fläche des Quadrats} (+ \text{Fehlerterm})$. Es gilt also für die Anzahl der Parallelogramme:

$$N \geq \frac{(m - 2l)^2}{F} \geq \frac{m^2}{F} \left(1 - \frac{4l}{m}\right).$$

Andererseits gilt für die Anzahl der Parallelogramme:

$$N \leq \frac{(m + 2l)^2}{F} \leq \frac{m^2}{F} \left(1 + 4\frac{l}{m} \left(1 + \frac{l}{m}\right)\right) \leq \frac{m^2}{F} \left(1 + 6\frac{l}{m}\right)$$

(für $m > 2l$). Also ist $F = m^2/N$ (da l fest, $m \rightarrow \infty$. Deswegen ist die Zahl der überdeckten Gitterpunkte im Quadrat (m^2) gleich $\frac{N}{F}$. \square

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ in einem metrischen Raum heißt topologisch mischend, wenn gilt: Für je zwei offene Mengen U, V gibt es $N = N(U, V)$, sodass $\forall k > N, k \in \mathbb{N}$ gilt: $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$.

KOROLLAR 7.0.39. Für alle U, V offen $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$.

THEOREM 7.0.40. Arnolds Katzenabbildung f_A ist topologisch mischend.

Daraus folgt:

KOROLLAR 7.0.41. Arnolds Katzenabbildung f_A ist topologisch transitiv.

BEWEIS. Die instabile Richtung E^u (welche exponentiell expandiert) hat irrationale Steigung. Deswegen ist E^u dicht in \mathbb{T}^2 . Also gibt es $\forall \varepsilon > 0$ ein $T(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass das Stück S von Länge ε auf E^u bei 0, sodass $f_A^{T(\varepsilon)}(S)$ ε -dicht ist. Also gilt für jedes Stück S' (existiert wegen Offenheit) von E^u durch V der Länge ε : $f_A^{T(\varepsilon)}(S')$ ist ε -dicht, schneidet also U (für ε klein genug). Für $k > T$ bleibt die ε -Dichtheit erhalten. \square

Physikalische Systeme (theoretische Mechanik)

Newton-Systeme, klassische Mechanik. Die von Newton beschriebenen Systeme haben die Form

$f = ma$, wobei $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ die **Beschleunigung** und $f = f(x)$ die **Kraft** am Punkt x ist. Typischerweise handelt es sich um einen Massepunkt, der sich unter der Bewegung einer Kraft bewegt.

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung in x , die sich aber leicht in eine 1. Ordnung umwandeln lässt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}f(x).\end{aligned}$$

In der Newton-Mechanik ist m konstant und wird manchmal zu 1 normiert.

Wir erhalten eine DGL 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt}(x, v) = \left(v, \frac{1}{m}f(x)\right).$$

Hierbei sind $x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n$. In der Physik ist oft $n = 3$, aber es macht Sinn, allgemeines n zu betrachten. Der Raum \mathbb{R}^{2n} heißt der **Phasenraum** des Systems. Die Differentialgleichung hat für glattes f eindeutige Lösungen und definiert einen Fluss φ im Phasenraum: $\varphi_t((x_0, v_0)) = (x(t), v(t))$ = die Lösung mit Anfangswerten $x(0) = x_0, v(0) = v_0$.

THEOREM. Für ein Newton-System ist das Phasenraumvolumen invariant, d.h. $d\text{vol} := dx dv$ erfüllt $\text{vol}(\varphi_t(A)) = \text{vol}(A)$ für alle messbaren A und alle $t \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Die Differentialgleichung ist $\dot{u} = F(u)$ mit $u = (x, v)$, $F(u_1, u_2) = (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2)) = (u_2, f(u_1)/m)$. Der Lösungsfluss ist volumenerhaltend, wenn die Divergenz Null ist. Das ist der Fall, da $\partial F_1/\partial u_1 = 0 = \partial F_2/\partial u_2$. \square

DEFINITION. Der **Impuls** ist $p := mv$.

Die **kinetische Energie** ist

$$E_{\text{kin}}(v) := \frac{1}{2}m\|v\|^2 = \frac{1}{2}m \langle v, v \rangle .$$

Wenn zusätzlich f ein Gradientenvektorfeld ist, d.h. $f = -\text{grad}V$ mit einer Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so heißt $V = V(x)$ das **Potential** oder die **Potentialenergie**. f heißt dann **Potentialfeld**. Die Funktion

$$H(x, v) := E_{\text{kin}}(v) + V(x)$$

heißt die **Gesamtenergie**.

THEOREM. Für ein Potentialfeld ist die Gesamtenergie H invariant. Jedes Orbit liegt auf einer Kurve, entlang welcher H konstant ist.

BEWEIS. $\frac{dH}{dt} = m \langle v, \dot{v} \rangle + \langle \text{grad}V, \dot{x} \rangle = \langle v, m\dot{v} + \text{grad}V \rangle = 0$, da $m\dot{v} = -\text{grad}V$. \square

BEISPIEL. Das Pendel $\ddot{x} = -\sin x$: Hier ist $x \in S^1$, da der Winkel periodisch ist. v ist dennoch ein Element in \mathbb{R}^n . Dies ist ein Potentialfeld mit $V(x) = -\cos x$. Es ist $H = v^2/2 - \cos x$. Für $H \in (-1, 1)$ sind die Lösungskurven **periodische Orbits**. Für $H = 1$ ergibt sich ein **homoklines Orbit**.

BEMERKUNG. Die Orbits schneiden sich nicht. Wo es aussieht, als würden sie sich kreuzen, haben wir in Wirklichkeit mehrere Orbits: einen Fixpunkt im „Kreuzungspunkt“ sowie andere Orbits, die darauf zu- oder davon weglaufen, die aber den Fixpunkt nicht in endlicher Zeit erreichen.

Global verhalten sich die Lösungen mit $H > 1$, die mit $H = 1$ und die mit $H < 1$ deutlich verschieden. Das hängt damit zusammen, dass die Funktion H bei $H = 1$ einen Sattelpunkt hat.

Lagrange-Gleichung und Variationsmethoden.

DEFINITION. Für ein Potentialsystem heißt

$$L(x, v) := \frac{1}{2} \langle mv, v \rangle - V(x)$$

die **Lagrange-Funktion**.

DEFINITION. Die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} L = \frac{\partial}{\partial x} L$$

heißt **Euler-Lagrange-Gleichung**.

THEOREM 8.0.42. Die Lösungen der Newton-Gleichung $m\ddot{x} = -\nabla V$ sind genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung.

BEWEIS. $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} L = mv$ und $\frac{\partial}{\partial x} L = -\nabla L$. □

DEFINITION. Für eine C^2 -Kurve $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine **Variation** von c eine Schar von Kurven $c_s = c_s(t)$, $t \in [0, T]$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so dass die Abbildung $(t, s) \mapsto c_s(t)$ in C^2 ist und so dass $c = c_0$ gilt.

DEFINITION. Wenn F eine reellwertige Abbildung auf der Menge der Kurven ist, heißt c **kritischer Punkt** von F , wenn für jede Variation $(c_s)_{s \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} F|_c = 0.$$

THEOREM 8.0.43. Sei

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad L = L(x, v)$$

eine C^2 -Funktion, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$. Dann erfüllt die C^2 -Kurve $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Euler-Lagrange-Gleichung genau dann, wenn c kritischer Punkt des Funktionals

$$F(c) := \int_0^T L(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

auf der Menge

$$\{\tilde{c} \in C^2([0, T], \mathbb{R}^n) : \tilde{c}(0) = a, \tilde{c}(T) = b\}$$

ist.

BEWEIS. c ist kritisch genau dann, wenn für alle solchen Variationen $(c_s)_s$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} F|_c \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^T L dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} \dot{c}_s|_{s=0} \right) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right]_{t=0}^T \quad (\text{was wegen den Randbedingungen verschwindet}) \\ &\quad + \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right) dt. \end{aligned}$$

Dies ist sicherlich 0 für Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung auch die Euler-Lagrange-Gleichung, denn wenn

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}$$

an einer Stelle t_0 längs c nicht 0 ist, also einen Wert $Z \neq 0$ hat, dann wähle eine kleine δ -Umgebung von t , so dass dieser Term dort annähernd konstant ist, und wähle eine Variation $(c_s)_s$ mit

$$\frac{\partial}{\partial s} c_s(t)|_{s=0} = Z$$

für alle $t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$ und

$$\frac{\partial}{\partial s} c_s(t)|_{s=0} = 0$$

für alle t außerhalb von $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$; dann ist für diese Wahl der Variation auch das obige Integral nicht 0. \square

Hamilton-Systeme.

DEFINITION. Für eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ ist das **Hamilton'sche System** gegeben durch

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\text{id} & 0 \end{pmatrix} \text{grad}H(u), \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{d}{dt}(u_1, \dots, u_{2n})^T = \left(\frac{dH}{du_{n+1}}, \dots, \frac{dH}{du_{2n}}, -\frac{dH}{du_1}, \dots, -\frac{dH}{du_n} \right)^T.$$

Die Funktion H heißt **Hamilton-Funktion**.

BEISPIEL 8.0.44. Der Harmonische Oszillator ist ein Hamilton-System mit $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.

THEOREM 8.0.45. Für jedes hamiltonsches System ist die **Hamilton-Funktion** H *invariant* unter dem Fluss, d.h. es gilt $H(\varphi_t(u)) = H(u)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, wobei φ der Hamilton-Fluss ist.

PROOF. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(u) &= \frac{\partial H}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} \dot{u}_{2n} \\ &= \frac{\partial H}{\partial u_1} \frac{\partial H}{\partial u_{n+1}} + \dots + \frac{\partial H}{\partial u_n} \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} - \frac{\partial H}{\partial u_{n+1}} \frac{\partial H}{\partial u_1} - \dots - \frac{\partial H}{\partial u_{2n}} \frac{\partial H}{\partial u_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

\square

THEOREM 8.0.46. Der Fluss jedes Hamilton'schen Systems ist volumenerhaltend.

PROOF. Das zugehörige Vektorfeld

$$f(u) = \frac{d}{dt}(u_1, \dots, u_{2n}) = \left(\frac{\partial H}{\partial u_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial u_n} \right)$$

hat Divergenz

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial^2 H}{\partial u_{n+1} \partial u_1} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial u_{2n} \partial u_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_{n+1}} - \dots - \frac{\partial^2 H}{\partial u_n \partial u_{2n}} = 0.$$

□ □

In Dimension 2 sind solche Systeme besonders leicht zu verstehen:

LEMMA 8.0.47. Für eine Hamilton-Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist jede Niveaumenge von H , die eine geschlossene Kurve ist und keine kritischen Punkte von H enthält, ein periodisches Orbit des hamiltonschen Systems

$$\frac{d}{dt}(u_1, u_2)^T = \left(\frac{dH}{du_2}, -\frac{dH}{du_1} \right)^T, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

PROOF. $M_c := f^{-1}(c)$ ist nach Voraussetzungen eine geschlossene Kurve. Zunächst ist das Vektorfeld $f(u) = \dot{u}$ tangential an die Kurve, denn $f(u)$ ist nach Konstruktion senkrecht zum Gradienten von H und dieser senkrecht zu den Niveaulinien. Somit bleibt jedes Orbit, das auf M_c beginnt, auch auf M_c . Nach Voraussetzung enthält M_c keine kritischen Punkte, also ist

$$0 < \min_{u \in M_c} \|f(u)\| =: K.$$

Wegen der Annahmen an H ist diese Kurve stetig differenzierbar, hat also endliche Länge L . Somit muss das Orbit spätestens nach Zeit L/K wieder auf sich selbst treffen. Somit ist es periodisch. □ □

Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden brauchen wir den Begriff der **differenzierbaren Mannigfaltigkeiten**. Typische Beispiele sind der bekannte euklidische Raum \mathbb{R}^n und der n -dimensionale Torus \mathbb{T}^n sowie die n -Sphäre S^n . Dies sind Spezialfälle der folgenden allgemeinen Definition. Zuerst benötigen wir allerdings noch ein paar weitere (leider etwas technische) Definitionen:

DEFINITION. Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X mit einer Menge T von Teilmengen von X , genannt eine **Topologie** auf X , für die gilt:

- $\emptyset \in T, X \in T$.
- Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus T liegt wieder in T .
- Der Durchschnitt von zwei Mengen aus T liegt wieder in T .

BEISPIEL. Jede beliebige Menge ist ein topologischer Raum mit der Topologie $T = \{\emptyset, X\}$. Hier gibt es keine offenen Mengen außer dem leeren Raum und dem gesamten Raum.

Jede beliebige Menge ist ein topologischer Raum mit der Topologie, in welcher jede Teilmenge als offen erklärt wird.

Wichtig ist folgendes Beispiel:

Jeder metrische Raum (X, d) ist ein topologischer Raum. Darauf gibt es die „von der Metrik stammende“ Topologie. Diese ist so definiert: Eine Menge $A \subset X$ heißt *offen*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in A$ gilt, dass $B_\varepsilon(x) \subset A$. Hier bedeutet $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, T) heißt **Hausdorff-Raum** (bzw. hat die Hausdorff-Eigenschaft), wenn gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es $U, V \in T$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Wir sagen, ein topologischer Raum erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn gilt: Es gibt eine abzählbare Teilmenge von T , so dass die Vereinigung von Mengen daraus alle Mengen von T ergeben.

BEISPIEL. Die bezüglich der euklidischen Metrik d_E offenen Mengen im \mathbb{R}^n bilden einen topologischen Raum, der die Hausdorff-Eigenschaft hat und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Jede Teilmenge X des \mathbb{R}^n , versehen mit derselben Metrik, also der metrische Raum (X, d_E) , hat wieder diese beiden Eigenschaften.

DEFINITION. Es ist üblich, statt „ (X, T) ist ein topologischer Raum“ zu sagen: „ X ist ein topologischer Raum“, obwohl die Information in T und nicht in der Menge X enthalten ist.

Jetzt können wir uns endlich den erwünschten Mannigfaltigkeiten zuwenden:

DEFINITION. Eine n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit ist ein Tupel $(M, (U_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$, wobei M eine Menge ist (die Menge der Punkte auf der Mannigfaltigkeit), I eine Indexmenge, jedes U_i eine offene Teilmenge von M und h_i eine Bijektion von U_i auf eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n , so dass gilt:

- M ist ein topologischer Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- $M = \bigcup_i U_i$.
- Für alle $i, j \in I$ ist

$$\psi_{ij} := h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \rightarrow h_j(U_i \cap U_j)$$

ein C^k -Diffeomorphismus.

Die h_i heißen **Karten**, die U_i **Kartenumgebungen** und die ψ_{ij} **Kartenwechsel**.

Die Mannigfaltigkeit heißt **glatt**, wenn sie C^∞ ist. Eine C^0 -Mannigfaltigkeit heißt **topologische Mannigfaltigkeit**.

Meist wird statt „ $(M, (U_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I})$ ist eine Mannigfaltigkeit“ einfach gesagt „ M ist eine Mannigfaltigkeit, d.h wie bei Maßräumen und bei topologischen Räumen kommt das relevante Objekt in der Notation nicht vor.“

BEISPIEL. \mathbb{R}^n ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Karte $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(x) = x$.

- \mathbb{T}^n (der n -dimensionale Torus) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2^n Karten. Alle deren Kartenwechsel sind Translationen auf dem \mathbb{R}^n .
- S^n (die n -dimensionale Sphäre) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2 Karten, den sogenannten **stereographischen Projektionen** vom \mathbb{R}^{n+1} in den \mathbb{R}^n .

- Für jede glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x))\}$$

eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. $\text{Graph}(f)$ ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^{n+1} .

- Für jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\text{Graph}(f)$ eine glatte Mannigfaltigkeit, mit einer einzigen Karte $h : \text{Graph}(f) \rightarrow \mathbb{R}^n, h((x, f(x))) := x$. Allerdings ist hier $\text{Graph}(f)$ weder „eingebettet“ noch „Untermannigfaltigkeit“ (für diese Begriffe siehe ein Buch über Differentialtopologie, z.B. [Jänich, Klaus: *Vektoranalysis*]).

Letzteres Beispiel ist recht exotisch; die Mannigfaltigkeiten, die wir wirklich brauchen, „sehen auch glatt aus“. Allgemein reicht es aus, sich „glatte“ Untermengen des \mathbb{R}^n vorzustellen, denn es kann gezeigt werden, dass alle Mannigfaltigkeiten der Dimension n in einen \mathbb{R}^m eingebettet werden können. Dabei ist fast immer $m > n$.

Weiterhin benötigen wir Abbildungen von/auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten:

DEFINITION. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ mit $(M, U_i, h_i), (N, V_j, \tilde{h}_j)$ Mannigfaltigkeiten heißt C^k , wenn für jede Kartenumgebung U_i von x in M und jede Kartenumgebung V_j von $f(x)$ in N gilt, dass $f|_{U_i}$ „bezüglich Karten C^k ist“, d.h. wenn $\tilde{h}_j \circ f \circ h_i^{-1}$ eine C^k -Abbildung ist.

Allgemeiner gilt folgende „Meta-Definition“:

DEFINITION. Ein Objekt auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Diffeomorphismus / ein Homöomorphismus / eine glatte Abbildung / eine C^k -Kurve / etc. genau dann, wenn dies bezüglich Karten gilt.

D.h. $f : M \rightarrow N$ ist ein Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Karten h, \tilde{h} auf M, N gilt: $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus (als Abbildung einer Teilmenge vom \mathbb{R}^n). Das klingt erst einmal etwas verwunderlich, da für die Karten h ja gar nicht vorausgesetzt ist, dass diese C^k sind. Es ist auch gar nicht möglich, das vorauszusetzen, denn auf der Punktmenge M kann man ja erst einmal nicht differenzieren. Dennoch macht diese Definition Sinn. Denn ob $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, hängt nicht von h, \tilde{h} ab, und daher können wir testen, ob es für ein (dann alle) h, \tilde{h} gilt.

DEFINITION. Der **Tangentialraum** $T_x M$ an die Mannigfaltigkeit M am Punkt x ist die Menge von stetig differenzierbaren Kurven $c : (-1, 1) \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ modulo der Äquivalenzrelation $c_1 \sim c_2$ für $(h \circ c_1)'(0) = (h \circ c_2)'(0)$.

Dabei muss genau genommen c in einer Kartenumgebung liegen; dies kann aber auch nachträglich durch Einschränkung des Definitionsbereichs von c sichergestellt werden.

BEISPIEL. Für eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Graph von f , d.h. $\{(x, f(x))\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit M und der Tangentialraum davon am Punkt x ist eine Gerade mit Steigung $f'(x)$.

Von Fluss zu Abbildung und zurück

Poincaré-Abbildungen. Sei φ ein Fluss auf einer Mannigfaltigkeit M (insbesondere $M = \mathbb{R}^n$ oder $M = \mathbb{T}^n$). Das zugehörige Vektorfeld heiße f , d.h.

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x).$$

Eine Hyperfläche S ist eine Untermannigfaltigkeit von M (also Teilmenge und Mannigfaltigkeit) mit $\dim S = \dim M - 1$.

Wenn $M = \mathbb{R}^n$, so ist jeder $(n - 1)$ -dimensionale Unterraum eine Hyperfläche.

DEFINITION. Eine Hyperfläche S heißt (globaler) (transversaler) **Schnitt** des Flusses φ , wenn gilt:

- Das zu φ gehörende Vektorfeld f ist nirgends tangential an S .
- Jedes Orbit von φ schneidet S unendlich oft für $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow -\infty$.

Wir kommen jetzt zur ersten Definition der Poincaré-Abbildung:

DEFINITION. Sei S ein globaler Schnitt von φ . Die Wiederkehrzeit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\tau(x) := \min \{t > 0 : \varphi_t(x) \in S\}.$$

Es gilt immer $\tau(x) > 0$, da wir vorausgesetzt haben, dass f nicht tangential an S ist.

DEFINITION. Sei S ein globaler Schnitt von φ . Dann ist die **Poincaré-Abbildung**

$$P : S \rightarrow S$$

definiert durch

$$P(x) := \varphi_{\tau(x)}(x).$$

Das heißt: Der Punkt x wird auf den Punkt abgebildet, der auf dem Orbit von x liegt und der erste ist, an dem das Orbit von x wieder durch S läuft.

BEISPIEL 10.0.48. Für die Differentialgleichung

$$\dot{r} = r(1 - r),$$

$$\dot{\theta} = 1$$

(in Polarkoordinaten) ist

$$S = \{(x, 0) : x > 0\}$$

ein globaler Schnitt. Die Wiederkehrzeit ist

$$\tau = 2\pi$$

für alle Punkte in S . Da die Differentialgleichung gelöst wird durch

$$r(t) = \frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0,$$

ist die Poincaré-Abbildung gegeben durch

$$P(x, 0) = \left(\frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-2\pi}}, 0 \right).$$

Suspensionen.

DEFINITION. Sei $f : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus einer Mannigfaltigkeit M . Auf $M \times [0, 1]$ ist die Äquivalenzrelation \sim so definiert, dass sie genau die folgenden Äquivalenzen enthält: Jeder Punkt in $M \times [0, 1]$ ist zu sich selbst äquivalent, und außerdem gilt

$$\forall x \in M : (x, 1) \sim (f(x), 0).$$

Sei die Menge S definiert durch

$$S := (M \times [0, 1]) / \sim.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\lfloor a \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$$

die ganze Zahl, die aus a durch Abrunden entsteht.

Die Formel

$$\psi_t([(x, \theta)]) := \left[\left(f^{\lfloor t + \theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t + \theta \rfloor \right) \right]$$

definiert einen Fluss ψ auf S .

Dieser Fluss heißt die **Suspension** bzw. der **Suspensionsfluss** von f .

LEMMA 10.0.49. ψ erfüllt die Flussaxiome.

VON FLUSS ZU ABBILDUNG UND ZURÜCK

PROOF. Erstens gilt für $\theta \in [0, 1)$, dass

$$\begin{aligned}\psi_0([(x, \theta)]) &= [(f^{[0+\theta]}(x), 0 + \theta - [0 + \theta])] \\ &= [(f^0(x), \theta - 0)] \\ &= [(x, \theta)].\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$r + k - [r + k] = r - [r].$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\psi_s(\psi_t([(x, \theta)])) &= \psi_s\left(\left[(f^{[t+\theta]}(x), t + \theta - [t + \theta])\right]\right) \\ &= \left[(f^{[s+t+\theta-[t+\theta]]}(f^{[t+\theta]}(x)), t + \theta - [t + \theta] + s - [t + \theta - [t + \theta] + s])\right] \\ &= \left[(f^{[t+\theta]+[s+t+\theta]-[t+\theta]}(x), s + t + \theta - [s + t + \theta])\right] \\ &= \psi_{s+t}([(x, \theta)]).\end{aligned}$$

□

□

LEMMA 10.0.50. Das diesen Fluss erzeugende Vektorfeld $V : S \rightarrow TS = TM \times \mathbb{R}$ hat die Form

$$V \equiv (0, 1).$$

PROOF. Das Vektorfeld V zu einem Fluss φ ist gegeben durch

$$V(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p).$$

Sei $p = (x, \theta) \in S$. Sei zunächst θ nicht ganzzahlig. Dann ist die Funktion $t \mapsto [t + \theta]$ konstant für alle t in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von 0. Dann ist auch $t \mapsto f^{[t+\theta]}(x)$ konstant auf U . Also gilt für alle $t \in U$, dass

$$\left(f^{[t+\theta]}(x), t + \theta - [t + \theta] \right) = (\text{const}, t + \text{const}).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}V(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[\left(f^{[t+\theta]}(x), t + \theta - [t + \theta] \right) \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(f^{[t+\theta]}(x), t + \theta - [t + \theta] \right) \\ &= (0, 1).\end{aligned}$$

□

Wir können den Suspensionsfluss statt für Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M auch für Diffeomorphismen einer offenen Menge U im \mathbb{R}^n definieren. Allerdings ist auch in diesem Fall die Menge X , auf der der Suspensionsfluss definiert ist, keine Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$, sondern eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

BEISPIEL 10.0.51. Wenn $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine Rotation ist, so ist X ein Torus.

BEISPIEL 10.0.52. Wenn $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine Spiegelung ist, so ist X eine *Klein-Fläche*, eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit (eine Fläche, deren "Innenseite" gleichzeitig die "Außenseite" ist). X wird auch „Klein'sche Flasche“ genannt, obwohl sie kein Volumen einschließt. („Herr Professor, ich hatte meine Übungsaufgaben in meine Klein'sche Flasche gelegt, doch jetzt kann ich sie nirgends mehr finden.“)

BEISPIEL 10.0.53. Wenn $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ eine Spiegelung ist, so ist X ein *Möbiusband*.

Konjugation und Orbit-Äquivalenz

Im Folgenden wollen wir die Analyse von dynamischen Systemen erleichtern, indem wir gleich ganze Klassen von „gleichen“, „äquivalenten“ usw. Systemen untersuchen. Doch was sind geeignete Konzepte von „Gleichheit“, „Äquivalenz“ usw.?

Für Abbildungen hat sich folgendes Konzept als brauchbar herausgestellt:

DEFINITION. Zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y, 1 \leq k \leq \infty$, heißen **topologisch konjugiert** (oder C^0 -**konjugiert**), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y, 1 \leq k \leq \infty, C^j$ -**konjugiert** mit $1 \leq j \leq \infty$, wenn es einen C^j -Diffeomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

BEISPIEL 11.0.54. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x, g(x) = 8x$, sind topologisch konjugiert mittels $h(x) = x^3$, was ein Homöomorphismus ist. h ist kein Diffeomorphismus, und es gibt auch keinen solchen, wie wir in Kürze sehen.

Wenn f, g C^j -konjugiert sind, muss h nicht eindeutig bestimmt sein.

BEISPIEL 11.0.55. Wenn $f = g : X \rightarrow X$, dann ist *jeder* Homöomorphismus $h : X \rightarrow X$ eine Konjugation.

Diese Definition von Konjugation ist zwar leicht auf Flüsse zu übertragen, aber es wird sich gleich herausstellen, dass da ein anderes Konzept brauchbarer ist. Zunächst die analoge Definition:

DEFINITION. Zwei C^k -Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **topologisch konjugiert** (C^0 -**konjugiert**), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k -Diffeomorphismen $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y, k \geq 1, C^j$ -**konjugiert** mit $0 \leq j \leq \infty$, wenn es einen C^j -Diffeomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt mit $\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h$.

KONJUGATION UND ORBIT-ÄQUIVALENZ

Hier taucht nun folgendes Problem auf: Sei beispielsweise φ der Fluss zu dem System

$$\dot{r} = r, \quad \dot{\theta} = 1$$

(in Polarkoordinaten) und ψ der Fluss zu

$$\dot{r} = 2r, \quad \dot{\theta} = 2.$$

Diese beiden Systeme haben dasselbe Phasenportrait, d.h. für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ durchläuft das Orbit von φ genau dieselben Punkte wie das Orbit von ψ durch x . Der einzige Unterschied ist, dass die Geschwindigkeit verschieden ist. Wir brauchen daher ein Konzept von Äquivalenz, das nicht so sensibel bezüglich des Zeitparameters ist. Folgendes ist brauchbar:

DEFINITION. Die C^k -Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **Orbit-äquivalent** (**C^0 -Orbit-äquivalent**), wenn es Homöomorphismen $h : X \rightarrow Y$ und $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass σ orientierungserhaltend (d.h. monoton wachsend) ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_{\sigma(t)} \circ h.$$

Es gibt auch die Definition von **C^j -Orbit-Äquivalenz** mit $0 \leq j \leq \infty$; dabei wird gefordert, dass in der obigen Definition h ein C^j -Diffeomorphismus ist. Allerdings wird für σ nach wie vor nur Homöomorphie gefordert.

Wenn also zwei Flüsse Orbit-äquivalent sind, dann können die Orbits zusammengestaucht werden.

Unmittelbare Folgerungen der Definition sind:

LEMMA 11.0.56.

- Wenn f zu g C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$) und f einen Fixpunkt hat, dann auch g .
- Wenn f zu g C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jedes periodische Orbit von f ein periodisches Orbit von g , und zwar mit derselben Periode.
- Eine Identitätsabbildung id_X ist zu keiner anderen Abbildung außer anderen Identitätsabbildungen id_Y konjugiert.

Fast alles in diesem Lemma gilt auch für Konjugation von Flüssen und für Orbit-Äquivalenz von Flüssen; allerdings kann sich die Periode eines periodischen Orbits bei Orbit-Äquivalenz ändern:

LEMMA 11.0.57.

- Wenn φ zu ψ C^j -konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jedes periodische Orbit von φ ein periodisches Orbit von ψ , und zwar mit derselben Periode.

KONJUGATION UND ORBIT-ÄQUIVALENZ

- Wenn φ zu ψ Orbit-äquivalent ist, gibt es für jedes periodische Orbit von φ ein periodisches Orbit von ψ , aber nicht notwendigerweise mit derselben Periode.

In fast allen Fällen kann man nur C^0 -Konjugation erwarten, auch bei glatten Abbildungen oder Flüssen. Eine Ausnahme macht folgender Satz:

THEOREM 11.0.58. („flow-box“, Begradigungssatz) Wenn φ ein C^1 -Fluss auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist und das zugehörige Vektorfeld

$$f(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(x)$$

an der Stelle x_0 nicht verschwindet, dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0 , so dass $\varphi|_U$ (die Einschränkung von φ auf U) C^1 -konjugiert ist zum konstanten Fluss auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n , definiert durch

$$\psi_t(y) = y + te_1$$

(mit e_1 = der erste Einheitsvektor in \mathbb{R}^n).

Hufeisen und Büroklammer

Im Folgenden wollen wir ein Beispiel für eine „chaotische“ Abbildung betrachten, ein sogenanntes **Hufeisen**. Das erste Beispiel eines solchen stammt von Smale; hier studieren wir eine abgewandelte Version, die angenehmer ist.

DEFINITION. Die die **G-förmige Hufeisen-Büroklammer** ist auf $U = [0, 1] \times [0, 1]$ definiert durch

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad G(x, y) := \begin{cases} (3x, \frac{y}{3}) & \text{für } x \leq 1/3 \\ (3x - 2, \frac{y+2}{3}) & \text{für } x \geq 2/3 \\ \text{glatt fortgesetzt} & \text{für } x \in [1/3, 2/3] \end{cases}$$

Diese Abbildung ist noch keine Abbildung eines Raums auf sich selbst. Um eine geeignete Menge als Definitionsbereich zu finden, betrachten wir:

DEFINITION. Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Eine Menge $A \subset X$ heißt **positiv invariant** unter f , wenn $f(A) \subset A$. Für eine invertierbare Abbildung f heißt A **negativ invariant**, wenn $f^{-1}(A) \subset A$. Wenn A positiv und negativ invariant ist, heißt A **bi-invariant** oder einfach **invariant**. Eine Abbildung $H : X \rightarrow Y$ heißt **invariant** unter f , wenn $H \circ f = H$.

Vorsicht: Manche Bücher benutzen das Wort „invariant“ als Synonym für „positiv invariant“ und nicht für „bi-invariant“.

Nun suchen wir eine möglichst große Menge im \mathbb{R}^2 , die unter G invariant ist. Hierfür bietet sich die Menge

$$\Lambda := \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$$

an. Sie ist per Definition invariant, und sie ist Teilmenge von U , da $U = G^0(U)$.

DEFINITION. Die Standard-**Cantormenge** ist definiert als

$$C := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0, 2\} \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Bei der Definition kann statt \mathbb{N}_0 auch \mathbb{N} verwendet werden.

LEMMA 12.0.59. Es gilt:

a) Die Cantormenge C ist überabzählbar.

b) Die Standard-Cantormenge C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)

BEWEIS. Den Beweis haben Sie auf Aufgabenblatt 6 selbst erstellt. Hier ist er nochmal:

a) Es gibt überabzählbar viele unendliche Folgen in $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Es genügt zu zeigen, dass die Abbildung

$$F : \{0,2\}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow C, \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}$$

injektiv ist. (F ist tatsächlich sogar bijektiv.) Wenn

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \neq (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0},$$

dann ist

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} \neq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n},$$

denn wenn k die erste Stelle ist, an der sich a und b unterscheiden, dann ist

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right| \geq 3^{-k} - \sum_{n > k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

□

b) Die Abbildung $f : C \rightarrow C \times C$, definiert durch

$$f \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} \right) := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_{2n} 3^{-2n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_{2n+1} 3^{-(2n+1)} \right)$$

ist bijektiv, da

$$f^{-1} \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} c_n 3^{-n}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

f ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < 2\varepsilon$ und wähle

$$0 < \delta < 3^{-2k} - \sum_{n > 2k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

Dann gilt für

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \quad y = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n}$$

mit $|x - y| < \delta$, dass die ersten $2k$ Stellen von x und y übereinstimmen. Somit ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| \\ &= \left| \sum_{n > k} (a_{2n} - b_{2n}) 3^{-2n} \right| + \left| \sum_{n > k} (a_{2n+1} - b_{2n+1}) 3^{-(2n+1)} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

f^{-1} ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < \varepsilon$ und wähle

$$0 < \delta < 3^{-k} - \sum_{n > k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

Dann gilt für

$$x = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n 3^{-n} \right), \quad y = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a'_n 3^{-n}, \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b'_n 3^{-n} \right)$$

mit $|x - y| < \delta$ in der Summennorm, dass die ersten k Stellen von x und y in beiden Koordinaten übereinstimmen. Somit ist

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \sum_{n > k} |c_n - c'_n| 3^{-n} < \varepsilon.$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$c'_n = \begin{cases} a'_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ b'_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

□

LEMMA 12.0.60. Die Menge $\Lambda := \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$ ist der Standard-Cantor-Staub $C \times C$, wobei C die Standard-Cantormenge ist.

BEWEIS. $U \cap G(U)$ ist das Einheitsquadrat mit dem horizontalen „Drittel“-Rechteck entfernt, also die zwei horizontalen Rechtecke $[0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$ und $[0, 1] \times [\frac{2}{3}, 1]$. Da G aus zwei linearen Abbildungen besteht, wird bei der nächsten Anwendung von G aus jedem dieser Rechtecke wieder ein horizontales Drittel entfernt usw. Somit ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} G^i(U) = [0, 1] \times C.$$

Für die Umkehrabbildung G^{-1} gilt, dass $U \cap G^{-1}(U)$ aus den zwei vertikalen Rechtecken $\left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0, 1]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1\right] \times [0, 1]$ besteht. Bei jeder weiteren Anwendung von G wird aus jedem Rechteck wieder ein vertikales Drittel entfernt, und somit ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} G^{-i}(U) = C \times [0, 1].$$

Damit ist natürlich

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U) = C \times C.$$

□

Diese Abbildung ist, wie wir sehen werden, ein Prototyp einer „chaotischen“ Abbildung in folgendem Sinn:

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch transitiv**, wenn es ein dichtes Orbit gibt.

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch mischend**, wenn es für alle nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset X$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt: $U \cap f^n(V)$ ist nicht leer.

DEFINITION. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ heißt **chaotisch**, wenn die Menge der periodischen Punkte dicht ist und die Abbildung topologisch transitiv ist.

Diese Definition von Chaotizität stammt von Devaney; es gibt noch andere.

Anstatt diese Eigenschaften für unsere Hufeisen-Büroklammer direkt zu zeigen, studieren wir zuerst ein gänzlich anders aussehendes System, sogenannte symbolische Dynamik. Dann werden wir sehen, dass diese augenscheinlich sehr verschiedenen Systeme vergleichbare Dynamik haben.

Symbolische Dynamik

Zunächst definieren wir die **Symbolräume**:

DEFINITION. Die Menge

$$\Omega := \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \omega_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}$$

heißt **Menge der zweiseitigen Sequenzen** (oder **zweiseitiger Symbolraum**) und

$$\Omega^R := \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}_0} : \omega_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt **Menge der einseitigen Sequenzen** (oder **einseitiger Symbolraum**).

Darauf gibt es ein natürliches dynamisches System, welches alle Folgenglieder nach links schiebt:

DEFINITION. Der **Shift-Operator** auf Ω (bzw. auf Ω^R) ist definiert durch

$$(\sigma(\omega))_i := \omega_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ bzw. } i \in \mathbb{N}$$

Auf der Menge der zweiseitigen Sequenzen ist das eine Bijektion; auf der Menge der einseitigen Sequenzen dagegen nicht, denn dort wird der Wert von ω an der linkensten (0-ten) Koordinaten „vergessen“ und mit ω_1 überschrieben.

Die Symbolräume sind metrische Räume:

DEFINITION. Auf Ω ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik wie folgt definiert:

$$d_{\lambda, N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} \Delta(\alpha_i, \omega_i)$$

mit $\Delta(a, b) = 0$ für $a = b$ und $\Delta(a, b) = 1$ sonst,

bzw. allgemeiner

$$d_{\lambda, N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i|.$$

Fraktale und Dimension

Was sind Fraktale? Das Wort „fraktal“ kommt von „zerbrochen“ und steht für die nicht-ganzzahlige Dimension. Bestes Beispiel sind selbstähnliche Objekte:

- Die Cantor-Menge,
- das Sierpinski-Dreieck,
- der Sierpinski-Teppich,
- der Menger-Schwamm,
- die Koch-Kurve.

Es gibt unter Anderem folgende Definitionen von fraktaler Dimension, die leider nicht äquivalent sind:

- (1) Selbstähnlichkeits-Dimension,
- (2) Hausdorff-Dimension,
- (3) Box-Dimension.

Gemeinsames Feature von all diesen Dimensionen ist: Der n -dimensionale Einheitswürfel hat Dimension n . Allgemeiner soll gelten: Wenn wir die Menge A in jeder Koordinatenrichtung in 10 Scheiben schneiden und dann 10^d Stücke herauskommen, soll die Dimension gleich d sein. Ebenso mit der Zahl 10 ersetzt durch eine beliebige Zahl.

Für selbstähnliche Mengen, also solche, die aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt sind, bietet sich folgende Definition an:

Selbstähnlichkeitsdimension.

DEFINITION. Wenn eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus k Kopien von sich selbst zusammengesetzt ist, die alle um den Faktor $s \in (0, 1)$ skaliert sind, so ist die **Selbstähnlichkeits-Dimension** von A gleich

$$\dim_S(A) = -\frac{\log k}{\log s}.$$

Das ist dadurch motiviert, dass wir erwarten, dass die Dimension d die Gleichung

$$\left(\frac{1}{s}\right)^d = k$$

erfüllt. Auflösen nach d ergibt gerade die Formel in der Definition.

BEISPIEL 14.0.61. Die Standard-Cantormenge C besteht aus $k = 2$ Kopien, die mit $s = 1/3$ skaliert sind. Somit ist

$$\dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Das Sierpinski-Dreieck D besteht aus $k = 3$ Kopien, skaliert mit $s = 1/2$. Somit ist

$$\dim_S(D) = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Für den Sierpinski-Teppich T ist $k = 8$ und $s = 1/3$, somit

$$\dim_S(T) = \frac{\log 8}{\log 3}.$$

ÜBUNG 14.1. Was ist die Selbstähnlichkeits-Dimension des Mengerschwamms?

ÜBUNG 14.2. Wenn wir den n -fachen Cantor-Staub $C \times \dots \times C \subset \mathbb{R}^n$ betrachten (das n -fache Produkt der Standard-Cantormenge C), was ist dann die Selbstähnlichkeits-Dimension?

ÜBUNG 14.3. Was ist die Selbstähnlichkeits-Dimension der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0, 1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0, 1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0, 1)$ entfernt wird usw.?

Natürlich sind solchermaßen selbstähnliche Mengen sehr speziell. Man kann die Definition noch etwas erweitern, um zuzulassen, dass der Skalierungsfaktor s bei jeder Kopie anders ist. Wir wollen uns aber gleich die allgemeinste Definition von Dimension ansehen, nämlich die Hausdorff-Dimension.¹

¹Genaugenommen gibt es eine noch allgemeinere Dimension, die der Charatheodory-Dimension, die für eine einführende Vorlesung nun wirklich zu anspruchsvoll ist. Siehe [Pesin, Yakov A.: *Dimension theory in dynamical systems: contemporary view and applications*. Chicaco Lectures in Mathematics]

Hausdorff-Dimension.

DEFINITION. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$h_\varepsilon^d(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^d \mid (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ Überdeckung von } A, \right. \\ \left. \text{diam}(U_i) < \varepsilon \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Das d -dimensionale Hausdorff-Maß ist

$$h^d(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^d(A).$$

Letzterer Limes ist wohldefiniert, da h_ε^d monoton in ε ist.

Man kann Folgendes zeigen:

THEOREM 14.3.1. Für jedes A gibt es ein $d \in [0, \infty]$ mit

$$\begin{aligned} h^s(A) &= \infty && \text{für } s < d \\ h^s(A) &= 0 && \text{für } s > d. \end{aligned}$$

DEFINITION. Die Zahl

$$\begin{aligned} \dim_{\text{H}}(A) &:= \inf \{s > 0 : h^s(A) = 0\} \\ &= \sup \{s \geq 0 : h^s(A) = \infty\} \end{aligned}$$

heißt die **Hausdorff-Dimension** von A .

BEMERKUNG 14.3.2. Es folgt, dass für jedes nichtleere A die Hausdorff-Dimension gleich der Zahl d in dem vorigen Satz ist. Für die leere Menge kann man wahlweise 0 oder $-\infty$ als Dimension festsetzen. Letzteres ist praktisch, da dann Formeln wie $\dim_{\text{H}}(A \times B) \geq \dim_{\text{H}}(A) + \dim_{\text{H}}(B)$ stimmen. In der Literatur wird aber trotzdem oft 0 benutzt.

BEMERKUNG 14.3.3. Für $s = \dim_{\text{H}}(A)$ muss $h^s(A)$ keineswegs eine Zahl in $(0, \infty)$ sein; auch 0 und ∞ sind möglich.

ÜBUNG 14.4. Finden Sie solche Mengen A .

Der Vorteil der Hausdorff-Dimension ist, dass beliebigen Mengen eine Dimension zugeordnet werden kann. Das Problem mit der Hausdorff-Dimension ist, dass ihre Berechnung sehr schwer ist, sogar für ganz einfache Mengen wie $[0, 1]^n$ oder die Standard-Cantormenge. Daher befassen wir uns jetzt noch mit einer weiteren Dimensionsdefinition, die immer noch reichlich allgemein ist, aber mit wesentlich weniger Aufwand berechenbar, sogar automatisiert per Computer:

Box-Dimension. Es gibt verschiedene Berechnungsvorschriften für die Box-Dimension, die alle dasselbe Ergebnis liefern und daher alle als Definition taugen.

Zunächst eine Definition, die herauskommt, wenn wir in der Definition der Hausdorff-Dimension den Term $\text{diam}(U_i)$ ersetzen durch die obere Schranke für diese Durchmesser, also eine Zahl, die nicht von i abhängt:

DEFINITION. Sei A eine kompakte Menge in \mathbb{R}^n .

Sei $N(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Mengen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.

DEFINITION 14.4.1. Definiere die **untere Box-Dimension** als

$$\underline{\dim}_B(A) := \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

und die **obere Box-Dimension** als

$$\overline{\dim}_B(A) := \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}.$$

Wenn diese Zahlen übereinstimmen, heißt die Zahl die **Box-Dimension** von A :

$$\dim_B(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}.$$

Diese Definition ist schon leichter zu benutzen, erfordert aber immer noch etwas Gehirneinsatz bei der Berechnung von $N(\delta)$. Daher hier eine weitere (äquivalente Definition), die so einfach ist, dass ein Computer sie benutzen kann:

DEFINITION 14.4.2. Die δ -Parkettierung des \mathbb{R}^n ist die Menge

$$P(\delta) := \{[k_1\delta, (k_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [k_n\delta, (k_n + 1)\delta]\},$$

die aus kompakten Würfeln der Kantenlänge δ besteht, welche Eckpunkte auf dem Gitter $\delta \cdot \mathbb{Z}^n$ haben.

Für eine Menge A sei $N_2(\delta)$ die Zahl der Würfel in $P(\delta)$, die A schneiden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_2 .

DEFINITION 14.4.3. Sei $N_3(\delta)$ die minimale Zahl von Würfeln (der Dimension n), welche $A \subset \mathbb{R}^n$ überdecken, nicht notwendigerweise Elemente der Parkettierung $P(\delta)$.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_3 .

DEFINITION 14.4.4. Sei $N_4(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Bällen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.

D.h. $N_4(\delta)$ ist so definiert wie $N(\delta)$, außer dass statt beliebigen offenen Mengen nun Bälle genommen werden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_4 .

THEOREM 14.4.5. Die Box-Dimension, untere und obere Box-Dimension sind unabhängig davon, ob in der Definition N , N_2 , N_3 oder N_4 steht.

BEWEIS. Jede Menge von Durchmesser δ ist enthalten in einem Cluster aus $3 \times \dots \times 3$ Elementen der Parkettierung $P(\delta)$, also ist $N_3 \leq N_2 \leq 3^n N$.

Ein n -dimensionaler Würfel der Kantenlänge 1 kann mit $K(n)$ Bällen von Durchmesser 1 überdeckt werden, wobei die Konstante $K(n)$ nur von n abhängt. Also ist $N \leq K(n)N_3 \leq K(n)N_2$.

Offensichtlich ist auch $N \leq N_3$, da jeder Ball von Durchmesser δ in einen n -Würfel von Durchmesser δ passt.

Weiterhin ist $N = N_4$, da jeder offene Ball von Durchmesser δ eine offene Menge von Durchmesser δ ist und jede offene Menge von Durchmesser δ in einen Ball von Durchmesser δ hineinpasst.

Somit ändert sich N bei Übergang zu N_2, N_3 oder N_4 höchstens um eine (von δ unabhängige) multiplikative Konstante und $\log N$ höchstens um eine additive. Also hat

$$\frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

nach diesem Übergang denselben oberen und unteren Grenzwert. \square

Es gibt noch weitere mögliche Modifikationen: Die Bälle oder Würfel können offen oder abgeschlossen gewählt werden usw. Wir haben bislang genug Definitionen.

Dimensionsberechnung per Computer.

BEMERKUNG 14.4.6. Definition (N_2) ist für maschinelle Auswertung geeignet: Ein Computer kann für endlich viele Werte von δ (z.B. für einen einzigen Wert δ_0) $N_2(\delta)$ bestimmen und somit

$$\frac{\log N(\delta_0)}{-\log \delta_0}$$

als Näherung der Dimension.

Hyperbolische Dynamik

Motivation: Strecken und Stauchen. Beobachtung: Strecken und Stauchen führt zu chaotischem Verhalten (viele periodische Punkte, topologische Transitivität bzw. Mischen) z.B. Arnolds Katzenabbildung auf \mathbb{T}^2 mit

$$Df_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Es gibt „expandierende“ und „kontrahierende“ Richtungen.

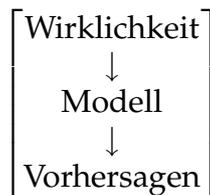
Weiteres Beispiel: G-förmige Hufeisen-Büroklammer mit

$$Df_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Frage: Wie können wir das Konzept „Strecken und Stauchen“ auf Mannigfaltigkeiten übertragen? Antwort: Hyperbolische Dynamik.

Motivation: Präzise Vorhersagen aus unpräzisen Daten. Präzise (beweisbare) Vorhersagen, die aus unpräzisen Berechnungen, ungenauer Modellierung, unzutreffenden Annahmen und ungenauen Daten gewonnen werden.

Das gewöhnliche Prinzip der Vorhersage ist etwa so:



Beispiel: Wetter. (Zeichnung)

Problem: für große t stimmt die Vorhersage nicht mit der Wirklichkeit überein. Deswegen wäre besser: (Zeichnung) Vorhersagen stimmen zwangsläufig, auch wenn die Modellierung und die numerische Simulation fehlerhaft sind.

Tangentialraum, Tangentialbündel.

DEFINITION 15.0.7. Der **Tangentialraum** der Mannigfaltigkeit M am Punkt $p \in M$ ist

$$T_p M := \{\dot{c}(0) \mid c(0) = p\} / \sim$$

mit $c : (-1, 1) \rightarrow M$ oder $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$. (Zeichnung) c muss so sein, dass $h \circ c$ glatt ist; diese Bedingung ist unabhängig von der Karte h . Dabei sei die Äquivalenzrelation \sim definiert durch

$$c \sim \tilde{c} :\Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ c)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ \tilde{c})(t),$$

d.h.

$$(h \circ c)'(0) = (h \circ \tilde{c})'(0).$$

Dies ist ein Vektorraum mit derselben Dimension wie die Mannigfaltigkeit.

Eine **Norm** auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine stetige oder glatte Familie von Abbildungen

$$(\|\cdot\|_p)_{p \in M}, \quad \|\cdot\|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

sodass $\forall p \in M$ gilt: $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $T_p M$.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ heißt C^k (bzw. **glatt**) im Punkt $p \in M$, wenn $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ (eine Abbildung im \mathbb{R}^n) C^k (bzw. glatt) ist für eine (dann jede) Karte h definiert auf einer Umgebung von p und eine Karte \tilde{h} definiert auf einer Umgebung von $f(p)$. (Zeichnung)

Wenn $f : M \rightarrow M$ ist, dann bildet df den Tangentialraum an $p \in M$ ab in den Tangentialraum an $f(p) \in M$. Also:

$$df : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$$

und $df : TM \rightarrow TM$ wobei $TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$.

Analog können wir **Glattheit** bzw. C^k -Eigenschaft von Abbildungen $F : M \rightarrow N$, M, N Mannigfaltigkeiten, definieren.

Anosov-Diffeomorphismen.

DEFINITION 15.0.8. Es sei M kompakte C^1 -Mannigfaltigkeit, $\|\cdot\|$ Norm auf M . Eine Abbildung $f : M \rightarrow M$, welche C^1 -Diffeomorphismus ist, heißt **Anosov-Abbildung** oder Anosov-Diffeomorphismus, wenn gilt:

$$\exists \lambda < 1, C < \infty, \forall p \in M : \exists E_p^u, E_p^s \subset T_p M \text{ mit } T_p M = E_p^u \oplus E_p^s,$$

sodass gilt:

$$\forall v \in E^s \forall n \in \mathbb{N} : \|(df)^n \cdot v\| \leq C \cdot \lambda^n \cdot \|v\|$$

und

$$\forall v \in E^u \forall n \in \mathbb{N} : \|(df)^{-n} \cdot v\| \leq C \cdot \lambda^n \cdot \|v\|$$

wobei $E^u = \dot{\bigcup} E_p^u$ und $E^s = \dot{\bigcup} E_p^s$.

BEMERKUNG 15.0.9. Eine Norm auf M soll stetig in p sein, d.h. $\|\cdot\| : TM \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. (Wir wissen schon, dass $\forall p : \|\cdot\|_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.) (Zeichnung) D.h. wenn c_1, c_2 Kurven auf M sind, mit $(h \circ c_1)'(0)$ nahe an $(h \circ c_2)'(0)$ (im \mathbb{R}^n), dann soll $\|v_1\|$ nahe an $\|v_2\|$ sein für $v_1 = \dot{c}_1(0), v_2 = \dot{c}_2(0)$.

BEISPIEL 15.0.10. Arnolds Katzenabbildung $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ist ein Anosov-Diffeomorphismus: f_A ist stetig, C^1 (sogar C^∞), invertierbar (da A invertierbar und ganzzahlig) und f_A^{-1} ebenfalls C^∞ . Seien $\lambda_1 \in (0, 1), \lambda_2 \in (1, \infty)$ die beiden Eigenwerte von A . Sei $\lambda = \lambda_1$ (oder beliebig in $[\lambda_1, 1)$ und $C = 1$. Zudem sei $E_p^s =$ Eigenraum in λ_1 -Richtung, $E_p^u =$ Eigenraum in λ_2 -Richtung. Dann gilt

$$\forall v \in E^s : \|(df)^n \cdot v\| = \|\lambda_1^n \cdot v\| = \lambda_1^n \|v\|.$$

Außerdem gilt

$$\forall v \in E^u : \|(df)^n \cdot v\| = \|\lambda_2^n \cdot v\| = \lambda_2^n \|v\|,$$

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|(df)^{-n} \cdot v\| = \lambda^{-n} \cdot \|v\| = \lambda^{-n} \|v\|$$

(denn $\lambda = \lambda_2^{-1}$).

Hyperbolische Mengen, hyperbolische Abbildungen. Frage: Wie läßt sich die Definition von Anosov-Diffeomorphismus so verallgemeinern, dass Abbildungen wie die G-förmige Hufeisen-Büroklammer auch erfasst werden?

Antwort: Durch folgende Definition.

DEFINITION 15.0.11. Sei $f : U \rightarrow M$ eine invertierbare C^1 -Abbildung (f^{-1} ebenfalls C^1) auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M . Dann heißt eine f -invariante kompakte Teilmenge von M eine **hyperbolische Menge** für f (bzw. f heißt **hyperbolische Abbildung**), wenn gilt: $T_\Lambda M$ (d.h. Einschränkung von TM auf Punkte $p \in \Lambda$ und davon die Tangentialräume) spaltet sich an jedem Punkt $p \in \Lambda$ auf in

$$TM = E^s \oplus E^u,$$

d.h.

$$\forall p \in M : T_pM = E_p^s \oplus E_p^u,$$

sodass E^s, E^u invariant sind unter df bzw. df^{-1} , d.h. $\forall p \in M$ gilt:

$$df \cdot E_p^s = E_{f(p)}^s$$

und

$$df^{-1} \cdot E_p^u = E_{f^{-1}(p)}^u,$$

und $\exists \lambda < 1, \exists C < \infty$, sodass gilt:

$$\forall v \in E^s \forall n \in \mathbb{N} : \|(df)^n \cdot v\| \leq C \cdot \lambda^n \cdot \|v\|$$

und

$$\forall v \in E^u \forall n \in \mathbb{N} : \|(df)^{-n} \cdot v\| \leq C \cdot \lambda^n \cdot \|v\|.$$

E_p^s soll als Funktion von p stetig sein, ebenso E_p^u . Dazu lässt sich der Abstand $d(E_p^u, E_{\tilde{p}}^u)$ mit der „Hausdorff-Metrik“ definieren: $d(E_p^u, E_{\tilde{p}}^u) := d_H(E_p^u \cap S_1(p), E_{\tilde{p}}^u \cap S_1(\tilde{p}))$, wodurch der Begriff der Stetigkeit für E^s und E^u Sinn macht.

BEISPIEL 15.0.12. Der Cantor-Staub $C \times C$ ist eine hyperbolische Menge für die G-förmige Hufeisen-Büroklammer.

BEMERKUNG 15.0.13. Ein Anosov-Diffeomorphismus ist eine Abbildung $f : M \rightarrow M$, so dass ganz M eine hyperbolische Menge für f ist.

BEMERKUNG 15.0.14. (Stetigkeit von E^s, E^u) Es gilt: E_p^s als Funktion von p ist „stetig“. Jedoch wissen wir noch nicht was das Konzept der Stetigkeit hier bedeutet. Es stellt sich die Frage: In welcher Metrik können wir E_p^s und E_q^s mit $p, q \in M$ vergleichen? Gibt es einen „Abstand von Mengen“?

Idee: (Zeichnung) Wie weit ist ein Punkt $a \in A$ maximal von B entfernt? Wie weit ist ein Punkt $b \in B$ maximal von A entfernt?

DEFINITION 15.0.15. (Hausdorff-Metrik): Sei X kompakter metrische Raum und $A, B \subset X$ kompakte Teilmengen. Wir definieren:

$$\tilde{d}(A, b) = \max_{a \in A} d(a, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b)$$

Sei

$$d_H(A, B) = \max(\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)).$$

d_H heißt der **Hausdorff-Abstand** von A und B .

BEMERKUNG 15.0.16. Dass d_H eine Metrik ist, ist eine Übungsaufgabe. Es gilt:

$$d_H(A, B) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid A \subset \bigcup_{b \in B} B_\varepsilon(b) \text{ und } B \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) \right\}.$$

Mit der Hausdorff-Metrik können wir auch die Mengen E_p^s, E_q^s vergleichen, nachdem wir sie mit einem Einheitsball geschnitten haben: E_p^s hängt stetig von p ab, wenn gilt: Für p genügend nahe an q ist, also wird

$$d_H(\underbrace{E_p^s \cap B_1(0)}_{\subset T_p M}, \underbrace{E_q^s \cap B_1(0)}_{\subset T_q M})$$

beliebig klein.

Alternative Hyperbolizitätsbedingung, Lyapunov-Norm.

THEOREM 15.0.17. *Eine äquivalente Definition von Hyperbolizität ist: \exists Norm auf TM (speziell gewählt), sodass die normale Hyperbolizitätsbedingung mit $C = 1$ gilt; dafür muss die Spaltung $TM = E^s \oplus E^u$ nicht auf Invarianz überprüft werden.*

DEFINITION 15.0.18. Eine solche Norm auf TM heißt **Lyapunov-Norm**.

Expandierende Abbildungen. Bemerkung zur Definition von Hyperbolizität: Die Definition enthält einen Term df^{-1} und funktioniert daher nicht gut bei nicht-invertierbarem f . Aber wenn alle Richtungen expandieren (alle Punkte werden mit etwa $\frac{1}{\lambda}$ gestreckt), dann funktioniert eine ähnliche Definition („expandierende“ Abbildung, s.u.).

DEFINITION 15.0.19. Eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ (nicht notwendigerweise invertierbar) heißt **expandierend**, wenn gilt: $\exists \mu > 1, \varepsilon_0 > 0$ sodass für alle $p, q \in M$ mit $d(p, q) < \varepsilon_0$ gilt:

$$d(f(p), f(q)) \geq \mu d(p, q).$$

Eigenschaften von hyperbolischen Mengen.

THEOREM 15.0.20. *Sei $f : U \rightarrow M, C^1$ und Λ eine hyperbolische Menge für f . Dann gilt:*

E_p^s hängt stetig von p ab (für $p \in \Lambda$),

E_p^u ebenso,

die Dimension von E_p^s ist konstant in p ,

die Dimension von E_p^u ebenso.

BEWEIS. Wenn $p \in \Lambda, v \in E_p^s$, dann gilt bezüglich der Lyapunov-Norm, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|df^n \cdot v\| \leq \lambda^n \|v\|,$$

und diese Bedingung charakterisiert E_p^s . Sei $p_n \rightarrow p_\infty \in M$ eine konvergente Folge. Sei $\{e_1, \dots, e_k\}$ Orthonormalbasis in $E_{p_n}^s$ (eventuell mit von n abhängigen k). Wegen Kompaktheit der Menge von Orthonormalbasen gibt es eine konvergente Teilfolge $\{e_1^n, \dots, e_k^n\}$ (andere Folge als oben, obwohl gleich benannt) in $E_{p_n}^s$. Zu zeigen: $\{\lim e_1^n, \dots, \lim e_k^n\}$ ist Orthonormalbasis von $E_{p_\infty}^s$. Durch Einschränkung auf eine Teilfolge ist k konstant in n . Wegen Stetigkeit von df in p und $\forall v \in E_{p_n}^s$ und

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|df^m \cdot v\| \leq \lambda^m \|v\|$$

folgt, dass auch für $\forall v \in E_{p_\infty}^s$ und $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\|df^m \cdot v\| \leq \lambda^m \|v\|$. Deshalb folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{p_n}^s \subset E_{p_\infty}^s.$$

Analog für E^u (mit df und df^{-1} vertauscht)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{p_n}^u \subset E_{p_\infty}^u.$$

Da die Dimension von $T_p M$ gleich der Summe der Dimensionen von E_p^s und E_p^u ist, muss daher die Dimension von E_p^u und die von E_p^s auch konstant in p sein. \square

Kegelbedingungen für Hyperbolizität.

DEFINITION 15.0.21. Ein **Kegel** im \mathbb{R}^n ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha \cdot A \subset A \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (Zeichnung). Der Kegel K ist **offen**, wenn $\forall p \in K : B_\varepsilon(p) \subset K$.

Es gibt folgende äquivalente Beschreibung von hyperbolischen Mengen:

THEOREM 15.0.22. Λ ist hyperbolische Menge für f genau dann, wenn es Unterräume R_p^u, R_p^s von $T_p M$ gibt (nicht notwendigerweise df -invariant), und $\exists \varepsilon > 0, \mu > 1$, sodass für die ε -Kegel um R^s, R^u (Zeichnung) gilt:

- $df(K_\varepsilon(R^u)) \subset \text{Inneres von } K_\varepsilon(R^u)$
- $df^{-1}(K_\varepsilon(R^s)) \subset \text{Inneres von } K_\varepsilon(R^s)$
- $\forall v \in K_\varepsilon(R^u) : \|df \cdot v\| \geq \mu \|v\|$
- $\forall v \in K_\varepsilon(R^s) : \|df^{-1} \cdot v\| \geq \mu \|v\|$.

Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten. einfaches Modell: lineare Systeme z.B.

$$p \in \mathbb{R}^2, f : p \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix},$$

für $0 < \lambda < 1$. (Zeichnung)

höherdimensionales lineares Modell: z.B.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

für $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3$. (Zeichnung)

THEOREM 15.0.23. *Satz über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten für hyperbolische Abbildungen:* Sei $f : U \rightarrow M$ eine Abbildung, $\Lambda \subset U$ hyperbolische Menge für f , $U \subset M$ offen, $f|_\Lambda$ invertierbar und df, df^{-1} existiert auf Λ und ist stetig. Dann gilt: Für alle Zahlen $\delta > 0 \exists C = C(\delta) < \infty$ und $\forall x \in \Lambda \exists$ „eingebettete Scheibe“ O_x^s sodass O_x^s tangential

HYPERBOLISCHE DYNAMIK

an E_x^s ist und \exists „eingebettete Scheibe“ O_x^u sodass O_x^u tangential an E_x^u für die gilt: Sei $\lambda < 1$ Kontraktionskonstante von f , d.h. für alle $v \in E^s$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^n \cdot v\| \leq \text{const.} \cdot \lambda^n \|v\|$$

und für alle $v \in E^u$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^{-n} \cdot v\| \leq \text{const.} \cdot \lambda^n \|v\|.$$

Dann gilt für alle $y \in O_x^s$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \leq C(\delta) \cdot (\lambda + \delta)^n$$

und für alle $y \in O_x^u$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C(\delta) \cdot (\lambda + \delta)^n.$$

Außerdem gilt:

$$f(O_x^s) \subset O_{f(x)}^s, f^{-1}(O_x^u) \subset O_{f^{-1}(x)}^u$$

und es gilt: $\exists \varepsilon > 0$ mit

$$O_x^s = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$O_x^u = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

DEFINITION 15.0.24. Eine **eingebettete Scheibe** (der Dimension $k \leq m$) in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein homöomorphes Bild des (offenen) k -dimensionalen Einheitsballs unter der Abbildung F , sodass F eine C^1 -Abbildung ist und dF vollen Rang hat.

BEISPIEL 15.0.25. G-förmige Hufeisen-Büroklammer (Zeichnung)

THEOREM 15.0.26. Es gilt: Die Menge

$$W_x^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(O_{f^n(x)}^s)$$

ist unabhängig von $(O_x^s)_{x \in M}$. Die Menge

$$W_x^u = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(O_{f^{-n}(x)}^s)$$

ebenso.

DEFINITION 15.0.27. W_x^s heißt **(globale) stabile Mannigfaltigkeit** für f an $x \in M$. W_x^u heißt **(globale) instabile Mannigfaltigkeit** für f an $x \in M$. O_x^s heißt **lokale stabile Mannigfaltigkeit**, O_x^u heißt **lokale instabile Mannigfaltigkeit**. (Zeichnung)

THEOREM 15.0.28. (Kontraktion/Expansion auf den stabilen Mannigfaltigkeiten): Sei λ Kontraktionskonstante auf einer hyperbolischen Menge Λ für f . Dann gilt: $\forall \delta > 0 \exists C = C(\delta) < \infty \forall x \in \Lambda \forall y \in W_x^s \forall n \in \mathbb{N} :$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq C(\delta) \cdot (\lambda + \delta)^n \cdot d(x, y).$$

Analog für W^u : $\forall x \in \Lambda \forall y \in W_x^u \forall n \in \mathbb{N}$:

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C(\delta) \cdot (\lambda + \delta)^n \cdot d(x, y).$$

BEISPIEL 15.0.29. (für W^s, W^u) Arnold's Katzenabbildung (Zeichnung) Die stabile Mannigfaltigkeit W_x^s ist (für jedes x) dicht im 2-Torus. Ebenso W_x^u .

BEMERKUNG 15.0.30. Es kann Punktepaare $x, y \in M$ geben mit $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow -\infty$ (beides auf einmal). (Zeichnung) Solche „homoklinen Orbits“ sind sehr interessant, da ihre Existenz zu besonders kompliziertem Verhalten der Abbildung führt.

ε -Pseudo-Orbits.

DEFINITION 15.0.31. Ein ε -Orbit oder ε -Pseudorbit ist eine Sequenz x_a, \dots, x_b von Punkten ($a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) in X (metrischer Raum), sodass

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

für alle $i \in \{a, \dots, b\} \subset \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt.
 $a < i < b$

BEMERKUNG 15.0.32. Numerische Verfahren auf Computern mit endlicher Präzision berechnen keine echten Orbits, sondern immer nur ε -Orbits.

DEFINITION 15.0.33. Ein periodisches ε -Orbit ist eine endliche Sequenz x_1, \dots, x_n mit

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad \text{und} \quad d(f(x_n), x_1) < \varepsilon.$$

Beschattung von Orbits. Frage: Was haben (periodische) ε -Orbits mit (periodischen) echten Orbits zu tun? Antworten:

THEOREM 15.0.34. (Anosovs Schließ-„Lemma“): Sei Λ eine hyperbolische Menge einer Abbildung $f : U \rightarrow M$, U offen in U . Dann existieren eine Umgebung V von Λ , $C < \infty, \varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ zu jedem periodischen ε -Orbit x_1, \dots, x_n ein echtes periodisches Orbit (mit derselben Periode) existiert und in einer $C \cdot \varepsilon$ -Umgebung des ε -Orbits liegt. D.h. $\exists y_1, \dots, y_n$ mit $f^i(y_1) = y_{i+1} \forall i \in \{0, n-1\}$ und $f(y_n) = y_1$, und $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$d(x_i, y_i) < C \cdot \varepsilon.$$

BEWEIS. (Skizze): Es gilt (Satz über hyperbolische Abbildungen im \mathbb{R}^n): Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und sei $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ so, dass mit einem $\lambda \in (0, 1)$ gelte:

$$\|A|_{E^s}\| \leq \lambda$$

und

$$\|A^{-1}|_{E^u}\| \leq \lambda.$$

Die Norm einer linearen Abbildung ist hierbei definiert durch

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L \cdot v\|.$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine (nichtlineare) Abbildung mit $F := f - A$ beschränkt mit Lipschitz-Schranke $\text{Lip}(F) < \varepsilon := 1 - \lambda$. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt p nahe 0. Genauer gilt: $\|p\| \leq \frac{\|F(0)\|}{\varepsilon - \text{Lip}(F)}$ (Zeichnung).

Sei x_1, \dots, x_n ein ε -Orbit. Es gilt: Ein Punkt $x \in M$ ist ein periodischer Punkt der Periode n , wenn x Fixpunkt ist von

$$F = \Pi^{-1} \circ \bar{f} : \underbrace{M \times \dots \times M}_{n \text{ Kopien}}$$

mit $\Pi =$ zyklische Permutation

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\Pi} (x_2, \dots, x_n, x_1)$$

und mit

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n)),$$

denn für ein periodisches Orbit x_1, \dots, x_n gilt

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \Pi(x_1, \dots, x_n).$$

Wenn f hyperbolisch ist mit stabilen/instabilen Bündeln E^s, E^u , dann ist auch F hyperbolisch mit =

$$E_{x_1, \dots, x_n}^s \text{ (bezüglich } F) = E_{x_1}^s \times E_{x_2}^s \times \dots \times E_{x_n}^s \text{ (bezüglich } f)$$

und $E_{x_1, \dots, x_n}^u \text{ (bezüglich } F) = E_{x_1}^u \times E_{x_2}^u \times \dots \times E_{x_n}^u \text{ (bezüglich } f)$. F besitzt dieselbe Kontraktionskonstante λ wie f . Da die Linearisierung die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, hat F einen eindeutigen Fixpunkt nahe (x_1, \dots, x_n) . \square

Frage: Funktioniert diese Prinzip („ ε -Orbit \Rightarrow echtes Orbit“) auch ohne Periodizität?

Antwort: Ja, durch folgenden Satz:

THEOREM 15.0.35. (Beschattungs-Lemma): Sei $f : U \rightarrow M, U \subset M$ offen, Abbildung. Sei $\Lambda \subset M$ hyperbolische Menge für f . Dann \exists Umgebung V von Λ , sodass $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0$ sodass jedes ε -Orbit in V ein echtes Orbit in einer δ -Umgebung hat, d.h.: Wenn $A \subset \mathbb{Z}$, $A = \{i | a < i < b \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}\}$ so ist, dass $\forall i \in A$ gilt: $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, dann $\exists y \in M$, so dass das Orbitstück $(y_i)_{i \in A} := (f^i(x))_{i \in A}$ δ -nahe an $(x_i)_{i \in A}$ liegt, nämlich

$$d(x_i, y_i) < \delta.$$

DEFINITION 15.0.36. In diesem Fall sagen wir, dass das Segment $(y_i)_{i \in A}$ das Segment $(x_i)_{i \in A}$ **beschattet**.

Beweisidee: analog zum vorigen Beweis, wobei jetzt mit verschiedenen Tangentialräumen argumentiert werden muss.

BEMERKUNG 15.0.37. Das Beschattungs-Lemma impliziert Anosovs Schließ-Lemma. Denn: Wenn x_1, \dots, x_n periodisches ε -Orbit ist, liefert der Beschattungssatz ein echtes Orbit in dessen Nähe. Dieses ist zunächst nicht periodisch, aber: Wenn wir das periodische ε -Orbit mit expliziter Wiederholung aufschreiben:

$$\underbrace{x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n}_{\text{Wiederholung}}$$

Dann existiert ein echtes Orbit derselben Länge in dessen Nähe. Es gilt (Übungsaufgabe): $f|_\Lambda$ ist expansiv, d.h. $\exists \delta_0 \forall p, q \in \Lambda$ gilt $\exists m \in \mathbb{Z} : d(f^m(p), f^m(q)) > \delta_0$. Daraus folgt die Periodizität des echten Orbits (mit derselben Periode).

Topologische Entropie

Das Wort „Entropie“ bedeutet Unordnung.

Es gibt verschiedene Typen von Entropie:

- topologische Entropie
- maß-theoretische Entropie
- Informationsentropie
- und weitere.

Hier befassen wir uns zunächst mit der topologischen Entropie, da diese mit den von uns bisher studierten topologischen Eigenschaften am zugänglichsten ist.

Wir messen damit die Unvorhersagbarkeit von Orbits, genauer gesagt die Unterscheidbarkeit von Orbits.

Topologische Entropie von Abbildungen.

Bowen-Metrik.

DEFINITION 16.0.38. Sei X kompakter metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ stetig. Auf X definieren wir eine neue Metrik:

$$d_n^f(x, y) := \max_{i \in \{0, 1, \dots, n-1\}} d(f^i(x), f^i(y)).$$

d_n^f heißt **Bowen-Metrik** auf X .

LEMMA 16.0.39. d_n^f ist eine Abstandsfunktion.

BEWEIS. d_n^f erfüllt die 3 Axiome einer Abstandsfunktion:

- $$\begin{aligned} d_n^f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \max_{0 \leq i < n} d(f^i(x), f^i(y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(f^i(x), f^i(y)) = 0 \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$
- Symmetrie folgt aus der Symmetrie jedes einzelnen Termes $d(f^i(x), f^i(y))$

- Die Dreiecksungleichung gilt termweise:

$$\begin{aligned}
 d_n^f(x, y) &= \max_i d(f^i(x), f^i(y)) \\
 &\leq \max_i (d(f^i(x), f^i(z)) + d(f^i(z), f^i(y))) \\
 &\leq \max_i d(f^i(x), f^i(z)) + \max_i d(f^i(z), f^i(y)) \\
 &= d_n^f(x, z) + d_n^f(z, y)
 \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 16.0.40. Offensichtliche Folgerungen sind:

$$d_n^f(x, y) \geq d(x, y),$$

$$m > n \text{ impliziert } d_m^f(x, y) \geq d_n^f(x, y).$$

BEMERKUNG 16.0.41. Statt dem Maximum bis $n - 1$ hätten wir genauso gut das Maximum bis n nehmen können, und alle folgenden Argumente würden genauso funktionieren. Dies wäre auch konsistenter mit der später folgenden Definition von topologischer Entropie für Flüsse. Allerdings ist der Term mit $n - 1$ üblich in der Literatur.

BEMERKUNG 16.0.42. Da die Abstände bezüglich d_n^f größer (oder gleich) sind als die Abstände bezüglich d , sind die ε -Kugeln bezüglich d_n^f **kleiner** (oder gleich) als die ε -Kugeln bezüglich d . D.h.:

$$B_\varepsilon^{d_n^f}(x) \subset B_\varepsilon^d(x).$$

Zählen von Überdeckungen.

DEFINITION 16.0.43. Sei $N_d(f, n, \varepsilon)$ die minimale Zahl von Bällen bezüglich der Metrik d_n^f von Radius ε , die X überdeckt, d.h.

$$N_d(f, n, \varepsilon) := \min \left\{ \#A \mid X \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon^{d_n^f}(a) \right\}.$$

Diese Zahl ist (für festes f, d, ε) monoton wachsend in n . Wir interessieren uns dafür, wie schnell es wächst. Wenn $N_d(f, n, \varepsilon)$ sich mit wachsendem n verhält wie $e^{\alpha n}$, so ist die exponentielle Wachstumsrate gleich α . Diese Größe ermitteln wir wie folgt:

Topologische Entropie als exponentielle Wachstumsrate.

DEFINITION 16.0.44. Sei $h_d(f, \varepsilon)$ die exponentielle Wachstumsrate von $N_d(f, n, \varepsilon)$ in n , d.h.

$$h_d(f, \varepsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_d(f, n, \varepsilon).$$

Diese Größe liegt in $[0, \infty]$ (und ∞ ist zugelassen).

Zuletzt definieren wir

$$h(f) := \lim_{r \rightarrow 0} h_d(f, r).$$

$h(f)$ heißt die **topologische Entropie** von f .

Statt $h(f)$ gibt es auch die häufige Schreibweise

$$h_{\text{top}}(f).$$

BEMERKUNG 16.0.45. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_d(f, \varepsilon)$ existiert in $[0, \infty]$, da $N(f, n, \varepsilon)$ und deshalb auch $h_d(f, \varepsilon)$ monoton in ε ist. Der Wert ∞ für h ist wieder zugelassen.

Beispiele:

- (1) Wenn f eine **Isometrie** ist von X ist, d.h. $\forall x, y \in X$ gilt

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

dann ist $h(f) = 0$. Denn dann ist d_n^f unabhängig von n , deswegen ist auch $\forall \varepsilon > 0 N(f, n, \varepsilon)$ unabhängig von n , also $h_\varepsilon(f) = 0$ und somit $h(f) = 0$.

Insbesondere hat also die Identitätsabbildung immer topologische Entropie 0.

- (2) Sei

$$f : X \rightarrow X, \quad X = \mathbb{T}^1 = S^1 = [0, 1] / \sim, \quad x \mapsto 2x \pmod{1}.$$

Wir berechnen die Entropie von f : Wenn x, y so nahe beieinander liegen, dass $d(x, y) < 2^{-(k+1)}$ gilt, dann gilt für alle $n \leq k$, dass $d_n^f(x, y) = 2^n \cdot d(x, y)$. Um X mit d_n^f -Bällen von Radius ε zu überdecken, benötigen wir mindestens $\lfloor 2^{n-1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ und höchstens $\lceil 2^{n+1} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ Bälle. Also ist

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon) = \lim_n \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2.$$

Die Expansion mit Faktor 2 hat also Entropie $\log 2$.

- (3) Analog hat die die Expansion mit Faktor m die Entropie $\log m$.

Wieso heißt diese Entropie „topologisch“?

BEMERKUNG 16.0.46. In der Definition von h wird die Metrik benutzt. Dennoch heißt h *topologische Entropie* und nicht *metrische Entropie*. Denn wie folgender Satz uns mitteilt, hängt h wirklich nur von der Topologie ab:

THEOREM 16.0.47. Sei d' eine zu d äquivalente Metrik, d.h.

$$\exists c \in (0, \infty) \forall x, y \in X : \frac{1}{c}d(x, y) \leq d'(x, y) \leq cd(x, y).$$

Dann ist

$$\lim_{r \rightarrow 0} h_d(f, r) = \lim_{r \rightarrow 0} h_{d'}(f, r),$$

und die Definition von $h(f)$ hängt nicht davon ab, ob es bezüglich der Metrik d oder der Metrik d' ermittelt wird.

BEWEIS. Es ist jeder Ball bezüglich d mit Radius r enthalten in einem Ball bezüglich d' mit Radius cr . Also ist jede Überdeckung von X mit Bällen bezüglich d mit Radius r und mit Mittelpunkten in der Menge A auch eine Überdeckung von X mit Bällen bezüglich d' mit Radius cr und mit Mittelpunkten in derselben Menge A . Somit gilt

$$N_{d'}(f, n, cr) \leq N_d(f, n, r),$$

folglich

$$h_{d'}(f, cr) \leq h_d(f, r)$$

und damit gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} h_{d'}(f, cr) = \lim_{cr \rightarrow 0} h_{d'}(f, cr) \leq \lim_{r \rightarrow 0} h_d(f, r).$$

Das Argument ist symmetrisch in d, d' . Somit gilt für die Grenzwerte Gleichheit. □

Daraus folgt: Wenn auf einer kompakten Menge X die Metriken d, d' dieselbe Topologie erzeugen, dann ist die topologische Entropie unabhängig davon, ob d oder d' zur Definition verwendet worden ist. Solche Metriken sind (auf kompakten Räumen) uniform äquivalent.

Da die topologische Entropie also (zumindest auf kompakten Räumen) nicht von der Metrik abhängt, ist die Bezeichnung „metrische Entropie“ also nicht allzu sinnvoll. Diese muss noch aus einem anderen Grund sorgfältigst vermieden werden: Es gibt, wie wir später sehen werden, noch den Begriff „maß-theoretische Entropie“. Diese wird in der Literatur gelegentlich „metrische Entropie“ genannt, was zwar erst recht keinen Sinn macht, aber leider nun mal vorkommt, und die maßtheoretische Entropie darf nicht mit der topologischen Entropie verwechselt werden.

Es gilt weiterhin:

THEOREM 16.0.48. Sei $f : X \rightarrow X$ (X kompakt) topologisch konjugiert zu $g : Y \rightarrow Y$, d.h. es gebe einen Homöomorphismus $\Phi : X \rightarrow Y$ mit

$$\Phi \circ f = g \circ \Phi,$$

d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} .$$

Dann haben f und g dieselbe topologische Entropie.

BEWEIS. So ein k erzeugt aus einer Topologie auf X eine auf Y , und sogar aus einer Metrik d auf X eine Metrik \tilde{d} auf Y , definiert durch

$$\tilde{d}(a, b) := d(\Phi^{-1}(a), \Phi^{-1}(b))$$

für $a, b \in Y$. Alle metrischen Topologien sind gleich und somit können wir die topologische Entropie von g bezüglich \tilde{d} berechnen. Dies ist leicht: Die Bilder unter k von d -Bällen von Radius r in X sind genau die \tilde{d} -Bälle von Radius r in Y . Somit sind die Bilder unter k von Überdeckungen von X mit d -Bällen von Radius r genau die Überdeckungen von Y mit \tilde{d} -Bällen von Radius r . Also ist

$$N_d(f, n, r) = N_{\tilde{d}}(g, n, r)$$

und daraus folgt sofort $h(f) = h(g)$. □

Mit diesem Satz können wir nun reichhaltig Kapital schlagen aus unserer Kenntnis von topologischer Konjugation, um topologische Entropieen zu berechnen.

Eigenschaften der topologischen Entropie.

THEOREM 16.0.49. Die topologische Entropie h hat folgende Eigenschaften:

- (1) $h(f) \geq 0$ für alle f .
- (2) $h(f^2) = 2h(f)$, $h(f^3) = 3h(f)$, ...
- (3) Wenn f ein Homöomorphismus ist (d.h. invertierbar), dann gilt $h(f^{-1}) = h(f)$.
- (4) $h(f^m) = |m|h(f)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und bei invertierbarem f für alle $m \in \mathbb{Z}$. (Dies ist die Zusammenfassung der vorherigen drei Zeilen.)
- (5) $h(f \times g) = h(f) + h(g)$.

- (1) Folgt daraus, dass $N(f, n, \varepsilon)$ monoton in n wächst.
- (2) Es gilt:

$$\begin{aligned} d_n^{f^m}(x, y) &= \max \left(d(x, y), d(f^m(x), f^m(y)), \dots, d(f^{m(n-1)}(x), f^{m(n-1)}(y)) \right) \\ &\leq \max \left(d(x, y), d(f^1(x), f^1(y)), \dots, d(f^{m \cdot n-1}(x), f^{m \cdot n-1}(y)) \right) \\ &= d_{m \cdot n}^f(x, y). \end{aligned}$$

Also ist $\forall x \in X, \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon^{d_n^{f^m}}(x) \supset B_\varepsilon^{d_{m \cdot n}^f}(x).$$

und somit $N(f^m, n, \varepsilon) \leq N(f, m \cdot n, \varepsilon)$. Deswegen gilt

$$h(f^m) \leq m \cdot h(f).$$

Umgekehrt enthält jeder Bowen-Ball $B_\varepsilon^{d_n^f}(x)$ einen δ -Ball $B_\delta^d(x)$ mit $\delta = \delta(\varepsilon, n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} B_\delta^{d_n^{f^k}}(x) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-ik}(B_\delta(f^{ik}(x))) \\ &\subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_\varepsilon^{d_k^f}(f^{ik}(x))) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n \cdot k - 1} f^{-ik}(B_\varepsilon^{d_n^f}(x)) \\ &= B_\varepsilon^{d_{k \cdot n}^f}(x) \end{aligned}$$

und daher

$$N(f, k \cdot n, \varepsilon) \leq N(f^k, n, \delta),$$

also

$$k \cdot h_\varepsilon(f) \leq h_\delta(f^k).$$

Damit ist $k \cdot h(f) = h(f^k)$ gezeigt.

Wie das Beispiel $g = f^{-1}$ zeigt, kann $h(f \circ g)$ strikt kleiner sein als $h(f) + h(g)$.

THEOREM 16.0.50. Für $Y \subset X$ f -invariant gilt

$$h(f|_Y) \leq h(f).$$

BEWEIS. Jede Überdeckung von X ist auch eine von Y . Also gilt $N(f, n, \varepsilon) \geq N(f|_Y, n, \varepsilon)$ und deswegen $h_\varepsilon(f) \geq h_\varepsilon(f|_Y)$. \square

THEOREM 16.0.51. Wenn $X = \bigcup_{i=1}^m Y_i$ mit invarianten Mengen Y_i , dann ist

$$h(f) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} h(f|_{Y_i}).$$

BEWEIS.

$$h(f) \geq \max_i h(f|_{Y_i})$$

TOPOLOGISCHE ENTROPIE

folgt aus dem vorigen Satz. Umgekehrt: Sei \mathcal{B}_ε eine Überdeckung von X mit minimal vielen Elementen. Es gilt:

$$N(f, n, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^m N(f|_{Y_i}, n, \varepsilon).$$

Wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon) = \alpha,$$

dann $\exists i$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(f|_{Y_i}, n, \varepsilon) = \alpha.$$

Folglich gibt es ein i mit

$$h(f|_{Y_i}) = h(f).$$

□

Spannende und separierte Mengen. Entropie lässt sich auch wie folgt messen:

LEMMA 16.0.52. (*Entropie mittels separierten Punkten*): Sei $L(f, n, \varepsilon) =$ maximale Anzahl von Punkten in X , die in der d_n^f -Metrik ε -separiert sind (Abstand $\geq \varepsilon$). Dann ist

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L(f, n, \varepsilon).$$

BEWEIS. Es gilt nämlich, dass $\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$: Wenn E eine maximale ε -separierte Menge für d_n^f ist, dann bilden die ε -Bälle um die Punkte in E in der d_n^f -Metrik eine Überdeckung von X . Somit:

$$N(f, n, \varepsilon) \leq L(f, n, \varepsilon).$$

Andererseits: Für so eine Menge E sind die Bälle mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ (um Punkte in E , in der d_n^f -Metrik) disjunkt. Deswegen:

$$N(f, n, \frac{\varepsilon}{2}) \geq L(f, n, \varepsilon).$$

Wegen diesen beiden Ungleichungen gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(f, n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L(f, n, \varepsilon).$$

□

- (1) Wie verhält sich Entropie bei Produkten von Räumen?
(Zeichnung)

DEFINITION 16.0.53. Sei $X = X_1 \times X_2$. Dann ist X metrischer Raum mit der Metrik (**Produktmetrik**)

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2))$$

wobei $d_1 =$ Metrik auf X_1 und $d_2 =$ Metrik auf X_2 .

Wenn $f_1 : X_1 \rightarrow X_2, f_2 : X_2 \rightarrow X_2$ stetige Abbildungen sind, dann ist die **Produktabbildung** $f_1 \times f_2$ definiert durch:

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

THEOREM 16.0.54. Die Entropie der Produktabbildung ist die Summe der Entropien,

$$h(f_1 \times f_2) = h(f_1) + h(f_2).$$

BEWEIS. Wenn \mathcal{B}_1 eine Überdeckung von X_1 ist und \mathcal{B}_2 eine von X_2 ist (mit ε -Bällen), dann ist $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ eine ε -Überdeckung von $X_1 \times X_2$ mit $|\mathcal{B}_1| \cdot |\mathcal{B}_2|$ Elementen. Also gilt

$$N(f_1 \times f_2, n, \varepsilon) \leq N(f_1, n, \varepsilon) \cdot N(f_2, n, \varepsilon)$$

und damit

$$h(f_1 \times f_2) \leq h(f_1) + h(f_2).$$

Umgekehrt: Wenn E_1 und E_2 ε -separiert sind in X_1 und X_2 dann ist $E_1 \times E_2$ auch ε -separiert. Dasselbe gilt für die Bowen-Metrik: Wenn E_1 ε -separiert ist bezüglich $(d_1)_n^f$ und E_2 ε -separiert ist bezüglich $(d_2)_n^f$, dann ist $E_1 \times E_2$ ε -separiert bezüglich d_n^f , wobei d die Produktmetrik aus d_1 und d_2 ist. Also gilt

$$L(f_1 \times f_2, n, \varepsilon) \geq L(f_1, n, \varepsilon) \cdot L(f_2, n, \varepsilon)$$

und es folgt

$$h(f_1 \times f_2) \geq h(f_1) + h(f_2)$$

und damit die Behauptung. □

Topologische Entropie von Flüssen. Für einen Fluss definieren wir die topologische Entropie auf zweierlei Weise:

Zunächst erzeugt jeder Fluss eine Zeit-1-Abbildung, deren topologische Entropie wir verwenden können:

DEFINITION 16.0.55. Sei φ ein C^1 -Fluss auf X . Definiere

$$h(\varphi) := h(\varphi_1).$$

D.h., die topologische Entropie des Flusses φ wird definiert als die topologische Entropie der Zeit-1-Abbildung von φ .

Zweitens können wir die Definition leicht von Abbildungen auf Flüsse übertragen:

DEFINITION 16.0.56. Wir können auf X eine Metrik d_φ^T definieren mittels

$$d_\varphi^T := \max_{t \in [0, T]} d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)).$$

Damit können wir wie bei Abbildungen definieren

$$N_d(\varphi, T, r) := \min \left\{ \#A \mid X \subset \bigcup_{a \in A} B_r^{d_\varphi^T}(a) \right\},$$

$$h_d(\varphi, r) := \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N_d(\varphi, T, r),$$

Zuletzt können wir definieren:

$$h(f) := \lim_{r \rightarrow 0} h_d(\varphi, r).$$

Diese beiden Definitionen stimmen überein.

Maß-theoretische Entropie

Im Folgenden reden wir von Räumen (X, μ) , die ein Maß μ haben. Dieses soll endlich sein, also $\mu(X) < \infty$. Praktisch und keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, $\mu(X) = 1$ anzunehmen.

Motivation des Begriffes „Information“. Als Motivation überlegen wir uns Folgendes: Wenn wir über ein zufälliges Ereignis im Voraus wissen, dass es mit Wahrscheinlichkeit p eintritt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ nicht, und wir im Nachhinein die Nachricht erhalten, dass es eingetreten ist, wieviel neue „Information“ haben wir durch diese Nachricht gewonnen? Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es an einem gegebenen Werktag in mindestens einem Supermarkt etwas zu kaufen gibt, fast 1; die Nachricht, dass es an einem bestimmten solchen Tag irgendwo etwas zu kaufen gab, enthält somit sehr wenig neue Information. Dagegen wäre die Nachricht, dass es an einem bestimmten Werktag in keinem einzigen Supermarkt etwas zu kaufen gab, sehr überraschend und würde sehr viel Information übermitteln. Es soll also gelten: Information ist eine Funktion der Wahrscheinlichkeit, und zwar eine monoton fallende, also

$$I = I(p)$$

und

$$\lim_{p \rightarrow 1} I(p) = 0.$$

Weiterhin ist sinnvoll zu fordern, dass für zwei unabhängige Ereignisse die Information, dass beide eingetreten sind, gleich ist der Information, dass das eine eingetreten ist plus die Information, dass das andere eingetreten ist, also

$$I(p \cdot q) = I(p) + I(q).$$

Es gibt (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) eine einzige solche Funktion: Einen Logarithmus.

DEFINITION 17.0.57. Sei $p \in [0, 1]$. Dann ist die **Information** von p gegeben durch

$$I(p) := -\log p \in [0, \infty].$$

Bits.

BEMERKUNG 17.0.58. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Basis von \log festzulegen. Praktisch nützlich sind die Basen 2 und e ; mit e lässt sich ein wenig leichter differenzieren, aber um praktische Beispiele anzugeben, ist die Basis e unbrauchbar und 2 sehr gut zu handhaben. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, verfahren wir so:

DEFINITION 17.0.59. Wir definieren die Einheit **bit** durch

$$bit := \log_b 2,$$

mit un spezifizierter Basis b des Logarithmus. Dies ist eine Funktion von b , und nur nach Wahl von b eine Konstante.

Dann können wir Information immer in der Einheit *bit* angeben, und es kommt exakt derselbe Zahlenwert heraus, unabhängig von der Basis. Das wort *bit* steht für „binary unit“. Dieser Begriff ist uns natürlich aus der Computertechnik bekannt.

BEMERKUNG 17.0.60. Natürlich kann eine Information beliebig kleine Werte annehmen, insbesondere weniger als ein *bit* sein. Beispiele gibt es im täglichen Leben zuhauf.

Partitionen eines Maßraums.

DEFINITION 17.0.61. Sei (X, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. Eine **endliche Partition** von X ist eine Menge $P = \{C_1, \dots, C_n\}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$ und die C_i disjunkte Elemente der σ -Algebra. Hierbei ist unsere Notation grundsätzlich (ohne dass wir es noch sagen) **mod 0**, das heißt, gilt bis auf Nullmengen. Wir sagen also $A = B$ für $A, B \subset X$ wenn gilt $\mu(A \Delta B) = 0$; hierbei ist

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die **symmetrische Differenz** der Mengen A und B . Wir nennen A und B disjunkt, wenn $\mu(A \cap B) = 0$ gilt. Wir setzen auch stillschweigend voraus, dass alle Mengen, die wir betrachten, messbar sind.

Information und Entropie einer Partition.

DEFINITION 17.0.62. Sei nun P eine endliche Partition von X . Dann ist die **Information** auf X bezüglich P definiert als

$$I_P : X \rightarrow [0, \infty]$$

$$I_P(x) := -\log \mu(C), \quad \text{wobei } x \in C \in P.$$

Der Mittelwert der Information heißt **Entropie** und wird mit H bezeichnet:

$$H(P) := \int I_P d\mu = \int_{x \in X} I_P(x) d\mu(x).$$

Es gilt sicherlich: Wenn wir die Partition weiter unterteilen, wird die Information $I(x)$ größer oder bleibt gleich (je nachdem, wo x in der Partition liegt).

Verfeinerungen und maß-theoretische Entropie.

DEFINITION 17.0.63. Eine Partition Q heißt **Verfeinerung** der Partition P , geschrieben

$$P \leq Q \quad (\text{oder } Q \geq P),$$

wenn jedes Element $D \in Q$ enthalten ist in einem Element $C \in P$. Äquivalent dazu ist, dass alle Elemente $C \in P$ Vereinigungen sind von Elementen $D_1 \cup \dots \cup D_k \in Q$. Wir sagen auch, die Partition Q ist **größer** als P . Auch: P ist kleiner als Q . Ebenfalls: P ist größer als Q .

BEMERKUNG 17.0.64. Eine besondere Fußangel hält die deutsche Sprache hier für uns parat: „größer“ klingt ähnlich wie „größer“, das eine bedeutet aber die Umkehrung des anderen. Ebenso mit „feiner“ und „kleiner“.

BEMERKUNG 17.0.65. Die Relation \geq auf Partitionen ist keine Halbordnung; im allgemeinen gilt weder $P \geq Q$ noch $Q \geq P$. Folglich ist es auch falsch, $P \geq Q$ auszusprechen als „ P ist nicht kleiner als Q “.

DEFINITION 17.0.66. Seien $P = \{C_1, \dots, C_n\}$ und $Q = \{D_1, \dots, D_m\}$ endliche Partitionen von X . Dann heißt

$$P \vee Q := \{C_i \cap D_j \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$$

die **gemeinsame Verfeinerung** der Partitionen P und Q .

DEFINITION 17.0.67. Sei P eine endliche Partition von X und $T : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ eine maßerhaltende Abbildung. Dann bezeichnet

$$P^n := P \vee T^{-1}(P) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(P)$$

die **n -te Verfeinerung** von P unter T .

Die **maß-theoretische Entropie** der Transformation $T : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ bezüglich der Partition P ist gegeben durch

$$h_\mu(f, P) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(P^n).$$

Die **maß-theoretische Entropie** der Transformation $T : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ ist gegeben durch

$$h_\mu(f) := \sup \{h_\mu(f, P) \mid P \text{ endliche Partition von } X\}.$$

Attraktoren

Definition(en) und elementare Eigenschaften. Wir kennen bereits attraktive Fixpunkte (z.B. von Kontraktionen). So ein Fixpunkt verdient sicherlich den Namen „Attraktor“: alle Punkte einer Umgebung konvergieren gegen diesen. Das gleiche gilt für attraktive periodische Orbits eines Flusses; z.B. hat die Differentialgleichung

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = 1$$

einen für alle Zeiten definierten Lösungsfluss und alle Orbits außer 0 konvergieren gegen das Orbit $r(t) = 1, \theta(t) = t + \text{const.}$

DEFINITION 18.0.68. Ein **Attraktor** einer Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist eine Teilmenge A von X , für die gilt:

- (1) $f(A) \subset A$,
- (2) Es gibt eine offene Umgebung U von A , für die gilt: $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^i(U)$,
- (3) A hat keine echten Teilmengen, die die beiden vorigen Axiome auch erfüllen.

DEFINITION 18.0.69. Ein **Attraktor** von einem Fluss φ auf X ist eine Teilmenge A von X , für die gilt:

- (1) $\varphi_t(A) \subset A \quad \forall t \geq 0$,
- (2) Es gibt eine offene Umgebung U von A , für die gilt: $A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U)$,
- (3) A hat keine echten Teilmengen, die die beiden vorigen Axiome auch erfüllen.

Grund für die Forderung (3) ist, dass ohne diese Forderung z.B. für das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned}$$

welches attraktive Fixpunkte bei $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ und einem Sattel bei $(0, 0)$ hat, die Menge $[-1, 1] \times \{0\}$ auch ein Attraktor wäre. Aber fast alle Punkte in einer Umgebung dieser Menge konvergieren in Wirklichkeit gegen $(-1, 0)$ oder $(1, 0)$.

Oft wird noch gefordert:

(4) A ist kompakt.

DEFINITION 18.0.70. Ein Attraktor heißt **hyperbolisch**, wenn er eine hyperbolische Menge ist, d.h. für alle $a \in A$ gilt $T_a A = E^s \oplus E^u$ für eine Abbildung bzw. $T_a A = E^s \oplus E^u \oplus Z$ für einen Fluss φ , wobei $Z = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(a)$.

DEFINITION 18.0.71. Ein Attraktor heißt **chaotisch**, wenn $f|_A$ bzw. $\varphi|_A$ chaotisch ist, d.h. topologisch transitiv und mit dichten periodischen Orbits.

Welche Mengen kommen als Attraktor in Frage? Wie das folgende Beispiel zeigt, ziemlich viele:

BEISPIEL 18.0.72. Sei $f : X \rightarrow X$ topologisch transitiv. Dann ist $X = X \times \{0\}$ ein Attraktor der Abbildung g auf der Menge $Y = X \times [-1, 1]$, definiert durch

$$g(x, s) = (f(x), s/2).$$

Analoges gilt für einen Fluss φ , der auf X topologisch transitiv ist; auf der Menge $Y = X \times [-1, 1]$ hat der Fluss ψ , der durch $\psi_t(x, s) := (\varphi_t(x), se^{-t})$ definiert ist, die Menge $X \times \{0\}$ als Attraktor.

BEISPIEL 18.0.73. Die **Smale-Spule** ist der Attraktor der Abbildung f auf dem Volltorus $T = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq 1\} \times S^1$, definiert durch

$$f((x, y, \theta)) = \left(\frac{1}{5}x, \frac{1}{5}y, 2\theta \right) + \frac{1}{5}(\sin \theta, \cos \theta, 0).$$

f wickelt den Torus zweimal in sich selbst auf. Der Attraktor ist auf jedem Schnitt $\theta = \text{const}$ gleich einer Cantormenge.

BEISPIEL 18.0.74. Das **Lorenz-System** ist das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Es wurde von E. Lorenz aufgestellt als ein simples Modell des Wetters. Besonders interessierte er sich für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

BEISPIEL 18.0.75. Rössler

BEISPIEL 18.0.76. Das **Ikeda-System**

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f(z) = c_1 + c_2 \exp \left(i \left(c_3 - \frac{c_4}{1 + |z|^2} \right) \right)$$

ist ein Modell für eine optische Zelle; eine solche ist wichtiger Bestandteil eines *optischen Computers*. Numerisch sehen wir einen Attraktor, dessen Form von den Parametern abhängt.

Bifurkationen.

Krisen von Attraktoren.

BEISPIEL 18.0.77. Wenn wir im Ikeda-System

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$
$$f(z) = c_1 + c_2 \exp \left(i \left(c_3 - \frac{c_4}{1 + |z|^2} \right) \right)$$

die ersten 3 Parameter festsetzen auf $c_1 = 0.84, c_2 = 0.9, c_3 = 0.4$ und den 4. Parameter c_4 variieren lassen zwischen $c_4 = 7.1$ und $c_4 = 7.3$, so stellen wir fest, dass der Attraktor nicht stetig von c_4 abhängt, sondern bei einem bestimmten kritischen Wert $c_4 \approx 7.24$ plötzlich explosionsartig größer wird.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Hasselblatt + A. Katok.: *A First Course in Dynamics. With a panorama of recent developments.* Cambridge University Press
- [2] M. Denker: *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme.* Springer Verlag
- [3] A. Katok + B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press
- [4] D. K. Arrowsmith + C. M. Place: *Introduction to dynamical systems.*
(Deutsche Übersetzung: *Dynamische Systeme. Mathematische Grundlagen. Übungen.* Spektrum Verlag. Die englische Version ist besser.)
- [5] M. Pollicott + M. Yuri: *Dynamical systems and ergodic theory.* Cambridge University Press
- [6] H. Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Walter de Gruyter Verlag
- [7] V. I. Arnold: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer Verlag
- [8] P. Blanchard + R. L. Devaney + G. R. Hall: *Differential Equations.* PWS Publishing Company
- [9] E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems,* 2nd edition. Cambridge University Press
- [10] K. Jänich: *Vektoranalysis.* Springer Verlag
- [11] Y. A. Pesin: *Dimension theory in dynamical systems: contemporary view and applications.* Chicago Lectures in Mathematics

Index

- α -Limesmenge, 23
- Anfangswertproblems, 4
- angepasste Metrik, 13
- Anosov-Diffeomorphismus, 66
- Anosovs Schließ-„Lemma“, 72
- äquivalent (Metriken), 12
- Arnold'sche Katzenabbildung, 31
- Attraktor, 89
- Aufspalten von Lösungen, 8
- autonome Differentialgleichung, 6
- $A\Delta B$ (symmetrische Differenz), 86

- Büroklammer, 53
- Basis von \log , 86
- Begradigungssatz, 51
- beschattet, 73
- Beschattungs-Lemma, 73
- Beschleunigung, 35
- beweisbare Vorhersagen, 65
- bi-invariant, 53
- binary unit, 86
- bit, 86
- Bowen-Metrik, 75
- Box-Dimension, 62
 - Berechnung per Computer, 62

- C^0 -Orbit-äquivalent, 50
- C^0 -konjugiert
 - Abbildungen, 49
 - Flüsse, 49
- C^1 -Norm, 11
- C^j -Orbit-Äquivalenz, 50
- C^j -konjugiert
 - Abbildungen, 49
 - Flüsse, 49
- C^k -Kurve, 43
- Cantor-Staub, 54
- Cantormenge, 53
- chaotisch, 56
- chaotischer Attraktor, 90
- Charatheodory-Dimension, 60

- Computer, 86
 - Dimensionsberechnung, 63
 - numerische Verfahren, 72
 - optischer, 91

- d -dimensionales Hausdorff-Maß, 61
- d_n^f (Bowen-Metrik), 75
- DGL höherer Ordnung, 18
- dichte Menge, 25
- Diffeomorphismus, 43
- differenzierbare Mannigfaltigkeiten,
 - 41
- Differenzierbarkeit (Abbildung auf Mannigfaltigkeiten), 43
- \dim_S (Selbstähnlichkeitsdimension), 59
- \dim_B (Box-Dimension), 62
- \dim_H (Hausdorff-Dimension), 61
- Dimension, 59
 - Berechnung per Computer, 62
 - Box-Dimension, 62
 - obere, 62
 - untere, 62
 - einer Mannigfaltigkeit, 42
 - Hausdorff-Dimension, 61
- Divergenz, 22
- Divergieren von Lösungen „nach ∞ “ in endlicher Zeit, 8
- Dynamik von Liebesaffären, 19

- E^s (stabile Menge einer linearen Abbildung), 16
- E^s (stabiles Bündel an einer hyp. Menge), 67
- E^u (instabile Menge einer linearen Abbildung), 16
- E^u (instabiles Bündel an einer hyp. Menge), 67
- E_p^s (stabile Richtung einer hyp. Menge), 67

- E_p^u (instabile Richtung einer hyp. Menge), 67
 ε -Pseudorbit, 72
 ε -Orbit, 72
 eingebettete Scheibe, 71
 einseitige Sequenzen, 57
 einseitiger Symbolraum, 57
 Entropie einer Partition, 86
 Euler-Lagrange-Gleichung, 36
 Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen, 5
 Existenzintervall, maximales, 5
 expandierend, 69
 Expansion, 77
 exponentielle Wachstumsrate, 76
- f^k (k -fache Iteration), 3
 Fixpunkt, 3
 flow-box, 51
 Fluss, 3
 Flusskurven, 8
 Fortsetzbarkeit von Lösungen, 5
 Fourier-Reihe, 28
 Fraktal, 59
 Funktional, 37
- G-förmige Hufeisen-Büroklammer, 53
 gemeinsame Verfeinerung, 87
 Gesamtenergie, 36
 Gitter, 31
 glatte Abbildung, 43
 glatte Mannigfaltigkeit, 42
 globale Fortsetzbarkeit, 5
 globale instabile Mannigfaltigkeit, 71
 globale stabile Mannigfaltigkeit, 71
 globaler transversaler Schnitt, 45
 größer (Partition), 87
- $h^d(A)$ (d -dimensionales Hausdorff-Maß), 61
 $h(f)$ (topologische Entropie), 77
 $h_d(f, \varepsilon)$ (topologische Entropie), 77
 $H(P)$ (Entropie einer Partition), 86
 $h_\mu(f)$ (maß-theoretische Entropie), 87
- Hamilton'sche System, 38
 Hamilton-Funktion, 38
 Hamilton-Systeme, 38
 Harmonischer Oszillator, 18
 Hausdorff-Abstand, 68
 Hausdorff-Dimension, 61
- Hausdorff-Eigenschaft, 41
 Hausdorff-Maß, 61
 Hausdorff-Metrik, 68
 Hausdorff-Raum, 41
 homöomorph, 54
 Homöomorphismus, 43
 homoklines Orbit, 36, 72
 Hufeisen, 53
 hyperbolischer Attraktor, 90
 hyperbolische Abbildung, 67
 hyperbolische Abbildungen auf dem Torus, 30
 hyperbolische Matrix, 16
 hyperbolische Menge einer Abbildung, 67
- Ikeda-System, 90
 Information, 85, 86
 Informationsentropie, 75
 instabile Mannigfaltigkeit, 71
 instabile Menge
 einer linearen Abbildung, 16
 invariant (Funktion), 28
 invariant (Maß), 22
 invariant (Menge), 27
 invariante Abbildung, 53
 invariante Menge, 53
 irgendwann kontrahierend, 12
 irrational (Torus-Translation), 25
 Isometrie, 77
 Iteration, 3
- Jacobi-Determinante, 22
 Jordan-Block, 17
- Karte, 42
 Kartenumgebung, 42
 Kartenwechsel, 42
 Katzenabbildung von Arnold, 31
 Kegel, 70
 Kegelbedingungen, 70
 kinetische Energie, 36
 klassische Mechanik, 35
 Klein'sche Flasche, 48
 kleiner (Partition), 87
 Konjugation, 49
 Kontraktion, 11
 Kontraktionssatz, 11
 Kraft, 35
 Kreuzungen, 8
 Krisen von Attraktoren, 91
 kritischer Punkt, 37
- Lösung, 4

INDEX

- Lösungskurve, 4
- Lagrange-Funktion, 36
- Lagrange-Gleichung, 36
- Langzeitverhalten, 7
- Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n , 21
- Liebesaffären, 19
- lineare Flüsse, 17
- linearer Translationsfluss, 29
- lokale instabile Mannigfaltigkeit, 71
- lokale stabile Mannigfaltigkeit, 71
- Lorenz-System, 90
- Lyapunov-Metrik, 13
- Lyapunov-Norm, 15, 69

- mu* (Maß), 21
- Möbiusband, 48
- Maß, 21
- maß-theoretische Entropie, 75, 87
- maßerhaltend, 21
- maßerhaltend (Abbildung), 22
- Maßerhaltende Systeme, 21
- Mannigfaltigkeiten, 41
- Massepunkt, 35
- maximales Existenzintervall, 5
- Menger-Schwamm, 60
- metrischer Raum, 11
- minimal, 26
- minimale Periode, 3, 9
- mod 0, 86
- Modellierung, 19

- $N_d(f, n, \varepsilon)$, 76
- n -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit, 42
- negativ invariant, 53
- negativ rekurrent, 23
- Newton-Gleichung, 36
- Newton-Systeme, 35
- Norm (auf Mannigfaltigkeit), 66
- numerische Simulation, 65
- numerische Verfahren, 72

- obere Box-Dimension, 62
- optischer Computer, 91
- Orbit, 3
- Orbit-äquivalent, 50
- Orbit-Äquivalenz, 49
- Ordnungs-Reduktion einer DGL, 18

- Parameterabhängigkeit
 - Attraktor, 91
 - Fixpunkt einer Kontraktion, 12
- Parkettierung, 62

- Partition, 86
- Periode, 3, 8, 9
- periodisch, 3
- periodischer Punkt, 8, 9
- periodisches ε -Orbit, 72
- Phasenportrait, 8
- Phasenraum, 35
- Phasenraumvolumen, 35
- Physikalische Systeme, 35
- Poincaré-Abbildungen, 45
- Poincaré-Rekurrenz, 22
- positiv invariant, 53
- positiv rekurrent, 23
- Potential, 36
- Potentialenergie, 36
- Potentialfeld, 36
- prä-periodisch, 31
- Präzise (beweisbare) Vorhersagen, 65
- Produktabbildung, 82
- Produktmetrik, 82

- rational (Torus-Translation), 25
- rational unabhängig, 26
- Reduktion einer DGL auf erste Ordnung, 18
- rekurrent, 23
- Rekurrenz, 22
- Romeo und Julia, 19

- σ -Algebra, 21
- Schnitt, 45
- Selbstähnlichkeits-Dimension, 59
- Semiorbit, 3
- ε -separierte Punkte, 81
- separierte Menge, 81
- Sequenzen, 57
- Shift, 57
- Shift-Operator, 57
- Sierpinski-Dreieck, 60
- Sierpinski-Teppich, 60
- Simulation, 65
- Smale-Spule, 90
- ε -spannende Menge, 81
- spannende Menge, 81
- Sphäre, 41
- stabile Mannigfaltigkeit, 71
- stabile Menge
 - einer linearen Abbildung, 16
- stabiles/instabiles Bündel, 73
- Standard-Cantormenge, 53
- stereographische Projektion, 42
- Strecken und Stauchen, 65

- Symbolräume, 57
symmetrische Differenz, 86
- Tangentialraum, 43, 65
theoretische Mechanik, 35
Topologie, 41
topologisch konjugiert
 Abbildungen, 49
 Flüsse, 49
topologisch mischend, 56
topologisch transitiv, 25, 56
topologische Entropie, 75, 77
Topologische Entropie von Flüssen,
 82
topologische Mannigfaltigkeit, 42
topologischer Raum, 41
Torus, 25
Translationen auf dem Torus, 25
Translationsvektor, 25
transversaler Schnitt, 45
- $\dot{u} = u^2$, 8
 $\dot{u} = u^{\frac{2}{3}}$, 8
uniform äquivalente Metriken, 12
Unordnung, 75
untere Box-Dimension, 62
Unterscheidbarkeit von Orbits, 75
- Variation, 37
Variationsmethoden, 36
Vektorfeld-Diagramm, 8
Verfeinerung, 87
Verhalten von Lösungen, 6
vol (Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n), 21
Volumen, 21
volumenerhaltend (Fluss), 22
Vorhersage, 65
- Wachstumsrate, 76
Wetter, 65
Wiederkehrzeit, 45
- Zählen von Gitterpunkten, 32
Zeit- t -Abbildung, 4
zweiseitige Sequenzen, 57
zweiseitiger Symbolraum, 57
zweites Abzählbarkeitsaxiom, 41
 ω -Limesmenge, 23

INDEX
