(.5.2/3.3) Lokale Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten die Gleichung:

~~$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(u,t)$ in~~

$$(NC)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} + Ax = f(x,t) & \text{in } (t_0, \infty) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

mit A sektorell auf X, $A_1 = A + a$, $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ entsprechend ~~alle~~ für $\alpha \geq 0$, mit $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$.

Bezüglich der Abbildung f machen wir die Annahmen:

(i) $f: \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to X$, mit $\mathcal{U} \subset X^\alpha$ offen für ein $\alpha \in [0,1)$,

(ii) f lokal Hölderstetig in t auf $\mathbb{R}$,

(iii) f lokal Lipschitz-stetig in x auf $\mathcal{U}$.

D.h. für $(x_0, t_0) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ gibt es eine Umgebung V mit:

$$\| f(x,t) - f(y,s) \| \leq L \left(|t-s|^\vartheta + \|x-y\|_\alpha \right)$$

für alle $(x,t), (y,s) \in V$, und für gewisse Konstanten $L > 0$, $\vartheta > 0$.

Damit kommen wir zu einer Definition, einer Lösung des Anfangwertproblems (NC):

<u>Definition.</u> Eine Lösung des Anfangwertproblems (NC) ist eine Abbildung $x : [t_0, t_0 + T) \to X$, $(T > 0)$ mit den Eigenschaften:

(i) x ist stetig

(ii) $x(t_0) = x_0$

(iii) Es ist $x(t) \in U$ für alle $t \in (t_0, t_0+T)$
$x(t) \in D(A)$, $\frac{dx}{dt}$ existiert
und $t \mapsto f(x(t), t)$ ist lokal Hölder-stetig für alle $t \in (t_0, t_0+T)$.

(iv) Es gibt ein $\tau > 0$ mit:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \| f(t, x(t)) \| \, dt < \infty$$

(v) schließlich x ~~genügt~~ erfüllt die Gleichung (NC) auf (t_0, t_0+T).

Im nächsten Lemma beweisen wir zunächst nicht die Existenz einer Lösung, ~~aber~~ zeigen aber die Eindeutigkeit.

Lemma (3,3,2) 1. Sei x eine Lösung der Gleichung (NC) in (t_0, t_1) mit $t_1 = t_0 + T$ für ein $T > 0$. Dann gilt:

$$(*) \qquad x(t) = e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(x(s), s)\, ds.$$

~~Sei umgekehrt x eine Lösung der (NC) und gelte~~

Umgekehrt: sei x stetig auf (t_0, t_1) (nach X^α), und gelte:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \| f(x(t), t) \| \, dt < \infty \text{ für ein } \tau > 0.$$

Die Integralgleichung $(*)$ sei erfüllt in (t_0, t_1), dann ~~gilt~~ ist x eine Lösung der (NC).

Beweis. Ist x eine Lösung, so folgt:

$$\frac{dx}{dt}(t) + A x(t) = f(x(t), t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt}(t) + A x(t) = g(t - t_0)$$

mit $g(t) := f(x(t), t)$. Dann ist nach Annahme g ~~Hölder~~ lokal Hölder stetig, $\int_0^\tau \| g(t) \| dt < 0$ und wie im linearen Fall, erhalten wir die behauptete

Integraldarstellung (*).

~~Gleichen~~ Erfülle nun x die Integral~~darstellung~~gleichung (*)

~~für x erfüllt~~

für $\forall\, t \in (t_0, t_1)$, $x \in \mathcal{C}^0((t_0,t_1); X^\alpha)$.

Wir zeigen: x ist lokal Hölder-stetig. Für $t_0 < t < t+h < t_1$ gilt:

$$x(t+h) - x(t) = \left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) e^{-A(t-s)} f(x(s),s)\, ds + \int_{t}^{t+h} e^{-A(t+h-s)} f(x(s),s)\, ds .$$

Sei $0 < \delta < 1-\alpha$, dann gilt:

$$\left\| \left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) e^{-A(t-s)} z \right\|_\alpha = \left\| \left(e^{-Ah} - \mathbb{I}\right) A^\alpha e^{-A(t-s)} z \right\|$$

$$\leq \frac{C_{1-\delta}}{\delta} h^\delta \left\| A^{\delta+\alpha} e^{-A(t-s)} z \right\|$$

$$\leq \frac{C}{\delta} h^\delta \|z\| (t-s)^{-(\delta+\alpha)} e^{-a(t-s)}$$

Damit folgt:

$$\|x(t+h) - x(t)\|_\alpha \leq \frac{C}{\delta} \|x_0\| (t-t_0)^{-(\alpha+\delta)} h^\delta + h^\delta \frac{C}{\delta} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\alpha+\delta)} \|f(x(s),s)\|\, ds + C' \int_{t}^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} \|f(x(s),s)\|\, ds$$

$$\leq \hat{C}\, h^{\delta} + \frac{C''}{\delta} h^{\delta} \underbrace{\max_{s \in [t_0^*, t_1^*]} \| f(x(s), s) \|}_{=: M_f} \frac{(t_1 - t_0)}{1 - (\alpha + \delta)}$$

$$\frac{M_f\, C'}{1 - \alpha}\, h^{1-\alpha}$$

$$\underline{\underline{\leq \hat{C}\, h^{\delta}}} \qquad \forall\ [t_0^*, t_1^*] \subset (t_0, t_1)$$

$$\text{mit } (t_0 < t_0^* \leq t < t+h \leq t_1^* < t_1).$$

Daher gilt $t \mapsto f(x(t), t)$ lokal Hölder-stetig

$$\big(\| f(x(t), t) - f(x(s), s) \| \big)$$

$$\leq L \big(\| x(t) - x(s) \|_{\alpha} + |t-s|^{\vartheta} \big)$$

$$\leq L \big(|t-s|^{\delta} + |t-s|^{\vartheta} \big)$$

$$\leq L |t-s|^{\gamma} \qquad \text{mit etwa } \gamma = \min\{\vartheta, \delta\}$$

für eine entsprechend kleine Umgebung.

Nach Theorem 3.2.2. ist dann $x(t)$ Lösung der Gleichung:

$$\frac{dy}{dt}(t) + A y(t) = f(x(t), t),$$

insbesondere folgt $x(t)$ ist eine Lösung von (NC). □

Theorem 3,3,3. Sei A sektorell auf X, $U \subset X^\alpha \times \mathbb{R}$ offen für ein $\alpha \in [0,1)$ und $f : U \to X$ sei lokal Hölder stetig in t, und lokal Lipschitz in $x \in U$.
Dann existiert zu jedem $(x_0, t_0) \in U$, eine Lösung der Gleichung (NC) zum Anfangswert $x(t_0)=x_0$ auf (t_0, t_0+T) für ein $T \equiv T(x_0, t_0)$.

Beweis. Zu $(x_0, t_0) \in U$ wähle $\delta, \tau > 0$, so dass:

$$V := \{(t,x) \mid t_0 \leq t \leq t_0+\tau, \|x-x_0\|_\alpha \leq \delta\}$$

in U enthalten ist, und dass:

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq L \|x_1 - x_2\|_\alpha$$

für alle $(x_1,t),(x_2,t) \in V$ gillt.

Setze
$$B := \max_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \|f(x_0,t)\|$$
und wähle $T > 0$, so dass:

$\forall h \in [t_0,t_1]:$ $t_1 := t_0+T$
$$\|(e^{-Ah} - \mathbb{I})x_0\|_\alpha = \|A_1^\alpha(e^{-Ah} - \mathbb{I})x_0\|$$
$$\leq C h \|A_1^\alpha x_0\| = C h \underbrace{\|x_0\|_\alpha}_{\in X^\alpha} \leq \delta/2,$$

und:

$$M(B+\delta L)\int_0^T u^{-\alpha}e^{-au}\,du \leq M(B+\delta L)T^{1-\alpha} \leq \delta/2$$

gilt. Dabei ist:

$$\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq M t^{-\alpha} e^{-at} \quad \text{für } t>0$$

$$\Big(\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq \|A_1 e^{-At}\|^\alpha \|e^{-At}\|^{1-\alpha} \leq C t^{-\alpha} e^{-at\alpha} e^{-at(1-\alpha)} \Big).$$

Wir setzen:

$$S := \Big\{ y \in \mathcal{C}([t_0, t_0+T]; X^\alpha) \,\Big|\, \|y(t)-x_0\|_\alpha \leq \delta \ \forall t \in [t_0, t_0+T] \Big\}$$

und betrachten den ~~Banach Raum~~ ~~$(C, \|\cdot\|_{[t_0,t_0+T]})$~~ vollständigen metrischen Raum S mit der Metrik: $d_S(x,y) = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+T]} \|x(t)-y(t)\|_\alpha$.

Wir definieren nun:

$$G(y)(t) := e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(y(s),s)\,ds$$

und zeigen:

$G: S \to S$, G eine strikte Kontraktion.

Zunächst gilt:

$$\|G(y)(t) - x_0\|_\alpha = \|(e^{-A(t-t_0)} - \mathbb{I})x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} f(y(s),s)\,ds\|_\alpha$$

$$\leq \| (e^{-A(t-t_0)} - \mathbb{I}) x_0 \|_\alpha$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \| \, \| f(y(s), s) - f(x_0, s) \|$$

$$\leq \delta/2 + M(B + \delta L) \int_0^{T+B} u^{-\alpha} e^{-au} \, du \leq \delta, \ \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\Rightarrow \ \mathcal{G} : S \to S$. Man sieht auch $\mathcal{G}(y)$ ist stetig von $[t_0, t_1] \to X^\alpha$.

Wir zeigen $\mathcal{G}$ ist eine Kontraktion:

$$\| \mathcal{G}(y)(t) - \mathcal{G}(z)(t) \|_\alpha \leq \int_{t_0}^{t} \| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \| \, \| f(y,s) - f(z,s) \| \, ds$$

$$\leq M L \| y - z \|_\alpha \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-a(t-s)} \, ds \leq 1/2$$

$\forall \ t \in [t_0, t_1] \Rightarrow \max_{[t_0,t_1]} \| \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(z) \| \leq \frac{1}{2} d_S(y,z)$, für alle $y, z \in S$.

~~Daraus besitzt $\mathcal{G}$ ein~~ Sei also u der eindeutige Fixpunkt von $\mathcal{G}$, also:

$$\mathcal{G}(u)(t) = u(t) = e^{-A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(u(s), s) \, ds$$

so erfüllt u die Integralgleichung $(*)$ aus Lemma (3.3.2), d.h. eine eindeutige Lösung der Gleichung (NC) auf $[t_0, t_1]$, zum Anfangswert x_0. $\square$